5–1 المتتاليات (المتتابعات) *Sequences*

تعريف 5–1–1

المتتالية هي دالة نطاقها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والقيم التي تأخذها الدالـــة تـــسمى حـــدود المتتالية.

أمثلة:

$1,2,3,4,\ldots,n,\ldots$ متتالية حدها العام n

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ متتالية حدها العام $\frac{1}{n}$

$1,\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{8}{5},\ldots$ متتالية حدها العام $\frac{2n}{n+1}$

ومتى عرف الحد العام لأية متتالية فإنه من السهل كتابة حدودها وذلك بالتعويض عن n في الحد العـــام بالقيم $1,2,3,\ldots\ldots$ كما يمكن كتابة المتتالية على الـــصورة المختـــصرة a_n أو $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ أو $< a_n >$ أو (a_n) ويوجد نوعان من المتتاليات هما:

(i) متتالية منتهية مثل $\{n\}_{n=1}^{5}$ (ii) متتالية غير منتهية مثل $\{n\}_{n=1}^{\infty}$

وستكون دراستنا في هذا البند تقتصر على متتاليات الأعداد الحقيقية أي الدوال التي نطاقها $\aleph$ ونطاقها المصاحب $\Re$

تعريف 5–1–2 المتتاليات المتقاربة *Converging Sequences*

يقال أن المتتالية a_n متقاربة إذا كانت قيم a_n تقترب من عدد حقيقي l كلما ازدادت n زيادة غير محدودة ويسمى العدد l بنهاية المتتالية ويرمز لذلك بالرمز $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ وإذا كانت قيم a_n لا تقتـــرب من عدد معين كلما ازدادت n أي أن المتتالية a_n ليس لها نهاية فإن a_n متباعدة *Divergent* .

بعبارة أخرى: إن جميع حدود المتتالية باستثناء على الأكثر الحدود الـــ k الأولى تقع على بعد يقل عن ε من l وللاختصار سنقول أن معظم حدود المتتالية تقع على بعد يقل عن ε من l

ويمكن صياغة هذا التعريف هندسياً على النحو التالي:

المتتالية a_n تكون متقاربة إذا وجد عدد حقيقي l بحيث أن كل فترة مفتوحة $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ مركزها l تحتوي على معظم حدود المتتالية.

تعريف 5-1-3

المتتالية a_n متقاربة من العدد l إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد العدد الصحيح الموجب N حيث أن $|a_n - l| < \varepsilon$ لكل $n > N$

مثال1

المتتالية $a_n = \begin{cases} n & ,n \le 10^3 \\ 1 & ,n > 10^3 \end{cases}$ متقاربة وتقترب من العدد 1 لأن كل فترة مفتوحة $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ مركزها 1 تحتوي على معظم حدود المتتالية وفي الواقع كل فترة من هذا النوع تحتوي على جميع حدود المتتالية عدا الحدود الألف الأولى.

لاحظ أن N في هذا المثال يمكن أن تؤخذ 10^3 أو أي عدد صحيح أكبر من 10^3

مثال2

المتتالية $(-1)^n$ غير متقاربة لأنه إذا فرضنا مثلا أنها متقاربة إلى 1 وأخذنا الفترة $(1-\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4})$ التي مركزها 1 ونصف قطرها $\frac{1}{4}$ (أي إذا أخذنا $\varepsilon = \frac{1}{4}$) فنجد أن هذه الفترة تحتوي على الحدود الزوجية للمتتالية (قيمة كل حد من هذه الحدود تساوي 1) بينما هذه الفترة لا تحتوي على أي من الحدود الفردية (التي كل منها يساوي -1) ومجموعة الحدود الفردية هذه غير منتهية وهذا يعني أن الفترة $(1-\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4})$ لا تحتوي على معظم حدود المتتالية ونستنتج من ذلك أن المتتالية لا يمكن أن تقترب من 1 وبنفس الكيفية يمكن إثبات أن المتتالية لا تقترب من -1

ونستنتج من هذه المناقشة أن المتتالية $(-1)^n$ غير متقاربة.

مثال3

المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وهي تقترب من الصفر لأن كل فترة مفتوحة $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ مركزها 0 تحتوي على معظم حدود المتتالية.

ويمكن برهنة ذلك باستخدام التعريف 5-1-3 كما يلي:

مناقشة قبل البرهان:

حتى نثبت أن المتتالية $\frac{1}{n}$ متقاربة من الصفر علينا أن نثبت تحقق الشرط التالي:

لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن $|a_n - l| < \varepsilon$ لكل $n > N$ حيث l هنا تساوي صفر ، $a_n = \frac{1}{n}$

لذلك علينا أن نفرض أن $\varepsilon > 0$ ونثبت وجود عدد مثل N بحيث يحقق هذا الشرط ولهذا علينا إيجاد علاقة تربط بين N ، ε من خلال الشرط $|a_n - l| < \varepsilon$ لكل $n > N$

لاحظ أن $|a_n - l| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ أي أن $n \geq 1$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ وهذا يعني أن $n > \frac{1}{\varepsilon}$

وبالتالي تكون العلاقة التي تحدد مواصفات N هي $N = \frac{1}{\varepsilon}$

المناقشة السابقة لا تمثل برهانا رياضياً قوياً لذلك علينا ترتيب هذه المناقشة لتصبح برهاناً رياضيا قوياً.

