طالما أنه تم تعريف مجموعة الأعداد المركبة بالشكل

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

وتم تعريف عملية الضرب على $\mathbb{C}$ بالشكل:

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

فنجد بناء على هذا التعريف أنه:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$
$$= (x, 0) + (y, 0)\cdot(0, 1)$$

وبما أن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

والمجموعة $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

متشاكلتان تقابلياً (أي ايزومورفيتان)

إذاً يمكن كتابة $(x, 0) = x$

وعندئذٍ يعبر عن العدد المركب بالشكل:

$$(x, y) = x + y\cdot(0, 1)$$

وهنا يبرز دور تعريف الوحدة التخيلية i

حيث نرمز للعنصر $(0, 1)$ بالرمز i وعندها

نضع $(x, y) = x + iy$

وطالما كان $(0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0) = -1$

$\therefore \quad i \cdot i = -1 \qquad \therefore \quad i^2 = -1$

ومن هنا يبدأ البعض بالقول:

مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ هي المجموعة

التي عناصرها من الشكل: $Z = x + iy$

حيث $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$

حيث i تسمى الوحدة التخيلية.

الدرس الاول

تعريف :

إن أي عدد على الصورة $x+iy$ حيث $x,y\in\mathbb{R}$ يعتبر عددا مركبا complex number

ويعرف العدد المركب بأنه زوج مرتب من الأعداد الحقيقة ، أي أن كل عدد على الصورة (x,y) حيث $x,y\in\mathbb{R}$ هو عدد مركب .

إذاً ينشأ لدينا مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ وتكتب في الصورة :

$$\mathbb{C}=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$$

تساوي عددين مركبين :

إذا كان

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

فهذا يكافئ

$$x_1=x_2 \quad , \quad y_1=y_2$$

جمع عددين مركبين :

$$(x_1,y_1)\pm(x_2,y_2)=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$$

ضرب عددين مركبين :

$$(x_1,y_1).(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)$$

ملاحظات :

1-الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تعتبر مجموعة جزئية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ وذلك لأن أي عدد مركب(x,y) يمكن إعتباره عدد حقيقي عندما تكون $y=0$ ويكون $x=(x,0)$.

2-العنصر المحايد الجمعي بالنسبة للمجموعة $\mathbb{C}$ هو$(0,0)=0$
والعنصر المحايد الضربي بالنسبة للمجموعة $\mathbb{C}$
هو$(1,0)=1$

3-المعكوس الجمعي للعدد المركب (x,y) هو$(-x,-y)= (x,y)-$

4-المعكوس الضربي للعدد المركب(x,y) يرمز له بالرمز $(x,y)^{-1}$ ويعطى من العلاقة :

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} , \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

توضيح لكيفية إستنتاج هذه العلاقة :

$$(x,y)(x,y)^{-1} = (1,0)$$

ولتعيين$(x,y)^{-1}$
نفرض أن

$$(x_1,y_1) = (x,y)^{-1}$$

$$\therefore (x,y)(x_1,y_1) = (1,0) \quad , \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$(xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1) = (1,0).$$

من التساوي نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} xx_1 - yy_1 &= 1 \\ xy_1 + yx_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

وبحل المعادلتين نحصل على :

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \; , \; \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

5- نلاحظ أن i يمكن التعبير عنها كعدد مركب في الصورة $i = (0,1)$ وعليه فإن :

$$i^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1 = \left(\sqrt{-1}\right)^2$$

6- شكل العدد المركب (x,y) في الصورة $x+iy$ نحصل عليه كالآتي :

من المساواة

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x,0)+(0,y) \\ &= (x,0)+(0,1)\,(y,0) \\ &= x+iy \end{aligned}$$

7- في أي عدد مركب $z= x+iy$ يسمى x الجزء الحقيقي (Real part)ويكتب $x=Re.z$

كما يسمى y الجزء التخيلي (Imaginary part) ويكتب $y=Im.z$.

تنويه : لاحظ ان كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب هو عدد حقيقي.

انعدام خاصية الترتيب في $\mathbb{C}$:

Non ordered property

لا توجد علاقة ترتيب معرفة على الاعداد المركبة .فلا يمكن لنا ان نقول أن z_1 (عدد مركب) اكبر من او اصغر من z_2 (عدد مركب آخر).

نوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال:

بأخذ عددين مركبين

$$z_1 = i = (0,1) \quad , \quad z_2 = (0,0)$$

نفرض العكس أنه توجد علاقة ترتيب على الاعداد المركبة .

وبما أن $z_1 \neq z_2$

فإن

$$z_1 > z_2 \quad \text{أو} \quad z_2 > z_1$$

وعليه إما أن يكون

$$(0,0) > (0,1) \quad \text{أو} \quad (0,1) > (0,0)$$

نفرض أن :

$$(0,1) > (0,0) \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

بضرب الطرفين في$(0,1)$ نجد أن :

$$(0,1)(0,1) > (0,1)(0,0)$$
$$(-1,0) > (0,0) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

بإضافة $(1,0)$ لطرفي (2) نجد أن :

$$(1,0)+(-1,0) > (1,0)+(0,0)$$
$$(0,0) > (1,0) \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

بضرب طرفي (2) في $(-1,0)$ نجد :

$$(-1,0)(-1,0) > (0,0)(-1,0)$$
$$(1,0) > (0,0) \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

من (3) و(4) نلاحظ أن $(0,0) = (1,0)$ وهذا تناقض .

بالمثل إذا فرضنا أن

$$(0,0) > (0,1)$$

بضرب الطرفين في $(0,1)$ نجد أن

$$(0,0) > (-1,0) \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

بإضافة $(1,0)$ لطرفي (5) نجد أن :

$$(1,0) > (0,0) \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

بضرب طرفي (5) في $(-1,0)$ نجد :

$$(0,0) > (1,0) \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

من (6) و(7) ينتج أن $(1,0) = (0,0)$ وهذا تناقض. أي أن عكس الفرض صحيح .

الأعداد المرافقة:

Conjugates numbers

للعدد المركب $z=(x,y)$ نعرف العدد المرافق $\bar{z}$ له بأنه العدد $(x,-y)$.

خواص الأعداد المرافقة :

1- التساوي:

$$\bar{\bar{z}} = z$$

٢ للجمع:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

وذلك لأنه إذا كان :

$$z_1 = (x_1, y_1) \quad , \quad z_2 = (x_2, y_2)$$

$$\therefore \quad z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = ((x_1 \pm x_2), -(y_1 \pm y_2))$$

$$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = ((x_1, -y_1) \pm (x_2, -y_2))$$

ومن ذلك ينتج المطلوب .

3- الضرب:

$$\overline{z_1 \ . \ z_2} = \bar{z}_1 \ . \ \bar{z}_2$$

وبالإمكان التحقق من ذلك من تعريف الضرب لعددين مركبين

$$\therefore\ z_1.z_2=(x_1,y_1).(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2\ ,\ x_1y_2+x_2y_1).$$

$$\overline{z_1\ .\ z_2}=(x_1x_2-y_1y_2\ ,\ -(x_1y_2+x_2y_1)).$$

$$\begin{aligned}\bar{z}_1.\bar{z}_2&=(x_1,-y_1).(x_2,-y_2)\\&=(x_1x_2-y_1y_2\ ,\ -x_1y_2-x_2y_1)\end{aligned}$$

ومن ذلك ينتج المطلوب .

