طريقة فروبينيس

تستخدم طريقة فروبينيس لإيجاد الحل المتسلسل عند نقطة شاذة منتظمة $x = x_0$.

خطوات الحل بفروبينيس :

1) ندرس نوع النقطة $x = x_0$:

-1 نجعل معامل $y'' = 1$.

-2 نحدد P(x),Q(x) .

ونلاحظ أنهما غير تحليليتان عند $x = x_0$.

-3 نحسب : $q(x) = x^2 Q(x)$, $p(x) = xP(x)$. تحليليتان عند $x = x_0$

إذن $x = x_0$ نقطة شاذة منتظمة .

2) نفرض الحل على الصورة (متسلسلة فروبينيس):

$$y(x) = \sum a_n x^{n+\gamma} \qquad , \quad a_n \neq 0$$
$$y'(x) = \sum a_n (n+\gamma) x^{n+\gamma-1}$$
$$y''(x) = \sum a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1) x^{n+\gamma-2}$$

3) نعوض في المعادلة التفاضلية قيد الدراسة عن القيم المذكورة في (2) .

4) نقوم بمساواة أصغر قوة بالصفر (n=0) مع الأخذ بعين الأعتبار أن $a_n \neq 0$ ومن هنا نحدد قيم γ_1, γ_2

أو نحسب المعادلة الأسية للمعادلة التفاضلية قيد الدراسة :

$$\gamma^2 + (p_0 - 1)\gamma + q_0 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في γ نوجد منها الجذرين γ_1, γ_2 بدلالة p_0, q_0 ..

5) سيكون لدينا 3 حالات من هذين الجذرين :

(وسيتم شرح كلاً منها في رقم (8)) :

1- أن يختلف الجذران بعدد غير صحيح .
2- أن يتساوى الجذران .
3- أن يختلف الجذران بعدد صحيح .

6) **نقوم بالتأكد من المعادلة التفاضلية قيد الدراسة** (هل تحتاج مساواة إضافية أولا).

في حالة لم يكن هناك مساواة إضافية:
ننتقل للخطوة رقم (7)
وفي حالة وجود مساواة إضافية :

فسينتج لنا قيم لـ γ وفي حالة كانت هذه القيم مساوية لقيم γ_1 , γ_2 فإنه عند هذه لا يكون هناك معامل غير محدد أما إذا كانت هذه القيم غير مساوية لقيم γ_1 , γ_2 فإننا نرفضها وبذلك يكون $a_1 = 0$.

7) **نقوم بمساواة معامل الحد العام** $X^{n+\gamma}$ **بالصفر وإيجاد صيغة عامة ..**

ملاحظة توضيحية :

إذا كانت العلاقة الناتجة من هذه الخطوة بدلالة a_{n-1} أو a_{n-2} أو a_{n-3} أو ....

فإن العداد n يجب أن يكون $n \geq 1$ أو $n \geq 2$ أو $n \geq 3$ أو .... على الترتيب .

وبالإمكان الإبقاء عليه في هذه الصورة ومتابعة الحل أو استبدال كل من n-1 أو n-2 أو n-3 ..بـ n وتغيير العداد إلى $n \geq 0$**.**

8) **حالات الجذران** γ_1 , γ_2 **:**

الحالة الأولى :

أن يختلف الجذران بعدد غير صحيح :

في هذه الحالة نحصل من قيمتي γ_1 , γ_2 على حلين مستقلين :

الحل الأول :

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\gamma_1}$$

الحل الثاني :

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\gamma_2}$$

ومنه فإن الحل العام :

$$.y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$$

الحالة الثانية :

ان يتساوى الجذران $(\gamma=\gamma_1=\gamma_2)$:

في هذه الحالة نحصل على **حل واحد** فقط مستقل هو :

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\gamma}$$

أما **الحل الثاني** (المستقل عن الأول خطياً) فيكون على الصورة :

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\partial a_n}{\partial \gamma}\right|_{\gamma} x^{n+\gamma}$$

وأخيرا فإن الحل العام :

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$$

الحالة الثالثة :

أن يختلف الجذران بعدد صحيح .