البرهان:

نفرض أن ε أي عدد حقيقي موجب أقل من 1 وأن $N = \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\right\}$

الآن $|a_n - l| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|$ وإذا فرضنا أن $n \geq 1$ فإن $N = \frac{1}{\varepsilon}$ وبالتالي فإن $n > N$ تعطي $n > \frac{1}{\varepsilon}$

ومنها فإن $\frac{1}{n} < \varepsilon$ وبما أن $n \geq 1$ فإن $|a_n - l| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ وهو المطلوب إثباته.

مثال4:

المتتالية $(-1)^n$ غير متقاربة.

البرهان

إذا فرضنا أن المتتالية متقاربة فإنها ستقارب إلى عدداً حقيقياً l وبالتالي ينطبق التعريف 5-1-3 الخاص بالتقارب ومن ذلك نستنتج أن: لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N بحيث $|a_n - l| < \varepsilon$ لكل $n > N$

وحيث أن المتتالية هي $a_n = (-1)^n$ فإنه عندما تكون n فردية فإن $a_n = 1$ وعندما تكون n زوجية فإن $a_n = 1$ وبالتالي نحصل على $|1 - l| < \varepsilon$ إذا كانت $n > N$ وهي زوجية وكذلك $|-1 - l| < \varepsilon$ إذا كانت $n > N$ وهي فردية.

وبفرض أن $\varepsilon = \frac{1}{2}$ فإن $2 = |1 + 1| = |1 - (-1)| = |1 - l + l - (-1)| \leq |1 - l| + |l - (-1)|$

$$2 \le |1-l| + |l+1| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

أي أن $2 < 1$ وهذا تناقض

لاحظ أن $|-1-l| = |-(l+1)| = |l+1|$

وهذا يعني أنه لا يوجد عدد حقيقي يصلح ليكون نهاية لهذه المتتالية وبالتالي فإن $(-1)^n$ متباعدة.

مبرهنة 5-1-1

إذا كانت المتتالية a_n متقاربة فإن نقطة التقارب تكون وحيدة.

البرهان

نفرض أن $a_n \to l_1$ ، $a_n \to l_2$ حيث $l_1 \ne l_2$ وليكن ε تمثل البعد $|l_1 - l_2|$ بين l_1 ، l_2 وبما أن $l_1 \ne l_2$ فإن $\varepsilon > 0$

وبما أن a_n تقترب من l_1 فيوجد عدد صحيح موجب N_1 بحيث $|a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > N_1$

وبالمثل يوجد عدد صحيح موجب N_2 بحيث أن $|a_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > N_2$

ليكن الآن N عدداً صحيحاً أكبر من N ، N_2 فإن:

$$\varepsilon = |l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \le |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| = |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي أن $\varepsilon < \varepsilon$

وهذا تناقض وبالتالي فإن $l_1 = l_2$ أي أن نقطة التقارب وحيدة.

تعريف:

إذا كانت a_n متتالية من الأعداد الحقيقية فإنها تسمى محدودة إذا وجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث أن $|a_n| < M$ لكل $n \in \aleph$

مبرهنة 5-1-2

إذا كانت a_n متتالية من الأعداد الحقيقية متقاربة فإنها تكون محدودة.

البرهان

نفرض أن $a_n \to l$

$\therefore$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث $|a_n - l| < 1$ لكل $n > N$

ومن هذا نستنتج أن:

$|a_n| = |a_n - l + l| \le |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$ لكل $n > N$

أي أن $|a_n| < |l| + 1$ لكل $n > N$

لنضع $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots\ldots, |a_{N-1}|, |l| + 1\}$

من الواضح أن $|a_n| \le M$ لكل $n \in \aleph$

$\therefore$ a_n متتالية محدودة

لاحظ أن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً ،أي أنه إذا كانت a_n متتالية محدودة فليس من الضروري أن تكون a_n متقاربة والمثال على ذلك المتتالية المحدودة $(-1)^n$ فهي غير متقاربة على الرغم من كونها محدودة حيث $|(-1)^n| \le 1$

تعريف:5-1-4

إذا كانت المتتالية a_n متقاربة من العدد l فإن $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ ويسمى العدد l نهاية المتتالية a_n وإذا كانت النهاية غير موجودة فإن المتتالية تكون متباعدة.

تعريف:5-1-5

العبارة $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ تعني أنه لكل عدد حقيقي موجب P يوجد العدد الصحيح الموجب N حيث أن $a_n > P$ لكل $n > N$

مثال5:

باستخدام الحدس ودون برهان ابحث المتتالية $1 + \frac{1}{n}$ من حيث التقارب أو التباعد ثم أوجد نهايتها إن وجدت.

الحل

بإيجاد بعض حدود المتتالية $2, 1.5, 1.33, 1.25, 1.2, \ldots\ldots$ وبدراسة قيم a_n نجد أنها تبدأ من 2 ثم تتناقص تدريجيا مقتربة من العدد 1 وهذا يوحي بأن المتتالية متقاربة وأنها تقترب من 1

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$

مثال6

المتتالية $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى العدد 1

البرهان

نفرض أن $\varepsilon>0$ ونبحث عن عدد صحيح موجب N بحيث يكون $\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\varepsilon$ لكل $n>N$

$$\left|\frac{n}{n+2}-1\right|=\left|\frac{-2}{n+2}\right|=\left|\frac{2}{n+2}\right|<\frac{2}{n}$$

وباختيار $N=\frac{2}{\varepsilon}$ يكون $n>\frac{2}{\varepsilon}$ لكل $n>N$ أي أن $\frac{2}{n}<\varepsilon$ وهذا يؤدي إلى أن $\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\varepsilon$ لكل $n>N$

$\therefore$ المتتالية متقاربة من العدد 1

مبرهنة5-1-3:

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ غير محدودة فإنها تكون متباعدة.

