هذه المجموعة من الدروس في التحليل المركب من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com

الدرس الرابع

تعريف الدالة المركبة Complex function:

نقول أن المتغير المركب w هو دالة في المتغير المركب z ، إذا كان لكل $z \in S$ يمكن إيجاد w طبقا لقاعدة معينة ونكتب في هذه الحالة $w=f(z)$ حيث f هي القاعدة التي تعين العدد w المناظر للعدد z تسمى S مجال الدالة f وفئة قيم w تسمى مدى الدالة f

نلاحظ :

إذا كان $v(x,y)$ ، $u(x,y)$ دوال حقيقية في المتغيرين x,y كل منهما معرف على مجال S من المستوى المركب فإن مجموعهما يمثل دالة مركبة $f(z)$ في الصورة :

$$f(z) = u(x,y)+i\, v(x,y)$$

وهي دالة ذات قيمة مركبة معرفة على S .

والعكس فإن أي دالة مركبة $w=f(z)$ يمكن وضعها في الصورة :

$$w=f(z) = u(x,y)+i\, v(x,y)$$

حيث $v(x,y)$ ، $u(x,y)$ دالتين حقيقيتين في المتغيرين x,y
$u(x,y)$ تسمى الجزء الحقيقي ، $v(x,y)$ الجزء التخيلي من الدالة $w=f(z)$

على سبيل المثال :

$$f(z)=z^2=\left(x^2-y^2\right)+i\left(2xy\right),\quad z=x+iy$$

يكون

$$v(x,y)=2xy \quad , \quad u(x,y)=\left(x^2-y^2\right)$$

سوف نعتبر الدوال المركبة معرفة على مجال عبارة عن منطقة من المستوى المركب

على سبيل المثال :

الدالة $w=iz+3$ معرفة على كل المستوى المركب .

والدالة $w=\dfrac{1}{z^2+1}$ معرفة عند كل نقاط المستوى المركب فيما عدا $z=\pm i$

والدالة $w=|z|$ معرفة على كل المستوى المركب وهي دالة ذات قيمة حقيقة في المتغير المركب z .

الدالة المركبة وحيدة القيمة :

A one valued complex function

الدالة $w=f(z)$ المعرفة على المجال D يقال انها وحيدة القيمة إذا كان لكل نقطة $z\in D$ توجد قيمة واحدة فقط $w=f(z)$.

مثال : الدالة $w=f(z)=z^2+1$ وحيدة القيمة .

الدالة المركبة متعددة القيم :

Multiple valued complex function

الدالة w=f(z) المعرفة على المجال D يقال أنها متعددة القيم إذا كان لكل نقطة $z \in D$ يقابلها عدة قيم w=f(z).

مثال : الدالة $w = f(z) = z^{\frac{1}{4}}$ رباعية القيمة لأنه لكل z توجد أربعة قيم للمتغير المركب w

الدالة المتباينة :

One –one function

إذا كانت w=f(z) دالة مجالها D فيقال انها متباينة إذا وفقط إذا كان

$$\forall z_1, z_2 \in D \Rightarrow f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

الدالة العكسية :

Inverse function

إذا كانت w=f(z) دالة مجالها D ، مداها E فإن الدالة العكسية للدالة f (ويرمز لها بالرمز f^{-1}) هي الدالة التي مجالها E ومداها D .

وعليه لكل $w \in E$ يوجد $z \in D$ بحيث أن w=f(z) و لإيجاد الدالة العكسية f^{-1} للدالة f نوجد z بدلالة w ونكتب

$$g(z) = f^{-1}(z)$$

مثال :

الدالة $z \neq -1$, $w = f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ لها معكوس يعطى من العلاقة :

$$z = \frac{1}{w} - 1, w \neq 0$$

$$\text{i.e.} \quad g(z) = f^{-1}(z) = \frac{1}{z} - 1 \quad , \quad z \neq 0$$

تمثيل الدوال ذات المتغير المركب بيانيا :

Geometrical representation of complex function

١ ـالانتقال :

Translation

$$w=f(z)=z+b$$

مثال:

نعتبر التحويل $w=f(z)=z+b$ فإذا كانت

$b=b_1+ib_2$, $w=u+iv$, $z=x+iy$

فإن صورة النقطة (x,y) في المستوى –z هي النقطة

$$(x+b_1, y+b_2)$$

في المستوى –w

تحت تأثير هذا التحويل (الراسم) فإن صورة أي منطقة هي انتقال بنفس الكيفية لتلك المنطقة . ومن ثم فإن المنطقتين ستكونان بنفس الشكل والاتجاه. على وجه الخصوص فإن صورة المستقيم تكون أيضا خط مستقيم وصورة دائرة ذات مركز a ونق r تكون دائرة مركزها a+b، ونصف قطرها r

١ ـالدوران

:Rotation

$$w = az \quad ,|a| = 1$$

مثال : نعتبر التحويل $w = f(z) = az \quad ,|a| = 1$

بفرض

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad a = e^{i\alpha}$$

حيث $|a| = 1$ فإن

$$w = az = e^{i\alpha}\left(re^{i\theta}\right) = re^{i(\theta+\alpha)}$$

إذا النقطة ذات الإحداثيات القطبية (r,θ)في المستوى –z تنقل إلى النقطة $(r,\theta+\alpha)$في المستوى –w ومن ثم فإن التحويل يمثل دورانا بزاوية $\alpha = \arg a$ حول الأصل . تحت تأثير هذا التحويل ايضا فإن تحويل الخط المستقيم هو ايضا خط مستقيم وكذلك الدائرة.