وتنقسم هذه الحالة إلى حالتان :

أولا : إذا كان احد جذري معادلة الأسس يؤدي إلى معاملات غير محددة :

1- هذه الحالة تظهر فيما إذا وجد قوس مشترك في كلا الحدين **..**

2- ندرس احتمالية انعدام هذا القوس :

وذلك بالتعويض بقيمة) γ_1 , γ_2 فإننا سنجد إحداهما يكون مرفوض وليكن γ_1 مثلا وذلك لظهور n = قيمة سالبة

أما الأخرى γ_2 فإن k=n حيث $k \geq 0$ أي عندما k=n
فإن المعامل المناظر لها سيكون هو الكمية الغير محددة ..)

3- ندرس معادلة الأسس عندما $\gamma = \gamma_2$ (أي عند الحد الذي يسبب الكمية الغير محددة):

نعوض عن قيم n و ندرس كل حالة أي عندما n=0,1,2,....k-1 ولكن بدلالة a_0 إلى أن نصل إلى المعامل الغير محدد **فنتوقف**..

ثم **نبدأ بالتعميم** لقيم $n \geq k$ وعندها يمكننا حذف القوس المشترك لأن المقدار لا ينعدم ونعوض عن قيم n=k,k+1,.....ولكن بدلالة a_k ..

4- **الحل العام** المطلوب هو :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\gamma}$$

$$=a_0(\ldots+\ldots+\ldots+)+a_k(\ldots+\ldots+\ldots+)$$

ثانيا: إذا كان أحد جذري معادلة الأسس يؤدي إلى معاملات لا نهائية :

1- في هذه الحالة تكون فيما إذا كان المعامل في الحد الآخر عدد وبالتالي يستحيل أن يساوي صفر أو لا يوجد أقواس مشتركة ..

2- ندرس احتمالية ان ينعدم المقام ..

(ومنه فإن γ التي ينعدم عندها المقام ولتكن γ_1 مثلاً تأخذ عندها المعاملات قيماً لا نهائية وتبدأ هذه المعاملات من n=k حيث $k \geq 0$) .

3- نعوض بقيمة الجذر γ_1 في الحد العام .

4- نعوض في الصيغة السابقة عند قيم n=0,1,2,.... بدلالة a_0 .

5- نفرض $a_0 = k(\gamma - \gamma_1)$ ونعوض عنها .

6- نحسب **الحلين المستقلين** :

الحل الأول:

1- من شكل الحل وقيمة a_0 :

$$a_0 = k(\gamma - \gamma_1) \quad , \quad y(x) = a_0 x^{n+\gamma_1}$$

وعليه فإن

$$y_1(x) = x^{\gamma_1}\left[a_0 + a_1 x + \ldots\right].$$

-2 نعوض عن $\gamma = \gamma_1$ ونحصل على **الحل الأول** $y_1(x)$.

الحل الثاني :

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\partial a_n}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=\gamma_1} x^{n+\gamma_1}$$

7) **الحل العام** المطلوب :

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x).$$

تمارين تطبيقية محلولة ..

$$(1)\ \ 2xy'' + y' + y = 0 \quad , \quad x=0$$

الحل:

ندرس نوع النقطة x=0 :

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x}y = 0 \rightarrow P(x) = \frac{1}{2x} \qquad , \ Q(x) = \frac{1}{2x}$$

غير تحليليتان عند x=0 ولكن :

$$p(x) = xP(x) = \frac{1}{2} \qquad , \ q(x) = x^2 Q(x) = \frac{x}{2}$$

تحليلتان عند x=0 .

إذن x=0 نقطة شاذة منتظمة .