تعريف5-1-6: (المتتاليات المتزايدة والمتتاليات المتناقضة)

المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة *increasing* إذا كان $a_n\le a_{n+1}$ لكل $n\ge 1$ ومتناقصة إذا كـــان $a_n\ge a_n+1$ لكل $n\ge 1$

مثال7

بين ما إذا كانت المتتالية التالية تزايدية أو تناقصية: $\left\{\frac{2n}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

الحـــل

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2n+2}{3n+4}-\frac{2n}{3n+1}=\frac{(3n+1)(2n+2)-2n(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)}=\frac{2}{(3n+4)(3n+1)}>0$$

أي أن $a_{n+1}>a_n\forall n$ وهذا يعني أن المتتالية تزايدية

مثال8

بين ما إذا كانت المتتالية $\left\{\frac{n!}{2^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية أو تناقصية

الحــل

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}-\frac{n!}{2^{n+1}}=\frac{(n+1)n!}{2^{n+2}}-\frac{n!}{2^{n+1}}=\frac{n!}{2^{n+2}}(n-1)>0 \quad \forall n>1$$

وبالتالي فإن المتتالية تزايدية لكل $n>1$

مبرهنة5-1-4:

إذا كانت المتتالية المحدودة متزايدة أو متناقصة فإنها متقاربة .

مبرهنة5-1-5:

إذا كان $\{a_n\}$، $\{b_n\}$، $\{c_n\}$ متتاليات لا نهائية حيث أن $a_n \le b_n \le c_n$ لكل n

وإذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

البرهان:

لكل $\varepsilon>0$ يوجد العدد N حيث $|a_n-l|<\varepsilon$ لكل $n>N$

أي أن $-\varepsilon<a_n-l<\varepsilon$ ولذلك فإن $l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$

وكذلك $|c_n-l|<\varepsilon$ أي أن $l-\varepsilon<c_n<l+\varepsilon$

وبما أن $a_n\le b_n\le c_n$ فإنه إذا كان $n>N$ فإن $l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon$ أي أن $|b_n-l|<\varepsilon$

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

مثال9:

أوجد نهاية المتتالية $\left\{\dfrac{\sin^2 n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

الحل

بما أن $0\le \sin^2 n \le 1$ فإن $0\le \dfrac{\sin^2 n}{n}\le \dfrac{1}{n}$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n}=0$

تعريف:5-1-7 (المتتالية الجزئية)

ليكن $\{x_n\}_{n=1}$ متتالية فإن المتتالية الجزئية من المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ حيث $y_k = x_{n_k}$ لكل $k\varepsilon\aleph$ عندما يكون $n_1 < n_2 < ......$

من الملاحظ أن كل متتالية هي متتالية جزئية من نفسها وقد تكون المتتالية متباعدة ولكن يكون لها متتالية جزئية متقاربة والمثال على ذلك $x_n = (-1)^n$ فهي متتالية متباعدة ولكن لها متتالية جزئية $y_k = (-1)^{2k}$ متقاربة إلى العدد 1

لاحظ أن كل متتالية جزئية من متتالية متقاربة تكون متقاربة إلى نفس نقطة تقارب المتتالية الأصلية والمبرهنة التالية توضح ذلك:

مبرهنة5-1-6:

إذا كانت a_n متتالية متقاربة فإن كل متتالية جزئية a_{n_k} من $\{a_n\}$ تكون متقاربة وتقترب إلى $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ نفسها.

البرهان

نفرض أن $\{a_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقة وأن l عدد حقيقي بحيث أن $\lim\limits_{n\to\infty} = l$ ونفرض أن $\{a_{n_k}\}$ أي متتالية جزئية من $\{a_n\}$ والمطلوب أن نثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = l$ لذلك من الفرض نستنتج أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N بحيث أن $|a_n - l| < \varepsilon$ لكل $n > N$

ومن السهل إثبات أن $n_k \geq k$ لكل k في $\aleph$ (وذلك باستخدام الاستقراء الرياضي) وبالتالي إذا فرضنا أن $k > N$ فإن $n_k > N$ وبالتالي فإن $|a_{n_k} - l| < \varepsilon$

مثال10:

المتتالية $\left\{\dfrac{\cos(\frac{n\pi}{6})}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متقاربة من الصفر وحدودها كالتالي $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{4}, 0, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{-\sqrt{3}}{10}, 0, ...\right\}$

فإذا اخترنا n الزوجية نحصل على المتتالية الجزئية $a_{n_k} = a_{2k} = \left\{\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, 0, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{20}, ...\right\}$ وهي متقاربة من الصفر.

وإذا اخترنا n الفردية نحصل على المتتالية الجزئية $a_{n_k} = a_{2k+1} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{3}}{10}, \frac{\sqrt{3}}{14}, 0, \ldots\right\}$ وهي متقاربة أيضاً من الصفر.

مثال11:

المتتالية $a_n = (-1)^n$ متباعدة وحدودها هي $-1,1,-1,1,-1,1,\ldots$

فإذا اخترنا n الزوجية نحصل على المتتالية الجزئية $a_{n_k} = a_{2k} = 1,1,1,1,1,\ldots$ وهي متقاربة من العدد 1

أما إذا اخترنا n الفردية نحصل على المتتالية الجزئية $a_{n_k} = a_{2k+1} = -1,-1,-1,\ldots$ وهي متقاربة من -1

لاحظ أنه إذا كان لمتتالية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ أكثر من متتالية جزئية تتقارب إلى أعداد حقيقية مختلفة فلابد أن تكون المتتالية نفسها متباعدة والمثال السابق يوضح ذلك.