4- القسمه :

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

ويمكن التحقق من ذلك كالآتي :

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{(x_1,y_1)}{(x_2,y_2)}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)}$$

$$\therefore\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{(x_1,-y_1)}{(x_2,-y_2)}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

ومن هنا ينتج المطلوب.

حاصل ضرب عدد حقيقي في عدد مركب :

ليكن λ عدد حقيقي ،أي يمكننا كتابته على الصوره $\lambda=(\lambda,0)$
،وليكن $z=(x,y)$ عدد مركب

$$\therefore \lambda z=(\lambda,0)(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$$

أي أن ضرب عدد حقيقي في عدد مركب معناه ببساطة ضرب شقيه في هذا العدد الحقيقي.

مقياس العدد المركب (القيمة المطلقة للعدد المركب) :

Modulus (Absolute value of the complex number)

يعرف مقياس العدد المركب $|z|=|(x,y)|$ بأنه العدد الحقيقي غير السالب الذي يحقق :

$$|z|^2=z\bar{z}=x^2+y^2 \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2} \quad \geq 0$$

ملاحظات:

١ ـ نلاحظ أنه عندما يكون العدد z حقيقيا
(أي شقه التخيلي = صفر) فإن هذا التعريف
ينطبق مع تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي $|x|=\sqrt{x^2}$.

-ومن الصيغة السابقة نجد أن

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

وعندما $z \neq 0$ نحصل على

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

ومن هنا نستنتج وسيله مفيده لإجراء عملية القسمة $\frac{z_1}{z_2}$ حيث

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \quad , \; z_2 \neq 0$$

خواص المقياس :

$$(1) \quad |z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = (0,0)$$

$$(2) \quad |z| = |\bar{z}|$$

$$(3) \quad |z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$$

$$(4) \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$(5) \quad \mathrm{Re}.z \leq |z| \quad , \quad \mathrm{Im}.z \leq |z|$$

$$(6) \quad |z_1 + z_2| \leq \; |z_1| + |z_2|$$

$$(7) \quad |z_1 + z_2| \geq \; \big||z_1| - |z_2|\big|$$

$$(8) \quad |z_1 - z_2| \geq \; \big||z_1| - |z_2|\big|$$

ملاحظه:

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = x = \mathrm{Re}.z \quad , \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = y = \mathrm{Im}.z$$

التمارين : اثبات خواص المقياس السابقة الذكر

الدرس الثاني

التمثيل الهندسي للعدد المركب:

Geometrical representation of the complex number

من المعلوم أن الأعداد الحقيقية تمثل هندسيا بنقط على المستقيم وعليه فإنه من الطبيعي أن تمثل الأعداد المركبة بنقط في المستوى ، وبالتحديد سنختار المحورين المتعامدين OX, OY .

ليكن r بعد النقطة P عن O و θ الزاوية التي يصنعها المتجه $\overline{OP}$ مع الإتجاه الموجب لمحور OX .

(اعتذر عن تقصيري في التوضيح بالرسم)

فمن الواضح ان المتجه $\overline{OP}$ هو ممثل للعدد المركب x+iy . كذلك من هندسة الشكل نجد أن :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

أي أن $|z|$ يمثل هندسيا ببعد النقطة P الممثلة للعدد المركب z=(x,y) عن O ، الزاوية θ تتعين من :

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad (z \neq (0,0))$$

أو تتعين من العلاقة :

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

سعة العدد المركب :

Argument of the complex number

الزاوية θ التي يصنعها المتجه الممثل للعدد المركب z مع الاتجاه الموجب للمحور الحقيقي الموجب تسمى سعة العدد z

(Argument of z) ويرمز لها بالرمز arg.z إذا $\theta \equiv \arg .z$

وبالتالي رأينا أن :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

الآن θ لها قيم متعددة فنلاحظ أن $\theta \pm 2k\pi$ هي ايضا arg.z (حيث k عدد صحيح موجب) وذلك لأن :

$$\cos\theta = \cos(\theta \pm 2k\pi) \quad , \quad \sin\theta = \sin(\theta \pm 2k\pi) \; .$$

$$\tan\theta = \tan(\theta \pm 2k\pi) \; .$$

السعة الرئيسية :

Principal argument

سوف نأخذ القيمة الرئيسية (الأساسية) من arg.z لأن تكون القيمة الواقعة بين $\pi,-\pi$ حيث $-\pi < \text{Principal} \arg .z \le \pi$ وسوف نكتب إختصارا

$$\text{Principal} \arg .z = \text{Parg} .z$$

ملاحظه :

من الممكن أن تكون السعة الرئيسية محصورة في فتره أخرى ولتكن $[0,2\pi)$ أي يكون : $0 < \text{Parg} .z \le 2\pi$.

وهذا يتفق مع كون

$$-\pi < \text{Parg} .z \le \pi$$

مثال توضيحي :

$$0< \text{Parg}.(2,-2)=315 \leq 2\pi$$ أو $$-\pi< \text{Parg}.(2,-2)=-45 \leq \pi$$

لإن اتجاه المتجه $\overline{OP}$ (ظل الزاوية) إما -45 أو 315 حيث

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(2\pi-\theta)&=-\tan\theta\\ \sin(2\pi-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(2\pi-\theta)&=\cos\theta\end{aligned}}$$

$$\tan(315)=\tan(-45)$$
$$\sin(315)=\sin(-45)$$
$$\cos(315)=\cos(-45)$$

$$\begin{aligned}\sin(-45)&=-\sin(45)\\ &=-\sin(2\pi-315)\\ &=-[-\sin(315)]=\sin(315)\end{aligned}$$

الصيغة القطبية للعدد المركب (صورة المقياس و السعة) :
Complex number in polar form

إذا كان

إذا $\theta=\text{Parg}.z \quad , \quad z=x+iy \quad , \quad r=|z|$

$$z=r\left(\frac{x}{r}+i\frac{y}{r}\right)=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

حيث

$$\begin{aligned}e^{i\theta}&=\cos\theta+i\sin\theta\\ &=\text{cis}\ \theta\end{aligned}$$

(تسمى صيغة أويلر)

الصوره (*) تسمى الصيغة القطبية للعدد z أو صورة المقياس والسعة .

ونسمي المستوى الذي نقطه تمثل الأعداد المركبة مستوى آرجاند (Argand diagram).