نفرض الحل المتسلسل على الصورة (بطريقة فروبينيس):

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\gamma} \qquad , \ a_0 \neq 0$$

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\gamma)a_n x^{n+\gamma-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\gamma)(n+\gamma-1)a_n x^{n+\gamma-2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$2x\sum(n+\gamma)(n+\gamma-1)a_n x^{n+\gamma-2}+\sum(n+\gamma)a_n x^{n+\gamma-1}+\sum a_n x^{n+\gamma}=0$$

$$2\sum(n+\gamma)(n+\gamma-1)a_n x^{n+\gamma-1}+\sum(n+\gamma)a_n x^{n+\gamma-1}+\sum a_n x^{n+\gamma}=0$$

$$\sum(n+\gamma)[2n+2\gamma-2+1]a_n x^{n+\gamma-1}+\sum a_n x^{n+\gamma}=0$$

$$\sum(n+\gamma)\left[2(n+\gamma)-1\right]a_n x^{n+\gamma-1}+\sum a_n x^{n+\gamma}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $X^{\gamma-1}$ بالصفر (n=0):

$$\gamma(2\gamma-1)a_0=0 \rightarrow \gamma(2\gamma-1)=0 \qquad , a_0 \neq 0$$

$$\rightarrow \gamma_1=0 \qquad , \quad \gamma_2=\frac{1}{2}$$

نلاحظ أن الفرق بينهم **عدد غير صحيح** .

إذن **الحالة الأولى** .

بمساواة معامل الحد العام $X^{n+\gamma}$ بالصفر :

$$(n+\gamma+1)\left[2(n+\gamma+1)-1\right]a_{n+1}+a_n=0$$

$$\rightarrow a_{n+1}=\frac{-1}{(n+\gamma+1)(2n+2\gamma+1)}a_n \quad , \quad n\geq 0 \qquad ....(*)$$

نوجد الحل الأول $y_1(x)$:

$$y_1(x)=\sum a_n x^{n+\gamma_1}=\sum a_n x^n$$

بالتعويض عن القيمة الأولى لـ $\gamma_1=0$ في العلاقة (*) :

$$a_{n+1}=\frac{-1}{(n+1)(2n+1)}a_n \quad , \quad n\geq 0$$

$$n=0 \quad \rightarrow a_1=-a_0$$

$$n=1 \quad \rightarrow a_2=-\frac{1}{6}a_1=\frac{1}{6}a_0$$

$$n=2 \quad \rightarrow a_3=-\frac{1}{15}a_2=-\frac{1}{90}a_0$$

$$n=3 \quad \rightarrow a_4=-\frac{1}{28}a_3=\frac{1}{2520}a_0$$

إذن **الحل الأول** يأخذ الشكل :

$$y_1(x) = \sum a_n x^n$$

$$= a_0 - a_0 x + \frac{1}{6} a_0 x^2 - \frac{1}{90} a_0 x^3 + \frac{1}{2520} a_0 x^4 - .....$$

$$= a_0 \left[1 - x + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{90} x^3 + \frac{1}{2520} x^4 - ..... \right]$$

نوجد الحل الثاني $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \sum a_n x^{n+\gamma_2} = \sum a_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

بالتعويض عن القيمة الأولى لـ $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ في العلاقة (*) :

$$a_{n+1} = \frac{-1}{2\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)} a_n \quad , \quad n \geq 0$$

$$n = 0 \quad \rightarrow a_1 = -\frac{1}{3} a_0$$

$$n = 1 \quad \rightarrow a_2 = -\frac{1}{10} a_1 = \frac{1}{30} a_0$$

$$n = 2 \quad \rightarrow a_3 = -\frac{1}{21} a_2 = -\frac{1}{630} a_0$$

$$n = 3 \quad \rightarrow a_4 = -\frac{1}{44} a_3 = \frac{1}{27720} a_0$$

إذن **الحل الثاني** يأخذ الشكل :

$$y_2(x)=\sum a_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{2}}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+.....\right)$$

$$=\sqrt{x}\left(a_0-\frac{1}{3}a_0x+\frac{1}{30}a_0x^2-\frac{1}{630}a_0x^3+\frac{1}{27720}a_0x^4-.....\right)$$

$$=a_0\left[\sqrt{x}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^5}{30}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^7}{630}+.....\right]$$

و بالتالي فإن **الحل العام** :

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

$$=c_1a_0\left[1-x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{90}x^3+\frac{1}{2520}x^4-.....\right]$$

$$+c_2\ a_0\left[\sqrt{x}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^5}{30}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^7}{630}+.....\right]$$

$$(2)\,x^2y''-xy'+\left(x^2+1\right)y=0\quad ,\quad x=0$$

الحل:

ندرس نوع النقطة x=0 :

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)y = 0$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{-1}{x} \qquad , \ Q\ (x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

غير تحليليتان عند x=0 ولكن :

$$p(x) = xP(x) = -1 \qquad , \ q(x) = x^2 Q(x) = x^2 + 1$$

تحليلتان عند x=0 .