مبرهنة5-1-7:

إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة فإن كل متتالية جزئية من المتتالية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون كذلك محدودة.

مبرهنة5-1-8:

إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة فلابد أن يكون لها متتالية جزئية متقاربة.

تعريف5-1-8:

المتتالية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الأعداد الحقيقية تسمى متتالية كوشي إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ هناك عدد طبيعي N حيث أن $|a_n - a_m| < \varepsilon$ لكل $n, m \geq N$

لاحظ أن كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي ولكن العكس غير صحيح بصفة عامة رغم أن هذا العكس يظل صحيحاً في حالة متتاليات الأعداد الحقيقة.

لاحظ أنه لأجل البرهان على تقارب متتالية ما باستخدام التعريف مباشرة (تعريف التقارب) لابد وأن يكون لدينا علم مسبق بنقطة التقارب أو على الأقل لابد أن نستطيع أن نخمن هذه النقطة ولكن في بعض الأحيان يكون العلم بنقطة التقارب أو التخمين بماهية هذه النقطة صعب جداً إن لم يكن مستحيلاً وبناء على هذا تكمن أهمية مفهوم متتالية كوشي.

مبرهنة5-1-9:

كل متتالية متقاربة من الأعداد الحقيقية تكون متتالية كوشي.

البرهان

لتكن a_n متتالية متقاربة ونفرض أن $a_n \to l$

$\therefore$ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن: $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > N$

وعليه لكل $n, m > N$ فإن $|a_m - a_n| = |a_m - l + l - a_n| \le |a_m - l| + |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

خواص أخرى لمتتاليات الأعداد الحقيقة

1- إذا كان $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتان متقاربتان إلى x ، y على الترتيب وكان λ عدد حقيقي فإن:

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$

b) $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda x$

c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ بشرط أن $y \neq 0$

5-2 متتاليات الدوال

ليكن $A \subseteq \Re$ فإذا كان لكل n هناك دالة $f_n : A \to \Re$ فإن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تسمى متتالية دوال على A .

قد يكون النطاق مجموعة جزئية من $\Re^n$ والمدى أيضاً مجموعة جزئية من $\Re^n$ أو $\Re^n$ كله.

لاحظ أنه لكل $x \in A$ تكون المتتالية $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية.

إذا كان تقارب المتتالية $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ يعتمد على النقطة x إلى دالة f نطاقها A فإن هذا التقارب يسمى تقارب نقطي.

المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى دالة f على A إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى $f(x)$، هذا يعني أنه لكل $\varepsilon > 0$ هناك $N(\varepsilon, x)$ (N تعتمد على ε، وعلى x) حيث أن $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ لكل $n \ge N(\varepsilon, x)$

هناك تقارب آخر لمتتاليات الدوال أقوى من التقارب النقطي يسمى التقارب المنتظم وذلك لمعالجة عيوب التقارب النقطي ومن أهمها قد تكون هناك متتالية من الدوال المتصلة (المستمرة) ولكنها متقاربة إلى

دالة غير متصلة والمثال على ذلك المتتالية $f_n(x)=x^n$ حيث $x\in[0,1]$ متقاربة إلى الدالة $f(x)=\begin{cases}1 & ,x=1\\ 0 & ,x\neq 1\end{cases}$ وهي دالة غير متصلة.

متتالية الدوال $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام على المجموعة A إلى الدالة f إذا كان لكل $\varepsilon>0$ هناك عدد طبيعي N يعتمد فقط على ε حيث أن $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ لكل $n>N$ ولكل $x\in A$.

إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ من الدوال المتصلة ومتقاربة بانتظام إلى الدالة f لابد أن تكون متصلة على A .

لاحظ أن القابلية لتكامل ريمان وتغيير إشارة التكامل بإشارة النهاية تعتمد على التقارب المنتظم.

إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ من الدوال القابلة للتكامل على $[a,b]$ وإذا كانت $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام إلى الدالة f على $[a,b]$ فإن f تكون قابلة للتكامل على $[a,b]$، و

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

التقارب المنتظم للدوال القابلة للاشتقاق على (a,b) لا يضمن تغيير إشارة الاشتقاق بالنهاية ولا يضمن كون النهاية لذلك قابلة للاشتقاق ولكن: إذا كانت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الدوال القابلة للاشتقاق على (a,b) وكانت متتالية المشتقات $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام إلى دالة g على (a,b) فإن $f'=g$ وبمعنى آخر $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{d}{dx}f_n(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to n}f_n(x)\right]$

تمرين

1- برهن أن المتتالية $f_n(x)=|x|^n$ لكل n في $\aleph$ ولكل $x\in(-1,1)$ متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)=0$

2- برهن أن المتتالية المذكورة في المسألة السابقة تتقارب بانتظام إلى الدالة $f(x)=0$

3- برهن أن المتتالية $f_n(x)=\dfrac{x^2+nx}{n}$ تتقارب نقطياً إلى الدالة $f(x)=x$ لكل $x\in[0,1]$، لكل $n\geq 1$ وهل من الممكن أن يكون هذا التقارب منتظماً أيضاً؟

4- برهن أن المتتالية $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin(nx)$ تتقارب بانتظام إلى الدالة $f(x)=0$ لكل $n\in\aleph$، لكل $x\in\Re$

ملاحظة: سيتم دراسة متتاليات الدوال بتفصيل أكثر في مادة التحليل الحقيقي.