مثال:

عين مقياس وسعة :

$$\text{i)}\quad z = -(\tfrac{1}{2})i$$

$$\text{ii)}\quad z = 2(\cos\pi - i\sin\pi)$$

الحل:

$$\text{i)}\quad -\pi < \text{Parg}.(-\tfrac{1}{2})i = -\pi/2 \leq \pi$$

$$\text{or}\quad 0 < \text{Parg}.(-\tfrac{1}{2})i = 3\pi/2 \leq 2\pi$$

ii) $-\pi$ السعة هي

ملاحظات :

1- الأعداد الحقيقية المختلفة عن الصفر تمثل بنقط على المحور OX (لذلك نسمي هذا المحور بالمحور الحقيقي في مستوى أرجاند).

2- الأعداد التخيلية (أي الأعداد التي ينعدم شقها الأول والثاني لايساوي الصفر) تمثل بنقط على المحور OY (لذلك نسمي هذا المحور بالمحور التخيلي في مستوى أرجاند).

3- العدد المركب $z(0,0)$ هو العدد الوحيد الذي ليس من الممكن تعريف سعة له .

4- السعة الحقيقية لأي عدد حقيقي موجب هي الصفر كما أن السعة الرئيسية لأي عدد حقيقي سالب هي π أي أن

$$\text{Parg}.x = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0 \end{cases}$$

5- نلاحظ أن

$$\arg.z=\{P\arg.z\pm 2n\pi,\quad n=0,1,2,\ldots\}$$

أمثلة :

عبر عن كل من الأعداد الآتية في صورة المقياس والسعة وعين لكل منها السعة الرئيسية :

$$(1)\ i \qquad (2)-1+i \qquad (3)\sqrt{3}+i$$

$$(4)-i \qquad (5)\ 1-\sqrt{3}\ i \qquad (6)\ i+1 \qquad (7)-1-i$$

الحل :

$$(1)\ i=r\ \mathrm{cis}\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\therefore r\cos\theta=0\ ,\ r\sin\theta=1$$

$$r^2=1\ ,\ r=1,\quad \cos\theta=0,\quad \sin\theta=1$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ ,\ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

$$\therefore\ P\arg i=\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore i=\mathrm{cis}\ \frac{\pi}{2}$$

$$(2)\ -1+i = r\ \text{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\therefore r\cos\theta = -1\ ,\ r\sin\theta = 1$$

$$r^2 = 2\ ,\ r = \sqrt{2}\ ,$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\ ,\ (n = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

$$\therefore \text{Parg.}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore -1+i = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{3\pi}{4}$$

لا حظ أن السعة الرئيسية $-\pi < \frac{3\pi}{4} \le \pi$

$$(3)\ \sqrt{3}+i = r\ \text{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\therefore r\cos\theta = \sqrt{3}\ ,\ r\sin\theta = 1$$

$$r^2 = 4\ ,\ r = 2\ ,$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi\ ,\ (n = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

$$\therefore \text{Parg.}\left(\sqrt{3}+i\right) = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad -\pi < \frac{\pi}{6} \le \pi$$

$$\therefore \sqrt{3}+i = 2\ \text{cis}\ \frac{\pi}{6}$$

$(4)\ -i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r\cos\theta = 0$, $r\sin\theta = -1$

$$\therefore\ r^2 = 1\ ,\ r = 1,\quad \cos\theta = 0,\quad \sin\theta = -1$$

$$\therefore \theta = \frac{-\pi}{2} + 2n\pi\ ,\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\therefore -\pi < \mathrm{Parg.}(-i) = \frac{-\pi}{2} \le \pi,$$

$$\therefore -i = \mathrm{cis}\ \frac{-\pi}{2}$$

$(5)\ 1-\sqrt{3}i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\therefore r\cos\theta = 1\ ,\ r\sin\theta = -\sqrt{3}$$

$$r^2 = 4\ ,\ r = 2\ ,$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\ ,\quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi\ ,\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\mathrm{Parg.}\left(1 - \sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad -\pi < -\frac{\pi}{3} \le \pi$$

$$\therefore 1 - \sqrt{3}i = 2\ \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(6)\ 1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\text{cis}\,\theta$$

$$r\cos\theta = 1\ ,\ r\sin\theta = 1$$

$$\therefore\ r^2 = 2\ ,\ r = \sqrt{2},\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi\ ,\ (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

$$\therefore -\pi < P\arg.(1+i) = \frac{\pi}{4} \le \pi,$$

$$\therefore 1+i = \sqrt{2}\,\text{cis}\ \frac{\pi}{4}$$

$$(7)\ -1-i$$

$$P\arg.(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\arg.(-1-i) = -\frac{3\pi}{4} \pm 2n\pi\ ,\ (n = 0, 1, \ldots)$$

$$\therefore -1-i = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$$

التمثيل الهندسي للمجموع والفرق :

نعتبر العددين المركبين $z_2 = (x_2, y_2)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ والممثلين بالنقطتين $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ نمثل لمجموعهما $z_1 + z_2$ بنفس الكيفية التي نستخدمها في إيجاد محصلة قوتين أي بإنشاء ما يناظر متوازي أضلاع القوى .

كذلك لتمثيل $z_1 - z_2$ نجمع z_1 على $(-z_2)$ أي تمثيل للعدد $z_1 + (-z_2)$

(اعتذر عن تقصيري في الرسم)

ملاحظات :

1- المعادلة $|z| = r$ تمثل الأعداد المركبة التي تقابل نقاط واقعة على محيط دائرة مركزها الأصل $z_0 = (0,0)$ ونق لها $= r$.
(حيث r عدد حقيقي موجب) . وبالتالي نلاحظ $x^2 + y^2 = r^2$.

2- المعادلة $|z - z_0| = r$ تمثل هندسيا مجموعة النقط الواقعة على محيط دائرة مركزها $z_0 = (x_0, y_0)$ ونق $= r$.

ويمكن التحقق من ذلك فنجد معادلة الدائره في هذه الحالة كما هو معروف:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

حيث :

$$|z - z_0| = r \quad \Leftrightarrow \quad |(x - x_0) + i(y - y_0)| = r$$

$$\therefore \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

3- التعبير $|z_1 - z_2|$ يعني البعد بين النقطتين z_1, z_2.

4- المتباينة $|z - z_0| \le r$ تمثل مجموعة النقط التي تقع داخل وعلى محيط الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r .

أمثلة :

مثال (1) :

أثبت أن المعادلة $|z - 1 + i| = 1$ تمثل دائرة مركزها $z_0 = 1 - i$ ونصف قطرها $= 1$.

الحل :

المعادله يمكن وضعها على الصورة:

$$|x+iy-1+i|=1$$

$$\therefore |(x-1)+i(y+1)|=1$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=1$$

أي أن المركز هو $(1,-1)$ وهو العدد المركب $z_0=1-i$

مثال (2) :

مالذي يمكن أن يقال هندسيا عن كل من المعادلتين :

$$Re.(\bar{z}-i)=2 \quad , \quad Im.(\bar{z}-i)=2$$

الحل :

$$Re.(\bar{z}-i)=Re.(x-i(y+1))=x=2$$

إذا $Re.(\bar{z}-i)=2$ تمثل معادلة الخط المستقيم $x=2$

كذلك $Im.(\bar{z}-i)=2$ فإن تعطى المستقيم $y=-3$

مثال (3) :

أوجد تفسيرا هندسيا للمتساوية $|z-i|=|z+i|$

الحل :

هذه المتساوية تعني جميع النقاط المتساوية البعد عن النقطتين i ,$-i$ وهي تكون بذلك جميع نقاط محور x الحقيقي ويمكن ايجاده كالآتي:

$$
\begin{aligned}
|x+iy-i| &= |x+iy+i| \\
x^2+(y-1)^2 &= x^2+(y+1)^2 \\
y^2-2y+1 &= y^2+2y+1 \\
4y=0 &\rightarrow y=0
\end{aligned}
$$

وهذه معادلة المحور الحقيقي x .