إذن x=0 نقطة شاذة منتظمة .

نفرض الحل المتسلسل على الصورة (بطريقة فروبينيس):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\gamma} \qquad , \ a_0 \neq 0$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma) a_n x^{n+\gamma-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma)(n+\gamma-1) a_n x^{n+\gamma-2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\sum a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1) x^{n+\gamma} - \sum a_n (n+\gamma) x^{n+\gamma}$$

$$+ \sum a_n x^{n+\gamma+2} + \sum a_n x^{n+\gamma} = 0$$

$$\rightarrow \sum a_n x^{n+\gamma} \left[(n+\gamma)(n+\gamma-1) - (n+\gamma) + 1\right] + \sum a_n x^{n+\gamma+2} = 0$$

$$\rightarrow \sum a_n x^{n+\gamma} \left[(n+\gamma)(n+\gamma-2) + 1\right] + \sum a_n x^{n+\gamma+2} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة x^{γ} بالصفر (n=0):

$$a_0\left[\gamma(\gamma-2)+1\right]=0$$

$$\rightarrow a_0\left[\gamma^2-2\gamma+1\right]=0 \qquad , a_0\neq 0$$

$$\rightarrow \gamma^2-2\gamma+1=0$$

$$\rightarrow (\gamma-1)^2=0$$

$$\rightarrow \gamma=\gamma_1=\gamma_2=1$$

نلاحظ أن الجذرين متساويين .

إذن الحالة الثانية .

بمساواة معامل القوة $x^{\gamma+1}$ بالصفر (n=1):

$$a_1\left[(1+\gamma)(\gamma-1)+1\right]=0$$

$$\rightarrow a_1\left[\gamma^2-\gamma+\gamma-1+1\right]=0$$

$$\rightarrow a_1\left[\gamma^2\right]=0$$

وبما أن $\gamma\neq 0$ إذن $a_1=0$.

$$\rightarrow a_3=a_5=a_7=......=0$$

بمساواة معامل الحد العام $x^{n+\gamma}$ بالصفر :

$$a_n\left[(n+\gamma)(n+\gamma-2)+1\right]+a_{n-2}=0 \quad , \quad n\geq 2$$

باستبدال كل n-2 بـ n نحصل على :

$$a_{n+2}\left[(n+\gamma+2)(n+\gamma)+1\right]=-a_n \quad , \quad n\geq 0$$

$$\rightarrow a_{n+2}=\frac{-1}{\left[(n+\gamma+2)(n+\gamma)+1\right]}a_n \quad , \quad n\geq 0 \;.......(*)$$

$$n=0 \quad \rightarrow a_2=\frac{-1}{\left[(\gamma+2)\gamma+1\right]}a_0=\frac{-1}{(\gamma+1)^2}a_0$$

$$n=1 \quad \rightarrow a_3=0$$

$$n=2 \quad \rightarrow a_4=\frac{-1}{\left[(\gamma+4)(2+\gamma)+1\right]}a_2=\frac{1}{(\gamma+3)^2(\gamma+1)^2}a_0$$

$$n=3 \quad \rightarrow a_5=0$$

$$n=4 \quad \rightarrow a_6=\frac{-1}{\left[(\gamma+6)(4+\gamma)+1\right]}a_4=\frac{-1}{(\gamma+5)^2(\gamma+3)^2(\gamma+1)^2}a_0$$

إذن **الحل الأول** هو :

$$y_1(x)=\sum a_n x^{n+\gamma}$$

$$=x\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+.....\right)$$

$$=a_0x-\frac{1}{(\gamma+1)^2}a_0x^3+\frac{1}{(\gamma+1)^2(\gamma+3)^2}a_0x^5$$

$$-\frac{1}{(\gamma+1)^2(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2}a_0x^7+.....$$