5-3 المتسلسلات اللانهائية

بعد أن تعرفنا على مفهوم المتتاليات ستتعرف على مفهوم آخر ذي علاقة وثيقة جداً مع مفهوم المتتالية وهو مفهوم المتسلسلة اللانهائية.

نكتب أحياناً مقداراً من النوع $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$

ونعني بهذا أننا نريد أن نجمع الحدود مع بعضها واحداً تلو الآخر أي أننا نكون (المجاميع الجزئية) التالية: $\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},...$

لنحصل على متتالية نطلق على نقطة تقارب هذه المتتالية إن كانت متقاربة اسم مجموع المتسلسلة اللانهائية ،في هذا المثال المجاميع الجزئية هي $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},....$

ومن الواضح أن هذه المتتالية متقاربة من 1 ولهذا فإن مجموع المتسلسلة اللانهائية $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$ يساوي 1

وبصورة عامة إذا كتبنا المتسلسلة اللانهائية $a_1+a_2+a_3+....$ بالصورة المختصرة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ فمن المتوقع أن نحسب أولاً a_1+a_2 ثم $a_1+a_2+a_3$ وهكذا..

ونطلق على نقطة تقارب المتتالية الناتجة إن كانت متقاربة اسم مجموع المتسلسلة اللانهائية.

لاحظ أن $1-1+1-1+....$ ، $(-1)+(1-1)+(1-1)+....$

تمثلان متسلسلتين لانهائيتين مختلفتين حيث متتالية المجامع الجزئية للمتسلسلة الأولى هي 1,0,1,0,.... وهي متباعدة بينما متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الثانية هي 0,0,0,0,..... وهي متقاربة من الصفر.

أي أن المتسلسلة الأولى ليس لها مجموع بينما مجموع المتسلسلة الثانية يساوي صفر وهذا المثال يوضح أن خاصية التنسيق لا تصح عند التعامل مع عدد غير منته من الحدود.

تعريف 5-3-1

المتسلسلة اللانهائية من الأعداد الحقيقية $\sum_{n}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$ هي عبارة عن المتتالية الحقيقية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $S_1 = a_1$ ، $S_2 = a_1 + a_2$ ، ..... ، $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ونقول أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا كانت المتتالية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وفي هذا الحالة إذا كانت $S_n \to S$ فنقول أن S يمثل مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ونكتب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

وإذا كانت المتتالية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ غير متقاربة فتقول أن المتسلسلة $\sum a_n$ غير متقاربة (أو متباعدة أو لـيس لها مجموع) أي أن مجموع المتسلسلة اللانهائية هو: $S = \lim_{n\to\infty} S_n$

مبرهنة 5-3-1

المتسلسلة الهندسية $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ar^n + ...$ حيث $a \neq 0$ تكون متقاربـة ولهـا المجموع $\frac{a}{1-r}$ إذا كان $|r| < 1$ ومتباعدة إذا كان $|r| \geq 1$

البرهان

إذا كان $r = 1$ فإن المجموع الجزئي $S_n = a + a + ... + a = na$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$ أي أن المتسلسلة متباعدة

إذا كان $r \neq 1$ نعتبر المجموع الجزئي

$$S_n + a + ar + ar^2 + ... + ar^n \quad .... \quad (1)$$

وبضرب المعادلة (1) في r نجد أن:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n+1} \quad .... \quad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على $S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$ أي أن $S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r}\right)$$

فإذا كان $|r| < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ وإذا كان $|r| > 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

مثال1:

استخدام طريقة المجاميع الجزئية لبحث تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

الحل

$$s_1=\frac{1}{2}\ \ ,\ s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$
$$s_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}\ \ ,\ s_4=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}\Rightarrow s_n=\frac{n}{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

∴المتسلسلة متقاربة

مثال2:

بين أي من المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة ثم أوجد المجموع في حالة التقارب

$$2+4+6+8+.....$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.......$$
$$3+\frac{9}{2}+\frac{27}{4}+.......$$

الحل

$2+4+6+8+......$ هي متسلسلة حسابية أساسها 2

وهي متباعدة لأن $\lim_{n\to}=\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=\infty$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$ متسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}$

أي أن $|r|<1$ وحدها الأول 1 وبذلك تكون متقاربة ومجموعها $\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$$3+3\left(\frac{3}{2}\right)+3\left(\frac{3}{2}\right)^2+......=3+\frac{9}{2}+\frac{27}{4}+.......$$

متسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{3}{2}$ وحيث أن $|r|>1$ فإن المتسلسلة متباعدة

اختبارات أخرى للتقارب

سنتناول بعض المبرهنات المستخدمة في اختبار تقارب أو تباعد المتسلسلات اللانهائية التي يصعب اختبارها عن طريق متتابعة المجاميع الجزئية.

1- اختبار الحد العام

وهو شرط ضروري ولكن غير كاف لتقارب متسلسلة لانهائية

مبرهنة5-3-2

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$ متقاربة فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

البرهان

بما أن المتسلسلة متقاربة فإنه يوجد لها مجموع جزئي وليكن s

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن:

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{a}_\mathrm{n}$$

$$s - s = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} a_n$$

ملاحظة:

عكس المبرهنة غير صحيح أي أنه إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فليس من الضروري أن تكون المتسلسلة متقاربة.

نتيجة:

إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة.