مثال (4) :

أوجد تفسيرا هندسيا للمعادلة: $|z-4i|+|z+4i|=10$

الحل:

المعادلة تعني : المحل الهندسي للنقطة P الممثلة للعدد المركب z بحيث تتحرك P على منحنى يكون فيه مثلا

$PF_1+PF_2=10$

أي مجموعة النقط التي يكون مجموع بعد كل منها عن النقطتين الثابتتين ، $(0,4)$ $(0,-4)$ يساوي مقدار ثابت هو 10 .

وهذا تعريف القطع الناقص الذي محوره الأكبر يساوي $2a=10$ والبؤرتين هما $F_2=(0,4)$, $F_1=(0,-4)$ ويعطى محوره الاصغر من العلاقة $b^2=a^2(1-e^2)$:

حيث e الاختلاف المركزي للقطع وتحسب من

$$4=5.e \quad \Leftarrow \quad 4=ae$$

$$\therefore b^2=25\,[\,1-\left(\tfrac{4}{5}\right)^2]=9 \quad \Rightarrow \quad b=3$$

وحيث أن البؤرتين على المحور الرأسي ،

إذا فهو قطع ناقص رأسي معادلته العامه في الصورة

$$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$$

مثال (5) :

ماالذي يمكن أن يقال هندسيا عن مسار النقطة p الممثلة للعدد المركب z إذا كان $P\arg.(z-3)=\frac{\pi}{4}$

الحل:

نعلم أن $P\arg.(z-3)=\frac{\pi}{4}$ تعني أن هناك عدد مركب يمثل بجميع النقط التي تتحرك على المتجه الخارج من نقطة الأصل ويميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$

لذلك فإن المعادلة المذكورة تمثل جميع النقط على المتجه الخارج من النقطة $(3,0)$ ويميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$.

التمارين :

(١) بين أن النقاط التي تحقق المعادلة $|z|=2$ تقع على محيط دائرة نصف قطرها 2ومركزها نقطة الأصل .

(٢) صف مسار النقطة التي تتحرك في المستوى المركب بحيث تحقق المعادلة $|z+i|^2=\text{Im.}(z+2i)$.

(٣) بين أنه إذا كانت النقطة z على محيط دائرة نصف قطرها 2 ومركزها الأصل فإن

(أ) $|z^2+2z-1|\le 9$

(ب) $\dfrac{1}{|z^3-1|}\le\dfrac{1}{7}$

(4) بين ما الذي يمكن أن يقال هندسيا عن النقطة p الممثلة للعدد المركب z إذا كان :

$(1)\ \ |z|<2$

$(2)\ \ |z|\le 3$

$(3)\ \ |z|\ge 1$

$(4)\ \ |z-1|\le 4$

$(5)\ \ |z+2i-3|<5$

$(6)\ \ |iz+3-2i|>2$

$$(7)\ |2z-1+3i|\le 6$$

$$(8)\ |z+2|+|z-1|=4$$

$$(9)\ |z+i-3|+|z-2i+1|=6$$

$$(10)\ |2z+4i-1|+|2z+3-2i|=8$$

$$(11)\ |z-3|=|z+3|$$

$$(12)\ \arg.(z-1)=\frac{\pi}{3}$$

$$(13)\ \arg.(z+1)-\arg.(z-i)=\frac{\pi}{6}$$

$$(1)\ |z|=2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2 \Rightarrow x^2+y^2=4$$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2

صف مسار النقطة التي تتحرك في المستوى المركب بحيث تحقق المعادلة

$$|Z+i|^2 = Im(Z+2i)$$

الحل

$$Z = x + iy \Rightarrow Z + i = x + (1+y)i$$

$$\Rightarrow |Z+i|^2 = x^2 + (1+y)^2$$

$$Z + 2i = x + (2+y)i$$

$$\Rightarrow Im(Z+2i) = 2 + y$$

$$\therefore |Z+i|^2 = Im(Z+2i)$$

$$\Rightarrow x^2 + (1+y)^2 = 2 + y$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

وبالتالي فإن مسار النقطة هو الدائرة التي مركزها $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$ وحدة طول .

مع تحيات

محمد خالد غزول

بين أنه اذا كانت النقطة Z على محيط الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 2 فإن :

أ) $|Z^2+2Z-1| \leqslant 9$

ب) $\dfrac{1}{|Z^3-1|} \leqslant \dfrac{1}{7}$

الحل

$\because$ $|Z|=2$ هي معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $= 2$

أ) $\therefore |Z^2+2Z-1| \leqslant |Z^2|+|2Z|+|1| = 4+4+1$

$\therefore |Z^2+2Z-1| \leqslant 9$

ب) $\therefore |Z^3-1| \geqslant \left||Z^3|-|1|\right| = 7$

$\therefore |Z^3-1| \geqslant 7$

$\therefore \dfrac{1}{|Z^3-1|} \leqslant \dfrac{1}{7}$

مع تحيات
محمد خالد غزول

الدرس الثالث

سعة حاصل الضرب وخارج القسمة:

نلاحظ أولا أنه للعددين المركبين غير الصفريين

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad , \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

فإن :

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \quad , \quad \theta_1 = \theta_2 + 2n\pi, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

حيث θ_1 هي إحدى قيم $\arg . z_1$ ، θ_2 هي إحدى قيم $\arg . z_2$.

أ ـ سعة حاصل ضرب عددين مركبين :

يعطى حاصل الضرب في الصورة القطبية كالآتي :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \; e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 \; [\cos\theta_1 + i\sin\theta_1][\cos\theta_2 + i\sin\theta_2] \\ &= r_1 r_2 \; [\cos(\theta_1 + \theta_2)][i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 \; e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \cdots\cdots\cdots (1) \end{aligned}$$

حيث $\theta_1 + \theta_2$ هي قيمة من قيم $\arg . z_1 z_2$ وبالتالي فإن :

$$\arg . z_1 z_2 = \arg . z_1 + \arg . z_2 \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

أي أن :

" أي سعة للعدد (حاصل ضرب) $z_1 z_2$ تساوي مجموع سعتين إحداهما للعدد z_1 والأخرى للعدد z_2 ، والعكس مجموع سعة ما للعدد z_1 وسعة ماللعدد z_2 يكون سعة للعدد (حاصل ضرب) $z_1 z_2$ "

وبالتالي:

إذا اعتبرنا أي سعة للعدد $z_1 z_2$ فمن (1) ينتج أن هذه السعه في الصورة $\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$ (n عدد صحيح)

وبالتالي فإنه يمكننا أن نأخذ في العلاقة (2) سعة z_1 ، سعة z_2 على سبيل المثال في الصورة:

$$\arg z_1 = \theta_1 \quad , \arg z_2 = \theta_2 + 2n\pi$$

ملاحظه :

العلاقة (2) ليست دائما صحيحة إذا وضعنا $P\arg z$ بدلا من $\arg z$.