و عند $\gamma=1$:

$$y_1(x)=a_0\left[x-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{64}x^5-\frac{1}{2304}x^7+.....\right]$$

الحل الثاني $y_2(x)$:

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{\partial a_n}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=1}x^{n+1}$$

نحسب المقدار $\left.\frac{\partial a_n}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=1}$:

$$a_2=\frac{-1}{(\gamma+1)^2}a_0 \Rightarrow \text{let } b_2=\frac{1}{(\gamma+1)^2}\rightarrow a_2=-b_2a_0$$

بأخذ ln للطرفين :

$$\ln b_2=-2\ln(\gamma+1)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ γ:

$$\frac{1}{b_2}\frac{\partial b_2}{\partial\gamma}=\frac{-2}{(\gamma+1)} \Rightarrow \frac{\partial b_2}{\partial\gamma}=\left(\frac{1}{(\gamma+1)^2}\right)\left(\frac{-2}{\gamma+1}\right)=\frac{-2}{(\gamma+1)^3}$$

$$\left.\frac{\partial b_2}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=1}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

$$a_2 = \frac{-1}{(\gamma+1)^2} a_0 \;\Rightarrow\; \text{let } b_2 = \frac{1}{(\gamma+1)^2} \rightarrow a_2 = -b_2 a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{(\gamma+1)^2(\gamma+3)^2} a_0 \;\Rightarrow\; \text{let } b_4 = \frac{1}{(\gamma+1)^2(\gamma+3)^2} \rightarrow a_4 = b_4 a_0$$

بأخذ ln للطرفين :

$$\begin{aligned} \ln b_4 &= -\ln(\gamma+3)^2(\gamma+1)^2 \\ &= -\left[\ln(\gamma+3)^2 + \ln(\gamma+1)^2\right] \\ &= -2\left[\ln(\gamma+3) + \ln(\gamma+1)\right] \end{aligned}$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ γ:

$$\frac{1}{b_4}\frac{\partial b_4}{\partial \gamma} = -2\left[\frac{1}{\gamma+3} + \frac{1}{\gamma+1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial b_4}{\partial \gamma} = \left(\frac{-2}{(\gamma+3)^2(\gamma+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\gamma+3} + \frac{1}{\gamma+1}\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial b_4}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=1} = \frac{-2}{64}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{128}$$

$$a_6=\frac{-1}{(\gamma+1)^2(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2}a_0$$

$$\Rightarrow \text{ let } b_6=\frac{1}{(\gamma+1)^2(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2}\rightarrow a_6=-b_6a_0$$

بأخذ ln للطرفين :

$$\ln b_6=-2\left[\ln(\gamma+1)+\ln(\gamma+3)+\ln(\gamma+5)\right]$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ γ:

$$\frac{1}{b_6}\frac{\partial b_6}{\partial\gamma}=-2\left[\frac{1}{\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+3}+\frac{1}{\gamma+5}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial b_6}{\partial\gamma}=\frac{-2}{(\gamma+1)^2(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2}\left[\frac{1}{\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+3}+\frac{1}{\gamma+5}\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial b_6}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=1}=\frac{-2}{(4)(16)(36)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{-11}{13824}$$

بالتالي فإن **الحل الثاني** :

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{\partial a_n}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=1}x^{n+\gamma}$$

$$=y_1(x)\ln x+\left[\frac{-1}{4}a_0x^3-\frac{2}{128}a_0x^5-\frac{11}{13824}a_0x^7+....\right]$$

إذن **الحل العام** :

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

$$=c_1a_0\left[x-\frac{1}{4}x^3-\frac{2}{128}x^5-\frac{1}{2304}x^7+.....\right]$$

$$+c_2\left[y_1(x)\ln x+\left[\frac{-1}{4}a_0x^3-\frac{2}{128}a_0x^5-\frac{11}{13824}a_0x^7+....\right]\right]$$

$$(3)\,x^2y''+xy'+\left(x^2-1\right)y=0 \quad , \quad x=0$$

الحل :

ندرس نوع النقطة x=0 :

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)y=0 \rightarrow P(x)=\frac{1}{x} \qquad , \; Q\,(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

غير تحليليتان عند x=0 ولكن :

$$p(x)=xP(x)=1 \qquad , \; q(x)=x^2Q(x)=x^2-1$$

تحليلتان عند x=0 .