مثال3:

أثبت أن المتسلسلة $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{7} + \ldots. + \ldots\ldots$ متباعدة

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 1$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ متباعدة

مبرهنة 5-3-3

إذا كان كلاً من $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ متسلسلة متقاربة ولها المجموع A ، B على الترتيب فإن:

1) المتسلسلة $\sum(a_n+b_n)$ متقاربة ولها المجموع $A+B$

2) إذا كان C عدد حقيقي فإن المتسلسلة $\sum Ca_n$ متقاربة ولها المجموع CA

3) المتسلسلة $\sum(a_n-b_n)$ متقاربة ولها المجموع $A-B$

مثال4:

بين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ متقاربة وأوجد مجموعها

الحل

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+......$$

$$\therefore\quad s_n=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

وكذلك $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ هي متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ أي أن $|r|<1$ وبالتالي فإن المتسلسلة متقاربة

ومجموعها يساوي $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

وحسب المبرهنة السابقة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ متقاربة ومجموعها يساوي $1+2=3$

2) اختبار التكامل:

مبرهنة 5-3-4

إذا كانت $f(x)$ دالة غير سالبة وتناقصية لكل $x \geq 1$ وإذا كان $a_n = f(n)$ لكل $n \geq 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون:

(i) متقاربة إذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متقارب.

(ii) متباعدة إذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متباعد.

مثال5:

هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة أم متباعدة؟

الحل:

نلاحظ أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ تناقصية ومستمرة وموجبة على الفترة $[1,\infty)$

وبما أن $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} (\ln x|_1^t) = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

مثال6:

هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة أم متباعدة؟

الحل:

نلاحظ أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ تناقصية ومستمرة وموجبة على الفترة $[1,\infty)$

وبما أن $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to\infty} (\frac{-1}{x}\Big|_1^t) = \lim_{t\to\infty} (\frac{-1}{t} + 1) = 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

3) اختبار متسلسلة P

مبرهنة5-3-5

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...+\frac{1}{n^p}+...$ تسمى متسلسلة P وتكون متقاربة إذا كان $p>1$ وتكون متباعدة إذا كان $p\le 1$

البرهان:

يترك تمرين للطالب (إرشاد: استخدم اختبار التكامل)

مثال7:

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ متقاربة لأن $p=3>1$

مثال8:

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة لأن $p=\frac{1}{2}<1$

4. اختبار المقارنة Comparison test

مبرهنة5-3-6

بفرض أن $a_n\ge 0$

i) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلة متقاربة ، $a_n\le b_n$ لكل n فإن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة أيضاً، و

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\le\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

ii) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلة متباعدة حدودها غير سالبة، و $a_n\ge b_n$ لكل قيم n فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة أيضاً.

البرهان

نفرض أن $S_n=a_1+a_2+....+a_n$ ، $S_n^*=b_1+b_2+....+b_n$ حيث S_n^* ، S_n متتاليتان غير متناقصتان.

في الحالة (i) نفرض أن S نهاية المتتالية S_n، وبما أن $S_n\le S_n^*\le S$ لكل قيم n فإن S_n متقاربة.

وفي الحالة (ii) نجد أن $S_n^*\to\infty$ ، $S_n\ge S_n^*$ لكل قيم n وبالتالي فإن $S_n\to\infty$

مثال9:

بين ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+3^n}$ متقاربة أو متباعدة.

الحل:

بما أن $1+3^n > 3^n\ ,\forall n\geq 1$ فإن $\frac{1}{1+3^n}<\frac{1}{3^n}\ ,\forall n\geq 1$

وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ فإنها متقاربة لأن $\left|\frac{1}{3}\right|<1$

وبالتالي باستخدام اختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+3^n}$ متقاربة.

5) اختبار المقارنة بالنهاية Limit comparison test

مبرهنة5-3-7

إذا كان كل من $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلة حدودها موجبة وكان $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l>0$ فإنه إذا كانت إحدى المتسلسلتين متقاربة تكون المتسلسلة الأخرى متقاربة أيضاً و إذا كانت إحدى المتسلسلتين متباعدة تكون المتسلسلة الأخرى متباعدة أيضاً.

البرهان:

بما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l>0$ فإنه يوجد عدد صحيح N بحيث $\frac{l}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3l}{2}$ لكل $n\geq N$ ولذلك $a_n<\frac{3l}{2}b_n$ ، $a_n>\frac{l}{2}b_n$ لكل $n\geq N$ ومن هاتين المتباينتين واختبار المقارنة نستنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربة وكذلك نستنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعدة.

مثال10:

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+7}$ من حيث التقارب والتباعد

الحل:

نعتبر أن $b_n=\frac{1}{3n+7}\ ,\ a_n=\frac{1}{n}$

(لاحظ أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة لأنها متسلسلة p وهنا $p=1$)

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{n}=3>0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+7}$ متباعدة.

مثال11:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+n}$

الحل:

نعتبر أن $b_n=\frac{1}{n^2}\ ,\ a_n=\frac{5}{n^2+n}$

(لاحظ أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة لأنها متسلسلة p وهنا $p=2>1$)

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2+n}.n^2=5>0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+n}$ متقاربةً.

المتسلسلات المتناوبة Alternating Series

تعريف 5-3-2

المتسلسلة التي حدودها تتناوب الإشارة الموجبة والسالبة تسمى متسلسلة متناوبة ويعبر عنها بالصورة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=-a_1+a_2-a_3+....\quad \text{أو}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-....$$

حيث $a_n>0$ لكل n

6) اختبار المتسلسلة المتناوبة Alternating Series test

مبرهنة5-3-8

إذا كان $a_n\geq a_{n+1}>0$ لكل n، و$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ فإن المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ تكون متقاربة.