أي أن السعة الأساسية لحاصل الضرب لايشترط أن تساوي مجموع السعتين لأساسيتين للعددين المركبين .

مثال توضيحي :

اعتبر $z_1 = i \quad , \quad z_2 = i - 1$

$$\text{rg}\, z_1 = \frac{\pi}{2}, P\arg z_2 = \frac{3\pi}{4} \quad \to P\arg z_1 + P\arg z_2 = \frac{5\pi}{4} > \pi$$

$$\therefore P\arg(z_1 z_2) = P\arg(-1-i) = \frac{-3\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$$

ونلاحظ :

انه لكي يتساوى الطرفان يجب إضافة -2π إلى المجموع

$$P\arg z_1 + P\arg z_2$$

$$\therefore P\arg(z_1 z_2) = P\arg z_1 + P\arg z_2 - 2\pi$$

$$= \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$$

أي أن سعة حاصل الضرب تساوي مجموع السعات وذلك بإضافة مناسبة من مضاعفات 2π .

مثال :

أعتبر العددين : $z_1 = -1 \quad , \quad z_2 = i$

$'\arg z_1 = \pi, \quad P\arg z_2 = \frac{\pi}{2}, \quad P\arg z_1 z_2 = P\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$e.P\arg(z_1 z_2) = P\arg z_1 + P\arg z_2 \pm 2n\pi, \quad n=0,1,2,\ldots$

ملاحظه :

إذا ضرب العدد المركب z بالعدد المركب i فإن المتجه الممثل

للعدد z يدور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ عكس عقارب الساعة (بزاوية قائمة

موجبة) لينطبق على متجه العدد iz والسبب هو :

$$iz = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)]$$

ب- سعة خارج قسمة عددين مركبين :

يعطى خارج القسمة $\frac{z_1}{z_2}$ في الصورة :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

حيث أن سعة خارج القسمة $\frac{z_1}{z_2}$ تكون

(n صحيح) $\theta_1 - \theta_2 + 2n\pi$

وتفسر مثل حالة حاصل الضرب . وذلك بأخذ

$\arg z_1 = \theta_1 + 2n\pi \quad , \arg z_2 = \theta_2$

قوة العدد المركب ونظرية ديموافر:

١ ـإذا كان الأس صحيح موجب:

ليكن n عدد صحيح موجب نعرف z^n بأنها $\overbrace{z.z.z....z}^{n\ \text{tims}}$ وبالتالي طبقا لسعة حاصل الضرب فإن :

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad ......(1)$$

$$\text{i.e. } \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

بالقسمة على r^n فإن :

$$\left[(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad ......(2)$$

هذه الصيغة(2) تعرف بأسم نظرية ديموافر De-Moivre.

٢ ـإذا كان الأس صحيح سالب :

نعرف أولا إذا كان $n=0$ العدد $z^0 = 1$

وكذلك $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$ أي القوة السالبة لأي $z \neq 0$

فإن العلاقتين (1) و(2) السابقتين صحيحتان لكل $n \in \mathbb{Z}$ (عدد صحيح)

٣ ـإذ اكان الأس كسر بسطه الوحده(جذر العدد المركب) :

$$w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{P\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{P\arg z + 2k\pi}{n}\right) \quad , k \in \mathbb{Z}$$

وهي الصيغة التي تعطينا جميع الجذور النونية للعدد z بدلالة قيمته المطلقة $|z|$ وسعته الرئيسيه $P\arg z$.

ولكن هذه الصيغة تعطي عدد لا نهائي من القيم حيث $k \in \mathbb{Z}$

فنلاحظ :

أولا : مع تغير k الصحيحة نحصل على عدد غير منته من الزوايا $\dfrac{P\arg z + 2k\pi}{n}$
ولكنه لا ينتج عن ذلك سوى n من الجذور المختلفة والتي نحصل عليها بإعطاء k القيم $k=0,1,2,\dots,n-1$
لأن أي زاوية أخرى ستكون عباره عن أحد مضاعفات 2π وبالتالي لا تمثل جذرا مختلفا .

ثانيا : عندما $k=0$ فإن الجذر الناتج يسمى القيمة الأساسية للجذر ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{z}$ ويكتب في الصورة :

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{P\arg z}{n} + i\sin\frac{P\arg z}{n}\right)$$

مثال :
أوجد الجذور التكعيبية للعدد المركب $z=1+i$
(أي أوجد $(1+i)^{\frac{1}{3}}$)

الحل:
نضع $1+i$ في الصورة القطبية

$$\therefore 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

وبالتالي فإن :

$$(1+i)^{\frac{1}{3}}=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{3}\right), k=0,1,2$$

$$\text{at } k=0 \ \rightarrow z_0=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$k=1 \ \rightarrow z_1=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi/4+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/4+2\pi}{3}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$$

$$k=2 \ \rightarrow z_2=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

ملاحظه هامه (1) على الجذر النوني :

في الحالة الخاصة التي فيها z عدد حقيقي موجب فإن :

$$r=|z|=z \quad , \quad P\arg z=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}$$

إذن الجذر الذي دليله n للمقدار r (عدد حقيقي موجب) هو مقدار وحيد القيمه وإذا كان كل من : $z_1, z_2, \ldots, z_n$ عدد حقيقي موجب فإن :

$$\sqrt[n]{z_1, z_2, \ldots, z_n}=\sqrt[n]{z_1}\,\sqrt[n]{z_2}\ldots\sqrt[n]{z_n}$$

لأنه في هذه الحاله : $r_s=|z_s|=z_s \quad , \quad (s=1,2,\ldots,n)$

وكذلك لأن :

$$P\arg z_s=0 \quad \Rightarrow \quad P\arg(z_1, z_2, \ldots, z_n)=0$$

$$\sqrt[n]{z_1, z_2, \ldots, z_n}=\sqrt[n]{r_1, r_2, \ldots, r_n}=\sqrt[n]{r_1}\,\sqrt[n]{r_2}\ldots\sqrt[n]{r_n}$$

$$=\sqrt[n]{z_1}\,\sqrt[n]{z_2}\ldots\sqrt[n]{z_n}$$

وبخلاف هذه الحالة لا يشترط أن تصح هذه القاعده دائما .

مثال توضيحي :

بين أنه يمكن أن يكون $\sqrt{z_1 z_2} \neq \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$ حيث z_1, z_2 عددان مركبان .