إذن x=0 نقطة شاذة منتظمة .

نفرض الحل المتسلسل على الصورة (بطريقة فروبينيس):

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\gamma} \qquad , \; a_0\neq 0$$

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\gamma)a_nx^{n+\gamma-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\gamma)(n+\gamma-1)a_nx^{n+\gamma-2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\sum a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1)x^{n+\gamma} + \sum a_n (n+\gamma)x^{n+\gamma}$$

$$+\sum a_n x^{n+\gamma+2} - \sum a_n x^{n+\gamma} = 0$$

$$\rightarrow \sum a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1)x^{n+\gamma} + \sum a_n (n+\gamma-1)x^{n+\gamma}$$

$$+\sum a_n x^{n+\gamma+2} = 0$$

$$\rightarrow \sum a_n (n+\gamma-1)(n+\gamma+1)x^{n+\gamma} + \sum a_n x^{n+\gamma+2} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة x^{γ} بالصفر (n=0):

$$a_0(\gamma-1)(\gamma+1)=0 \qquad , a_0 \neq 0$$
$$\rightarrow \gamma_1 = 1 \quad , \quad \gamma_2 = -1$$

نلاحظ أن **الفرق بينهم عدد صحيح** .

إذن الحالة الثالثة .

بمساواة معامل القوة $x^{\gamma+1}$ بالصفر (n=1):

$$a_1\gamma(\gamma+2)=0$$

وبما أن $\gamma \neq -2 \;,\; \gamma \neq 0$ إذن $a_1 = 0$.

$$\rightarrow a_3 = a_5 = a_7 = \ldots\ldots = 0$$

بمساواة معامل الحد العام $x^{n+\gamma}$ بالصفر :

$$a_n(n+\gamma-1)(n+\gamma+1)+a_{n-2}=0 \quad , \quad n \geq 2$$

بوضع n بدلا من n-2 نحصل على :

$$a_{n+2}=\frac{-1}{(n+\gamma+1)(n+\gamma+3)}a_n \quad , \quad n\geq 0 \quad ....(*)$$

ندرس احتمالية انعدام المقام في الحد العام (*):

عند قيمة $\gamma_1=1$ فإن

$$n+\gamma+3\neq 0 \quad \wedge \quad n+\gamma+1\neq 0$$

لقيم n الموجبة .

وعند قيمة $\gamma_2=-1$ فإن n=0

أي عندما n=0 و $\gamma_2=-1$ هناك احتمالية لأن ينعدم المقام وهذا يعني أن تأخذ المعاملات قيم لا نهائية من n=0 ويناظرها المعامل a_2 .

بالتعويض في (*):

$$n=0 \quad \to a_2=\frac{-1}{(\gamma+1)(\gamma+3)}a_0$$

$$n=1 \quad \to a_3=0$$

$$n=2 \quad \to a_4=\frac{-1}{(\gamma+3)(\gamma+5)}a_2=\frac{1}{(\gamma+1)(\gamma+3)^2(\gamma+5)}a_0$$

$$n=3 \quad \to a_5=0$$

$$n=4 \quad \to a_6=\frac{-1}{(\gamma+5)(\gamma+7)}a_4=\frac{-1}{(\gamma+1)(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2(\gamma+7)}a_0$$

$$\text{let} \quad a_0=k(\gamma+1)$$

ونعوض بالفرض للتخلص من المعاملات اللانهائية :

$$n=0 \rightarrow a_2 = \frac{-1}{(\gamma+1)(\gamma+3)}\left[k(\gamma+1)\right] = \frac{-k}{\gamma+3}$$

$$n=2 \rightarrow a_4 = \frac{1}{(\gamma+1)(\gamma+3)^2(\gamma+5)}\left[k(\gamma+1)\right]$$

$$= \frac{k}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)}$$

$$n=4 \rightarrow a_6 = \frac{-1}{(\gamma+1)(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2(\gamma+7)}\left[k(\gamma+1)\right]$$

$$= \frac{-k}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2(\gamma+7)}$$

نحسب الآن الحلين المستقلين :