البرهان:

نعتبر المجموع الجزئي للحدود الزوجية $S_2,S_4,S_6,...$ حيث

$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+...+(a_{2n-1}-a_{2n})$، و $a_n-a_{n\ 1}\geq 0$ لكل n أي أن:

$$0\leq S_2\leq S_4\leq ...\leq S_{2n}\leq ...$$

لاحظ أن المجموع الجزئي S_{2n} يمكن أن يكتب على الصورة التالية:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

وبذلك $S_{2n} \le a_1$ لكل عدد صحيح موجب n وعليه فإن $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = s \le a_1$

لاحظ أن $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ فإن $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = s \le a_1$ ولذلك فإن:

$\lim_{n\to\infty} S_n = s \le a_1$ أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ متقاربة.

مثال12:

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ من حيث التقارب والتباعد

الحل:

واضح أن $a_n \ge a_{n+1} > 0$ لكل n وكذلك $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

إذاً المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ متقاربة.

مثال13:

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n^2 - 3}$ من حيث التقارب والتباعد

الحل:

أولاً: لإثبات أن $a_n \ge a_{n+1}$ نشتق الدالة $f(x) = \frac{2x}{4x^2 - 3}$ لتحديد ما إذا كانت تناقصية أم لا لكل $x \ge 1$

$$f'(x) = \frac{(4x^2 - 3)(2) - (2x)(8x)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{-(8x^2 + 6)}{(4x^2 - 3)^2} < 0$$

إذاً f دالة تناقصية وبهذا يكون $a_n \ge a_{n+1}$ لكل n

ثانياً: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n^2 - 3} = 0$

إذاً المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n^2 - 3}$ متقاربة.

ملاحظة:

لإثبات أن $a_n \ge a_{n+1}$ لكل n يجب أن نبين تحقق إحدى الحالات التالية:

(i) $f'(n) < 0$ (ii) $a_n - a_{n+1} \ge 0$ (iii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$

5) التقارب المطلق Absolute Convergence

تعريف 5-3-3

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة مطلقاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ متقاربة.

مبرهنة 5-3-9

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً فإنها تكون متقاربة.

البرهان:

من خواص القيمة المطلقة نعلم أن $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ لكل n

إذاً $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$ لكل n

وباستخدام اختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ متقاربة لأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ متقاربة.

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

تعريف 5-3-4

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة شرطاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة

مثال14:

ناقش تقارب المتسلسلة $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$

الحل:

متسلسلة الحدود المطلقة هي $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ وهي متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ حيث $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ ولذلك تكون المتسلسلة المعطاة متقاربة أيضاً.

مثال15:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

الحل:

هذه المتسلسلة متناوبة وهي متقاربة حسب اختبار المتسلسلة المتناوبة ولكن متسلسلة الحدود المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|$ متباعدة كما وضحنا في مثال سابق ولذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ متقاربة شرطاً.

6) اختبار النسبة: Ratio test

مبرهنة5-3-10

إذا كان حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ كلها لا تساوي أصفار فإن:

(i) إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l<1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة.

(ii) إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l>1$ أو $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متباعدة

(iii) إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ يفشل هذا الاختبار في تحديد التقارب أو التباعد للمتسلسلة

البرهان:

(i) نفرض أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l<1$

إذا كان r أي عدد حيث $0\le l<r<1$ فإنه يوجد عدد صحيح N حيث $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<r$ لكل $n\ge N$

وهذا يضمن أن $|a_{N+1}|<|a_N|.r$ وبالتالي:

$$|a_{N+2}|<|a_{N+1}|.r<|a_N|.r^2 \quad ، \quad |a_{N+3}|<|a_{N+2}|.r<|a_N|.r^3$$

وبصفة عامة $|a_{N+m}|<|a_N|.r^m$ حيث $m>0$

وبمقارنة المتسلسلة $|a_{N+1}|+|a_{N+2}|+\ldots+|a_{N+m}|+\ldots$ مع المتسلسلة الهندسية المتقاربة $|a_N|.r+|a_N|.r^2+\ldots+|a_N|.r^n+\ldots$ نستنتج أنها متقاربة أيضاً.

وبما أن إهمال عدد نهائي من الحدود لا يؤثر على تقارب أو تباعد المتسلسلة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة مطلقاً.

(ii) نفرض أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1$

إذا كان r عدداً حيث $1<r<l$ فإنه يوجد عدد صحيح N حيث $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1$ لكل $n \geq N$ وهذا يضمن أن $|a_{n+1}| > |a_n|$ عندما $n \geq N$ ولذلك $\lim_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$ وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}a_n \neq 0$ وهذا يعني أن المتسلسلة متباعدة.

وبنفس الطريقة نبرهن أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ فإن المتسلسلة متباعدة

(iii) اختبار النسبة لا يعطي أي معلومات مفيدة إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ كما في المتسلسلات التالية:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ نجد أن: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ بينما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ متقاربة مطلقاً والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ متقاربة شرطاً والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة.

مثال16:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{5^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5n^2}{n^2+2n+1}\right| = 5 > 1$$

أي أن المتسلسلة متباعدة.

مثال17:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

إذاً المتسلسلة متقاربة.

7) اختبار الجذر: Root test

مبرهنة 5-3-11

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة لا نهائية فإن:

(i) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ii) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة

(iii) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ يفشل هذا الاختبار في تحديد التقارب أو التباعد للمتسلسلة.

البرهان:

يترك تمرين للطالب

مثال18:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2 > 1$$

أي أن المتسلسلة متباعدة.

مثال19:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{2n+1}}{n^n}$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{6^{2n+1}}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{6^{2+\frac{1}{n}}}{n} = 0 < 1$$

أي أن المتسلسلة متقاربة.