الحل :

بأخذ عددان حقيقيان سالبان بالتالي فإن :

$$z_1 = r_1 \operatorname{cis} \pi \quad , \quad z_2 = r_2 \operatorname{cis} \pi$$

$$\therefore z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}\left(2\pi\right) = r_1 r_2 \operatorname{cis}\left(0\right) = r_1 r_2$$

وبالتالي فإن :

$$\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{r_1 r_2}$$

ولكن :

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{r_1}\left(\operatorname{cis}\pi\right)^{1/2} = \sqrt{r_1}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = i\sqrt{r_1}$$

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{r_2}\left(\operatorname{cis}\pi\right)^{1/2} = \sqrt{r_2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = i\sqrt{r_2}$$

$$\therefore \sqrt{z_1}.\sqrt{z_2} = i\sqrt{r_1}.i\sqrt{r_2} = -\sqrt{r_1}\sqrt{r_2} = -\sqrt{r_1 r_2}$$

$$\therefore \sqrt{z_1 z_2} \neq \sqrt{z_1}.\sqrt{z_2}$$

هذا يعني أنه بأخذ $z_1 = -1,\ z_2 = -1$ فإن

$$\sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}.\sqrt{-1}$$

ملاحظه هامه (2) (الجذور النونية للواحد الصحيح) :

يوجد n من الأعداد المركبة تحقق المعادلة $z^n = 1$ تسمى جذور الوحدة وتعطى من الصيغة :

$$\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,\ldots,n-1$$

تنويه:

أول الجذور النونية للواحد هو 1 والبقية موزعة على دائرة الوحده $|z|=1$ بحيث يساوي فرق الزاوية بين كل جذرين متجاورين $\frac{2\pi}{n}$.

مثال :

جذور المعادلة $z^5=1$ هي $z=1^{\frac{1}{5}}$ وهم خمسة جذور أي خمسة جذور للواحد الصحيح وتعطى من العلاقة :

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

مثال :

أوجد جذور المعادله $z^5=\left(\sqrt{3}+i\right)$.

الحل :

الجذور المطلوبة هي الجذور الخمسة للعدد المركب $w=\left(\sqrt{3}+i\right)$ وبالتالي نوجد $w^{\frac{1}{5}}=\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{5}}$

مما سبق نجد :

$$z_k = |w|^{\frac{1}{5}} e^{\left(\frac{P\arg.w+2k\pi}{5}\right)i}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

وحيث أن :

$$|w|=2, \;P\arg.w=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

$$z_k = 2^{\frac{1}{5}} e^{\left(\frac{\pi/6 + 2k\pi}{5}\right)i} \quad , \quad k=0,1,2,3,4$$

١ ـالأس عدد قياسي (الحالة العامه لقوة عدد مركب) :

لأي عدد قياسي $\frac{m}{n}$ حيث $m \in \mathbb{Z} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}^+$ فإن :

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{|z|^m}\left(\cos\frac{mP\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{mP\arg z + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k=0,\ldots,n-1$$

تطبيقات على الجذر النوني للعدد المركب :

حل معادلة الدرجة الثانية المركبة :

كما في حالة المتغير الحقيقي فإن المعادلة:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad , \quad c,b,a \neq 0$$

أعداد مركبة فإن لها حل يعطى في الصورة :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

إذن نلاحظ أننا نحتاج لإيجاد جذر تربيعي ($\sqrt{b^2 - 4ac}$) و هو بالطبع جذر للعدد المركب $(b^2 - 4ac)$.

مثال :

حل المعادلة $z^2 + (1+2i)z - (2-i) = 0$:

الحل:

$$a=1,\quad b=1+2i,\quad c=-2+i$$

$$\therefore z=\frac{(-1-2i)\pm(1-4+4i+8-4i)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$=\frac{(-1-2i)\pm 5^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{\left(-1\pm\sqrt{5}\right)-2i}{2}$$

هنا $5^{\frac{1}{2}}$ حسبنا وهي $5^{\frac{1}{2}}1^{\frac{1}{2}}$ حيث :

$$1^{1/2}=e^{\frac{2k\pi}{2}i}\quad,\quad k=0,1$$

$$1^{1/2}=e^{0},\ e^{i\pi}=1,-1\quad\Rightarrow\ \sqrt{5}=\sqrt{5}\,(1,-1)=\left(\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$$

أمثلــــــه :

مثال (1) :

إحسب قيم المقادير الآتية :

$$(1)(-1)^{\frac{2}{3}}\qquad (2)(i+1)^{\frac{1}{2}}\qquad (3)\left(i\sqrt{3}-1\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$(4)(i)^{\frac{1}{3}}\qquad (5)(1)^{\frac{1}{4}}$$

الحل :

$$(1)\ -1=\text{cis }\pi=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$(-1)^{2/3}=(\text{cis }\pi)^{2/3}$$

من نظرية ديموافر الحالة العامة نحصل على :

$$(\mathrm{cis}\ \pi)^{2/3} = \mathrm{cis}\frac{2\pi + 2\pi k}{3};(k = 0,1,2)$$

$$\text{when } k = 0: \quad \mathrm{cis}\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{when } k = 1: \quad \mathrm{cis}\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{when } k = 2: \quad \mathrm{cis}\,2\pi = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$(2)(i+1)^{1/2} = \left\{\sqrt{2}\left(\mathrm{cis}\ \frac{\pi}{4}\right)^{1/2}\right\} = \sqrt[4]{2}\left(\mathrm{cis}\ \frac{\pi}{4}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt[4]{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi/4 + 2\pi k}{2}\right);(k = 0,1)$$

$$\text{at } k = 0 \quad \therefore z = \sqrt[4]{2}\ \mathrm{cis}\frac{\pi}{8} = z_1$$

$$\text{at } k = 1 \quad \therefore z = -\sqrt[4]{2}\ \mathrm{cis}\frac{\pi}{8} = z_2$$

$$\text{when } k = 1: \quad \mathrm{cis}\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{when } k = 2: \quad \mathrm{cis}\,2\pi = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$(3)\ i\sqrt{3}-1=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\operatorname{cis}\ \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore\left(i\sqrt{3}-1\right)^{3/4}=\sqrt[4]{8}\left(\operatorname{cis}\ \frac{2\pi}{3}\right)^{3/4}$$

$$=\sqrt[4]{8}\left(\operatorname{cis}\ \frac{3.2.\pi/3+2k\pi}{3}\right),k=0,1,2,3$$

$$\text{at } k=0\ :\sqrt[4]{8}\ \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\ =i\sqrt[4]{8},$$

$$\text{at } k=1\ :\sqrt[4]{8}\ \operatorname{cis}\ \pi=-\sqrt[4]{8},$$

$$\text{at } k=2:\sqrt[4]{8}\operatorname{cis}\frac{-\pi}{2}\ =-i\sqrt[4]{8},$$

$$\text{at } k=3:\sqrt[4]{8}\operatorname{cis}0\ =\sqrt[4]{8}$$

إذن قيم المقدار هي :