الحل الأول بوضع $\gamma = -1$:

$$y(x) = \sum a_n x^{n+\gamma} \qquad , \quad a_0 = k(\gamma+1)$$

وعليه فإن :

$$y(x) = x^{\gamma}\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...\right]$$

$$= x^{\gamma}[k(\gamma+1) + 0 - \frac{k}{\gamma+3}x^2 +$$

$$\frac{k}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)}x^4 + \frac{k}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2(\gamma+7)}x^6 + ...]$$

نعوض عن $\gamma = -1$ لنحصل على **الحل الأول** :

$$y_1(x) = x^{-1}\left[\frac{-k}{2}x^2 + \frac{k}{16}x^4 - \frac{k}{384}x^6 + \ldots\right]$$

$$= \frac{-k}{2}x + \frac{k}{16}x^3 - \frac{k}{384}x^5 + \ldots$$

الحل الثاني $y_2(x)$:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\partial a_n}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=-1} x^{n-1}$$

نحسب المقدار $\left.\frac{\partial a_n}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=-1}$:

$$a_0 = k(\gamma+1) \quad \to \quad \left.\frac{\partial a_0}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=-1} = k$$

$$a_2 = \frac{-k}{\gamma+3} \quad \to \quad \left.\frac{\partial a_2}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=-1} = \left.\frac{k}{(\gamma+3)^2}\right|_{\gamma=-1} = \frac{k}{4}$$

$$a_4 = \frac{k}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)} \quad \to \quad \text{let } b_4 = \frac{1}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)}$$

بأخذ ln للطرفين والاشتقاق :

$$\ln b_4 = -\left[\ln(\gamma+3)^2 + \ln(\gamma+5)\right]$$

$$= -\left[2\ln(\gamma+3) + \ln(\gamma+5)\right]$$

$$\to \frac{1}{b_4}\frac{\partial b_4}{\partial \gamma} = -\left[\frac{2}{\gamma+3} + \frac{1}{\gamma+5}\right]$$

$$\to \frac{\partial b_4}{\partial \gamma} = -\left(\frac{1}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)}\right)\left[\frac{2}{\gamma+3} + \frac{1}{\gamma+5}\right]$$

وبما أن $a_4 = kb_4$ فإن :

$$\left.\frac{\partial a_4}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=-1} = k\left.\frac{\partial b_4}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=-1}$$

$$\to \left.\frac{\partial a_4}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=-1} = k\left(\frac{1}{16}\right)\left[1+\frac{1}{4}\right] = k\left(\frac{-5}{64}\right)$$

$$a_6 = \frac{-k}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2(\gamma+7)} \quad \to \text{let } b_6 = \frac{1}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2(\gamma+7)}$$

بأخذ ln للطرفين والاشتقاق :

$$\ln b_6 = -\left[2\ln(\gamma+3) + 2\ln(\gamma+5) + \ln(\gamma+7)\right]$$

$$\to \frac{1}{b_6}\frac{\partial b_6}{\partial \gamma} = -\left[\frac{2}{\gamma+3} + \frac{2}{\gamma+5} + \frac{1}{\gamma+7}\right]\left(\frac{1}{(\gamma+3)^2(\gamma+5)^2(\gamma+7)}\right)$$

وبما أن $a_6 = -kb_6$ فإن :

$$\left.\frac{\partial a_6}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=-1} = -k\left.\frac{\partial b_6}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=-1}$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial a_6}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=-1} = \left(\frac{5k}{1152}\right)$$

بالتالي فإن **الحل الثاني** :

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{\partial a_n}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=-1} x^{n-1}$$

$$= y_1(x)\ln x + kx^{-1}\left[1+\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 + \frac{5}{1152}x^6 + \ldots\right]$$

إذن **الحل العام** :