٢ ـالتكبيرأو الانكماش :

Magnification or Contraction

$$w=bz \ , \ b>0$$

مثال : نعتبر التحويل $w=f(z)= bz$ حيث $b>0$ حقيقي .

إذا نقطة ذات احداثيات قطبية (r,θ)في المستوى – z تنقل إلى النقطة (br,θ)في المستوى – w ومن ثم فإن التحويل يمثل تكبير او انكماش بالمعامل b طبقا لكون $b>1$ او $b<1$

ايضا تحت هذا التحويل فإن الخطوط المستقيمة و الدوائر تنقل كما هي .

١ ـالتحويل ثنائي الخطية :

Bilinear Transformation

التحويل على الصورة $w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ حيث a,b,c,d أعداد مركبة وكذلك $ad + bc \neq 0$

يسمى تحويل ثنائي الخطية (أو التحويل الكسري) أو تحويل موبيس .

نلاحظ أن معكوس هذا التحويل هو $z = f^{-1}(z) = \frac{-dw + b}{cw - a}$

والذي بدوره تحويل ثنائي الخطية .

مثال:

برهن أن التحويل الثنائي الخطية $w = \frac{z-1}{z+1}$ ينقل نصف المستوى الأيمن

$Re.z>0$ إلى داخل القرص $|w| < 1$

الحل:

نحسب z بدلالة w أي نوجد الدالة العكسية للدالة w فنجد أن

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$.\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left[\frac{1+w}{1-w}+\frac{1+\bar{w}}{1-\bar{w}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(1+w)(1-\bar{w})+(1+\bar{w})(1-w)}{|1-w|^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2(1-w\bar{w})}{|1-w|^2}\right]=\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}>0 \Leftrightarrow |w|<1$$

١ -التحويل:

$$w=f(z)=z^2$$

مثال توضيحي:

اوجد تمثيلا هندسيا للدالة w=f(z) المعرفة على المجال

$$D=\{z=x+i : 0\le x\le 2\}$$

حيث

$$w=f(z)=z^2$$

الحل:

نلاحظ أن :

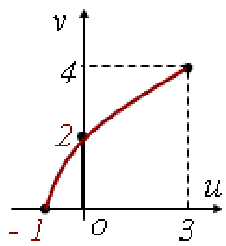
$$w=(x+i)^2=(x^2-1)+i(2x)=u+iv$$

$$\therefore u=x^2-1,\quad v=2x$$

وبالتخلص من x نحصل على $u=\left(\frac{v}{2}\right)^2-1$

و هي معادلة قطع مكافئ في مستوى -w حيث $-1\le u\le 3$ لأن $(u=x^2-1,\quad 0\le x\le 2)$ وكذلك $0\le v\le 4$ لأن

$(v=2x,\qquad 0\le x\le 2)$



في المثال السابق تحولت قطعة المستقيم إلى منحنى (جزء من قطع المكافئ)

الدوال الأولية(البسيطة) المركبة :

Elementary complex functions

(١) الدالة الأسية المركبة:

Complex exponential function

للعدد المركب $z=x+iy$ تعرف الدالة الأسية المركبة e^z أو $\mathrm{Exp}(z)$ كالآتي :

$$\mathrm{Exp}(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \mathrm{cis}\ y$$

حيث e^z تختزل إلى الدالة الأسيه الحقيقية e^x عندما $y=0$
ونلاحظ أن $e^0 = 1$ كذلك $e^z \neq 0$ لجميع قيم z من المستوى المركب .

وبالتالي فإن مجال e^z هو مجموعة الأعداد المركبة C والمدى هو مجموعة الأعداد المركبة ما عدا الصفر أي $C - \{0\}$

نلاحظ أن :

$$|e^z| = |e^x||e^{iy}| = e^x = e^{\mathrm{Re}.z} > 0$$

$$\arg.e^z = \arg.e^x(\cos y + i\sin y) = y \pm 2n\pi$$

$$= \mathrm{Im}.z \pm 2n\pi, \quad n=0,1,\ldots$$

هناك بعض الخصائص للدالة e^z مشابهة لحالة الدالة e^x وهناك بعض الخصائص المختلفة .