$$\pm\sqrt[4]{8},\pm i\sqrt[4]{8}$$

$$(4)\ i=\operatorname{cis}\ \frac{\pi}{2}\ ;\qquad \therefore(i)^{1/3}=\left(\operatorname{cis}\ \frac{\pi}{2}\right)^{1/3}$$

$$\operatorname{cis}\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right)\quad;\quad(k=0,1,2)$$

$$\text{at } k=0\ \rightarrow\ \operatorname{cis}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\text{at } k=1\ \rightarrow\ \operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\text{at } k=2\ \rightarrow\ \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}=-i$$

$$-i,\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$1=\text{cis }0 \rightarrow (1)^{1/4}=(\text{cis }0)^{1/4}=\text{cis}\frac{2k\pi}{4} \quad ; \quad (k=0,1,2,3)$$

$$\text{at } k=0 \rightarrow \text{cis}0=1$$

$$\text{at } k=1 \rightarrow \text{cis}\frac{\pi}{2}=i$$

$$\text{at } k=2 \rightarrow \text{cis }\pi=-1$$

$$\text{at } k=3 \rightarrow \text{cis }\frac{3\pi}{2}=-i$$

وقيم المقدار $(1)^{1/4}$ هي

$$\pm 1,\pm i$$

مثال (2) :

حل المعادلات الآتيه :

$$(1)\, z^n=1 \qquad (2)\, z^4+1=0$$

$$(3)\, z^3+i=0 \qquad (4)\, z^4+z^2+1=0$$

الحل :

(١) إذا كان $n=1$ فإن المعادلة محلولة تلقائيا أما إذا كانت $n>1$ فإن قيم z هي قيم $(1)^{1/n}$ أي الجذور النونية للوحده أي هي قيم $(\text{cis}0)^{1/n}$

إذن جذور المعادلة هي

$$\text{cis}\frac{2\pi k}{n}, \quad k=0,1,2\ldots,n-1$$

فإذا رمزنا للمقدار $\frac{2\pi k}{n}$ بالرمز ω أي

$$\omega=\text{cis}\frac{2\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \omega^k=\frac{2\pi k}{n} \quad , \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

إذن جذور المعادلة مشتملة في الصيغة ω^k حيث $\omega=\text{cis}\frac{2\pi}{n}$ ، $k=0,1,\ldots,n-1$ أي أن جذور المعادلة هي :

$$1,\omega,\omega^2,\omega^3,\ldots,\omega^{n-1}$$

أي الجذور النونية للوحده .

(٢) $z^4+1=0$

جذور المعادلة هي قيم $(-1)^{1/4}=(\text{cis}\,\pi)^{1/4}$

أي هي قيم :

$$\text{cis}\ \frac{\pi+2k\pi}{4}\ ;\ (k=0,1,2,3)$$

$$\text{at}\ k=0\ \rightarrow\ \text{cis}\frac{\pi}{4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\text{at}\ k=1\ \rightarrow\ \text{cis}\frac{5\pi}{4}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\text{at}\ k=3\ \rightarrow\ \text{cis}\frac{7\pi}{4}=\text{cis}\frac{-\pi}{4}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

إذن الجذور هي :

$$\frac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$$

$$z^3=-i=\text{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right)\ (3)$$

إذن الجذور هي $\left(\text{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)^{1/3}$:

أي القيم

$$z_k=\text{cis}\ \frac{-\pi/2+2k\pi}{3}\ ;\ (k=0,1,2)$$

$$\text{at}\ k=0\ \rightarrow\ z_0=\text{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

$$\text{at}\ k=1\ \rightarrow\ z_1=\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$$

$$\text{at}\ k=2\ \rightarrow\ z_2=\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$$

إذن جذور المعادلة هي :

$$z^4+z^2+1=0 \quad (4)$$

لحل هذه المعادلة نستعين بالمتطابقة الآتيه :

$$\left(z^6-1\right)=\left(z^2-1\right)\left(z^4+z^2+1\right)$$

إذن جذور المعادلة المعطاة هي نفس جذور المعادلة $\left(z^6-1\right)$ بعد استبعاد جذري المعادلة $z^2-1=0$

أي بعد استبعاد القيمتين ±1 من قيم جذور المعادلة $z^6=1$

ولكن جذور المعادلة $z^6=1$ هي قيم $(1)^{1/6}$ والتي هي :

$$\left(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5\right)$$

حيث:

$$\omega=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{6}=\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^2=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^3=\operatorname{cis}\pi=-1$$

$$\omega^4=\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^5=\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

إذن جذور المعادلة $z^4+z^2+1=0$ هي :

$$\frac{\pm1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

التمارين :

(١) أثبت أن

$$\sqrt{2}\,|z| \geq |\mathrm{Re}.z| + |\mathrm{Im}.z|$$

(٢) اوجد الجذور الأربعة للمعادلة $z^4 + 1 = 0$ و استخدام ذلك لتحليل المقدار $z^4 + 1$ في بالصورة $\left(z^2 + 2z + 2\right)\left(z^2 - 2z + 2\right)$.

	العبارة	الوصف
1	$\lvert z \rvert < 2$	مجموعة النقط P الواقعة داخل الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 2
2	$\lvert z \rvert \leqslant 3$	مجموعة النقط الواقعة على محيط وداخل الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 3
3	$\lvert z \rvert \geqslant 1$	مجموعة النقط الواقعة على محيط وخارج الدائرة الأصل وطول نصف قطرها 1
4	$\lvert z - 1 \rvert \leqslant 4$	مجموعة النقط الواقعة على محيط وداخل الدائرة التي مركزها $(1,0)$ وطول نصف قطرها 4
5	$\lvert z + 2i - 3 \rvert < 5$	مجموعة النقط الواقعة داخل الدائرة التي مركزها $z_0 = 3 - 2i$ وطول نصف قطرها 5
6	$\lvert iz + 3 - 2i \rvert > 2$	$\lvert iz + 3 - 2i \rvert = \lvert i(z - 3i - 2) \rvert = \lvert z - 2 - 3i \rvert$ فهي تمثل مجموعة النقط الواقعة خارج الدائرة التي مركزها $z_0 = 2 + 3i$ وطول نصف قطرها 2
7	$\lvert 2z - 1 + 3i \rvert \leqslant 6$	$\lvert 2z - 1 + 3i \rvert \leqslant 6 \Rightarrow \lvert z - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \rvert \leqslant 3$ فهي تمثل مجموعة النقط الواقعة داخل الدائرة التي مركزها $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ وطول نصف قطرها 3
8	$\lvert z + 2 \rvert + \lvert z - 1 \rvert = 4$	مجموعة النقط الواقعة على القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(1,0), F_2(-2,0)$ وطول محوره الأكبر $2a = 4$
9	$\lvert z + i - 3 \rvert + \lvert z - 2i + 1 \rvert = 6$	مجموعة النقط الواقعة على القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(3,-1), F_2(-1,2)$ وطول محوره الأكبر $2a = 6$
10	$\lvert 2z + 4i - 1 \rvert + \lvert 2z + 3 - 2i \rvert = 8$	$\lvert z + 2i - \frac{1}{2} \rvert + \lvert z + \frac{3}{2} - i \rvert = 4$ مجموعة النقط الواقعة على القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(\frac{1}{2}, -2), F_2(-\frac{3}{2}, 1)$ وطول محوره الأكبر $2a = 4$
11	$\lvert z - 3 \rvert = \lvert z + 3 \rvert$	مجموعة النقط هي عبارة عن محور القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ حيث $A(3,0), B(-3,0)$ فهي عبارة عن المحور $\overleftrightarrow{y'y}$
12	$\arg(z - 1) = \frac{\pi}{3}$	مجموعة النقط الواقعة على المتجه الخارج من النقطة $(1,0)$ ويميل بزاوية $\frac{\pi}{3}$
13	$\arg(z + 1) - \arg(z - i) = \frac{\pi}{6}$	مجموعة النقط في المستوى التي يكون فيها فرق قياسي زاويتي ميل المتجهين الخارجين من النقطتين $(-1,0), (0,1)$ مساوياً $\frac{\pi}{6}$