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

$$= A\left[\frac{-k}{2}x + \frac{k}{16}x^3 - \frac{k}{384}x^5 + \ldots\right]$$

$$+ B\left[y_1(x)\ln x + kx^{-1}\left[1+\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 + \frac{5}{1152}x^6 + \ldots\right]\right]$$

$$(4)\ xy'' + (x-1)y' - y = 0 \quad , \quad x=0$$

الحل :

ندرس نوع النقطة x=0 :

$$y'' + \left(1-\frac{1}{x}\right)y' - \frac{1}{x}y = 0 \rightarrow P(x) = 1-\frac{1}{x} \quad , \quad Q(x) = -\frac{1}{x}$$

غير تحليليتان عند x=0 ولكن :

$$p(x) = xP(x) = x-1 \qquad , \; q(x) = x^2 Q(x) = -x$$

تحليلتان عند x=0 .

إذن x=0 نقطة شاذة منتظمة .

نفرض الحل المتسلسل على الصورة (بطريقة فروبينيس):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\gamma} \qquad , \; a_0 \neq 0$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma) a_n x^{n+\gamma-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\gamma)(n+\gamma-1) a_n x^{n+\gamma-2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\sum a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1) x^{n+\gamma-1} + \sum a_n (n+\gamma) x^{n+\gamma}$$

$$-\sum a_n (n+\gamma) x^{n+\gamma-1} - \sum a_n x^{n+\gamma} = 0$$

$$\rightarrow \sum a_n (n+\gamma)(n+\gamma-2) x^{n+\gamma-1} + \sum a_n (n+\gamma-1) x^{n+\gamma} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $x^{\gamma-1}$ بالصفر (n=0):

$$a_0 \gamma(\gamma-2) = 0 \quad , a_0 \neq 0$$

$$\rightarrow \gamma_1 = 0 \quad , \quad \gamma_2 = 2$$

نلاحظ أن **الفرق بينهم عدد صحيح .**

إذن الحالة الثالثة .

بمساواة معامل الحد العام $x^{n+\gamma}$ بالصفر :

$$a_{n+1}(n+\gamma+1)(n+\gamma-1)+a_n(n+\gamma-1)=0$$
$$\rightarrow a_{n+1}(n+\gamma+1)(n+\gamma-1)=-(n+\gamma-1)a_n$$

قبل القسمة على $(n+\gamma-1)$ لابد من التأكد أن

$$n+\gamma-1\neq 0$$

$$\text{if}\quad \gamma_1=0 \quad\rightarrow\quad n=1$$
$$\text{if}\quad \gamma_2=2 \quad\rightarrow\quad n=-1 \quad \text{مرفوض}$$

إذن عندما $\gamma_1=0\;,\;n=1$ فإن أحد قيم المعاملات يكون غير محدد والمعامل المناظر هو a_2 هو الكمية الغير المحددة .

ندرس عندما $\gamma=0$:

(أي عند الحد الذي يسبب الكمية الغير محددة)

$$\therefore a_{n+1}(n+1)(n-1)=-(n-1)a_n$$

نعوض عن قيم n :

$$n=0 \quad \rightarrow -a_1=a_0 \quad\rightarrow a_1=-a_0$$
$$n=1 \quad \rightarrow a_2(0)=(0)a_1=(0)a_0 \quad,\quad a_0\neq 0$$

إذن a_2 كمية غير محددة .

نعمم ذلك لقيم $n\geq 2$:

$$a_{n+1}=\frac{-(n-1)}{(n-1)(n+1)}a_n=\frac{-1}{n+1}a_n \quad,\quad n\geq 2$$

$$\text{if}\quad n = 2 \quad \rightarrow a_3 = \frac{-1}{3} a_2$$

$$n = 3 \quad \rightarrow a_4 = \frac{-1}{4} a_3 = \frac{1}{12} a_2$$

$$n = 4 \quad \rightarrow a_5 = \frac{-1}{5} a_4 = \frac{-1}{60} a_2$$

وعليه فإن **الحل العام المطلوب**:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.. \\ &= a_0 - a_0 x + a_2 x^2 - \frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{12} a_2 x^4 - \frac{1}{60} a_2 x^5 + \ldots.. \\ &= a_0 (1 - x) + a_2 \left(x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{60} x^5 + \ldots.. \right) \end{aligned}$$