8)

مبرهنة 5-3-12

إذا كان $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = l$ فإن:

(i) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا كان $p>1$، و l عدد حقيقي.

(ii) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة إذا كان $p\le 1$، و $l\neq 0$ (قد يكون $l=\infty$)

مثال20:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3-1}$

الحل:

بما أن $\lim_{n\to\infty} n^2\frac{n}{n^3-1}=1$ ، و $p=2>1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال21:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

الحل:

بما أن $\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n}=1$ ، و $p=1$ ، $l=1\neq 0$ فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال22:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

الحل:

بما أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=1$ ، و $p=\frac{1}{2}<1$ ، $l=1\neq 0$ فإن المتسلسلة متباعدة.

9) اختبار راب:

مبرهنة5-3-13

إذا كان $a_n > 0$ وكان $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$ فإن:

(i) عندما يكون $l > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة.

(ii) عندما يكون $l < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة.

(iii) عندما يكون $l = 1$ يفشل هذا الاختبار في تحديد التقارب أو التباعد للمتسلسلة.

مثال23:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

الحل:

بما أن $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{n}{n+1} . \frac{n+2}{n+1} - 1) = 0 < 1$ فإن المتسلسلة متباعدة.

الخلاصــــــــــة*:

عند دراسة المتسلسلات اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يمكن إتباع الخطوات التالية لتحديد التقارب أو التباعد:

أولاً: إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فإن المتسلسلة متباعدة.

ثانياً: إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فاتبع الخطوات التالية:

(أ) إذا كان حدود المتسلسلة موجبة فاستخدم أحد الاختبارات التالية:

1.اختبار المقارنة 2. اختبار المقارنة بالنهاية 3. اختبار التكامل 4. اختبار النسبة

5. اختبار الجذر 6. اختبار راب

ملاحظات:

(i) عند استخدام الاختبار رقم 1 أو 2 قارن بمتسلسلة هندسية أو متسلسلة P

(ii) استخدم الاختبار رقم 3 عندما تكون الدالة $f(n) = a_n$ تناقصية وسهلة التكامل.

* التفاضل والتكامل – د.رمضان محمد جهيمة ،د.أحمد عبدالعال هب الريح – ط3 - دار

(iii) استخدم الاختبار رقم 4 أو رقم 5 أو رقم 6 إذا وجد مضروب أو أس في الحد العام.

(iv) استخدم اختبار راب عندما يفشل اختبار النسبة.

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متناوبة فاتبع ما يلي:

استخدم اختبار المتسلسلة المتناوبة أو طبق أحد الاختبارات المذكورة في الفقرة (أ) على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ فإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة أيضاً.

(ج) إذا كان حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ غير موجبة وغير متناوبة فطبق أحد الاختبارات المذكورة في الفقرة (أ) على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

4-5 المتسلسلات اللانهائية للدوال Infinite series of functions

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ حيث كل من $f_n(x)$ دالة معرفة على مجموعة D هي عبارة عن متتالية من الدوال $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث لكل $x \in D$ يكون:

$$S_1(x) = f_1(x)$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
..
..
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

ونقول أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة إذا كانت المتتالية $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة.

متسلسلات القوى Power series

تعريف 5-4-1

متسلسلة القوى هي متسلسلة على الصورة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ حيث a عدد حقيقي ثابت والمعاملات a_n أعداداً لا تعتمد على x

سنكتفي هنا بدراسة متسلسلات القوى من النوع $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ أي أن $a = 0$ في المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

مبرهنة 5-4-1

إذا كان $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ فإن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تكون:

(i) متقاربة تقارباً مطلقاً عندما $|x| < R$

(ii) متباعدة عندما $|x| > R$

(iii) متقاربة أو قد تكون متباعدة عندما $|x| = R$

R يسمى بنصف قطر التقارب للمتسلسلة.

مثال1:

ناقش تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n$

الحل:

$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$ وبالتالي فإن $R=2$ وهذا يعني أن المتسلسلة متقاربة لكل قيم x التي تحقق $-2<x<2$

وإذا كانت $x=2$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1)^n$ تكون متباعدة وإذا كانت $x=-2$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ تكون متباعدة أيضاً.

إذاً فترة التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n$ هي $(-2,2)$ وتكون المتسلسلة متباعدة في الفترة $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

مثال2:

استخدم اختبار النسبة لإيجاد فترة تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$

الحل:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{3}\right|=\left|\frac{x}{3}\right|$ وبذلك تكون المتسلسلة متقاربة عندما $\left|\frac{x}{3}\right|<1$ أي أن $|x|<3$ أي أن $-3<x<3$

وتكون متباعدة عندما $\left|\frac{x}{3}\right|>1$ أي أن $|x|>3$ أي أن $x<-3$ أو $x>3$

وفي حالة $|x|=3$ نجد أنه عندما $x=3$ فإن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}1^n=\infty$ أي أنها متباعدة وفي حالة $x=-3$ فإن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ وهذه المتسلسلة متباعدة أيضاً.

إذاً المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ تكون متقاربة على الفترة $(-3,3)$

مثال3:

أوجد نصف تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

الحل:

بما أن المتسلسلة هندسية حدها العام x^n فإنها تكون متقاربة عندما $|x|<1$ ومتباعدة عندما $|x|\geq 1$

وبذلك نصف قطر تقاربها هو 1

طريقة أخرى للحل:

$\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(1)=1$ وبالتالي فإن $R=1$ وهذا يعني أن نصف قطر التقارب يساوي 1