حلول التمارين الغير محلوله

تمارين الدرس الاول :

اثبت خواص المقياس التاليه:

$$(1)\quad |z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = (0,0)$$

$$(2)\quad |z| = |\bar{z}|$$

$$(3)\quad |z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$$

$$(4)\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$(5)\quad \operatorname{Re} z \le |z| \quad , \quad \operatorname{Im} z \le |z|$$

$$(6)\quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$(7)\quad |z_1 + z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$

$$(8)\quad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$

الحل :

$$(1)\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \Leftrightarrow z = (0,0)$$

$$(2)\quad |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$(3) |z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\left(\overline{z_1 z_2}\right) = z_1 z_2 . \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$= z_1 \bar{z}_1 . z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

i.e. $|z_1 z_2| = |z_1| . |z_2|$

$$(4) \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ let } z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z_1 = z z_2 \Rightarrow |z_1| = |z||z_2| \Rightarrow |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$(5) \operatorname{Re} z \le |z| \quad , \quad \operatorname{Im} z \le |z|$$

ليكن $x=\text{Re}.z, \quad y=\text{Im}.z$

$$\therefore |z|^2 = x^2 + y^2 \ge x^2 \Rightarrow |z| \ge |x|$$

ومن تعريف مقياس العدد الحقيقي x ($|x|$) أنه أكبر $\{x,-x\}$ أي أن

$$|x|=\max\{x,-x\}$$

$$\text{i.e.} \quad |x| \ge x \quad , \quad |x| \ge -x \qquad , x = \text{Re}.z$$

$$\therefore |z| \ge |x| \ge \text{Re}.z$$

(6) $|z_1 + z_2| \le \ |z_1| + |z_2|$

(أي ان مقياس المجموع لا يتجاوز مجموع المقاييس)

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right)$$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_2$$

$$= |z_1|^2 + \left(\overline{\bar{z}_1 z_2}\right) + (\bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2$$

$$\le |z_1|^2 + 2\text{Re}.(\bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2$$

$$\therefore \ |z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$\therefore \ |z_1 + z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2$$

(7) $|z_1 + z_2| \ge \ \big||z_1| - |z_2|\big|$

لإثبات هذه العلاقه نكتب :

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \le |z_1 + z_2| + |z_2|$$

$$\therefore |z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \qquad \qquad ....(*)$$

و هذا يثبت المتباينة المطلوبة عندما $|z_1| \ge |z_2|$

أما إذا كان $|z_1|<|z_2|$ فبإحلال z_1, z_2 كلا مكان الآخر في (*)
نحصل على :

$$\left(|z_1|-|z_2|\right)\le |z_1+z_2| \qquad \ldots\ldots\ldots(**)$$

ومنها نحصل على المطلوب .

$$(8)\quad |z_1-z_2|\ge \left||z_1|-|z_2|\right|$$

يمكن إثبات هذه المتباينة
بإستخدام المتباينة المثلثية (6) وبوضع $z=z_1-z_2$

$$\therefore z_1=z_2+z$$

$$|z_1|\le|z_2|+|z|$$

$$|z_1|-|z_2|\le|z|$$

$$\therefore |z_1|-|z_2|\le|z_1-z_2| \qquad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

وحيث

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$$

فإنه بوضع z_1 بدلا من z_2 والعكس في (I) نجد

$$|z_2|-|z_1|\le|z_1-z_2| \qquad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{II})$$

من (I),(II) ينتج

$$|z_1-z_2|\ge \left||z_1|-|z_2|\right|$$

تمارين الدرس الثالث :

السؤال الاول :

اثبت ان :

$$\sqrt{2}\,|z| \geq |Re.z| + |Im.z|$$

الحل :

$$\because (|x|-|y|)^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad |x|^2+|y|^2 \geq 2|x||y|$$

$$\text{but } \ (|x|+|y|)^2 = |x|^2+2|x||y|+|y|^2$$

$$\leq |x|^2+|y|^2+|x|^2+|y|^2$$

$$=2\left(|x|^2+|y|^2\right)$$

$$\therefore |x|+|y| \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2}\right)$$

$$|Re.z|+|Im.z| \leq \sqrt{2}\,|z|$$

السؤال الثاني :

اوجد الجذور الأربعة للمعادلة $z^4+1=0$ و استخدام ذلك لتحليل المقدار z^4+1 في بالصورة $\left(z^2+2z+2\right)\left(z^2-2z+2\right)$

الحل :

تحسب الجذور من العلاقة :

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{P\arg.(z)+2\pi k}{n}\right)} \quad ; \quad n=0,1,2,3,\ldots,n-1$$

$$\therefore z = (-4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{|-4|} \;\; e^{i\left(\frac{P\arg.(-4)+2\pi k}{4}\right)} \quad , \quad n=0,1,2,3.$$

بالتعويض عن قيم n نحصل على الجذور الأربعة التالية :

$$\left(z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)$$

$$\therefore z^4 + 4 = \left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)$$

الآن نوجد حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى كالآتي :

$$\left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = \left[z^2 + 2e^{i2\pi} - \sqrt{2}z\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)\right] \ldots\ldots(1)$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{7\pi}{4}} = \left[\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} + i\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad \ldots\ldots(2)$$

من (1) و(2) نجد أن :

$$\left(z-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)=\left[z^2+2-\sqrt{2}z\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)\right]$$

$$=z^2+2-2z \qquad \ldots\ldots(3)$$

بالمثل :

$$\left(z-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)=z^2+2-\sqrt{2}z\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{i\frac{5\pi}{4}}=\left[\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+i\left(\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{3\pi}{4}=-2\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2} \qquad \ldots\ldots(5)$$

حيث :

$$\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\frac{-3\pi}{4} \qquad , \qquad \sin\frac{5\pi}{4}=-\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذا من (4) و(5) نجد أن :

$$\left(z-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)=z^2+2-\sqrt{2}z\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$$

$$=z^2+2-2z \qquad \ldots\ldots(6)$$

من (3) و(6) ينتج المطلوب .