الخصائص المتشابهة :

$$(1)e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2} \quad , \quad z_k=x_k+iy_k \quad , \quad k=1,2.$$

$$(2)\left(e^z\right)^n=e^{nz}.$$

$$(3)e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}.$$

$$(4)\frac{d}{dz}e^z=e^z$$

بعض الخصائص المختلفة :

(١) الدالة e^z دورية ودورتها $2\pi i$ لأن

$$e^{z+2\pi ki}=e^z e^{2\pi ki}=e^z\left[\cos(2\pi k)+i\sin(2\pi k)\right]=e^z \quad , \quad k \text{ integer}$$

ومن العلاقة السابقة نجد أن :

$$e^z=e^w \quad \Leftrightarrow \quad z=w+2\pi ki \quad ,$$

$$e^z=e^0=1 \quad \Leftrightarrow \quad z=2\pi ki \quad , \quad k \text{ integer}$$

$$\overline{e^z}=e^{\bar{z}} \quad (2)$$

حل المعادلة الأسية :

مثال:

أوجد حل المعادلة $e^z=4+3i$ (أي ابحث عن قيمة z)

الحل :

يمكن الحل بطريقتين

الطريقة الأولى :

يمكن حساب

$$e^z = w \quad \Leftrightarrow \quad |e^z| = |w| \quad , \arg .e^z = \arg .w$$

ومنها نحسب x,y وبالتالي z المطلوبة .

الطريقة الثانية :

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = w = u + iv$$

إذا بمساواة الشقين الحقيقي و التخيلي في طرفي المعادلة السابقة نجد أن

$$e^x \cos y = u \quad , \quad e^x \sin y = v \qquad \ldots (*)$$

$$\tan y = \frac{v}{u} \quad \Rightarrow \quad y = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

وبالتالي يمكن تعيين x من إحدى العلاقتين السابقتين (*).

بإتباع الطريقة الأولى نجد :

$$|e^z| = |w| = e^x$$

$$\arg .e^z = \arg .e^w = y \pm 2k\pi, \quad k \text{ is integer}$$

$$\text{Parg}.w \pm 2L\pi = y \pm 2k\pi$$

$$\therefore y = \text{Parg}.w \pm 2n\pi \; , \quad n = (L - k)$$

$$\therefore z = x + iy = \ln|w| + i\text{Parg}.w \pm 2n\pi$$

$$\text{i.e. } e^z = w \quad \Leftrightarrow z = \ln|w| + i\text{Parg}.w \pm 2n\pi \quad , n = 0, 1, \ldots$$

$$\therefore e^z = 4 + 3i \;\Rightarrow z = \ln|4 + 3i| + i\left[\text{Parg}.(4 + 3i) \pm 2n\pi\right] \quad , n = 0, 1, \ldots$$

إذا الآن يتعين علينا حساب :

$$e^z = 4 + 3i = 5, \quad \text{Parg}.(4 + 3i) = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

(١) دالة اللوغاريتم المركبة :
Complex logarithmic function

يعتبر اللوغاريتم في الحالة الحقيقية حالة خاصة من الحالة المركبة .
يرمز للوغاريتم الطبيعي للعدد المركب $z=x+iy$ بالرمز $\ln z$
واحيانا بالرمز $\log z$ ويعرف كالآتي :

للعدد المركب $z \neq 0$ نعرف لوغاريتمه بأنه أي عدد مركب $w=\ln z$ يحقق العلاقة :

$$e^{w} = z$$

لاحظ أن $z=0$ مستحيلة لأن $e^{w} \neq 0$ لجميع قيم w إذا $\ln 0$ غير معرف $(\ln 0 = -\infty)$ وعليه فإن مجال $\ln z$ هو $\mathbb{C} - \{0\}$
ولتعيين $w= \ln z$ نضع :

$$z = r^{i\theta} \quad , \quad w=u+iv$$

$$\therefore e^{w} = z \quad \Leftrightarrow \quad e^{u+iv} = re^{i\theta} \Rightarrow e^{u} = r \;,\; v=\theta=\mathrm{P}\arg z \pm 2n\pi$$

$$\therefore u=\ln r \,,\, v=\mathrm{P}\arg z \pm 2n\pi \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\ln z = w = u+iv$$

$$= \ln|z| + i(\mathrm{P}\arg z \pm 2n\pi) \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

أي أن w (دالة اللوغاريتم للعدد z) $(\ln z)$ هي مقدار متعدد القيم وله عدد لا نهائي من القيم .

القيمة الرئيسية للوغاريتم :

قيمة lnz المناظرة للقيمة الرئيسية $Parg.z$ يرمز لها بالرمز Lnz وتسمى القيمة الرئيسية من lnz لذلك

$$\mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i\ \mathrm{Parg}.z$$

نلاحظ أن Lnz هي دالة وحيدة القيمة بينما lnz متعددة القيم .

ملاحظات :

١ -قيم lnz لها نفس الجزء الحقيقي ويختلف جزءها التخيلي بمضاعفات 2π .

٢ -إذا كان z عدد حقيقي موجب فإن $Parg.z=0$ ويصبح Lnz مطابقا للحالة الحقيقية المعروفة حيث

$$\mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i0$$

٣ -إذا كان z عدد حقيقي سالب فنجد $Parg.z=\pi$ وعليه فإن

$$\mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i\pi$$

وهو عدد مركب (أي ان لوغاريتم العدد الحقيقي السالب هو عدد مركب وليس عدد حقيقي بحت ، ويحتوي هذا العدد المركب على $i\pi$).

مثال:

$$(1)\ln(1)=\ln|1|+i(\text{Parg}.1\pm 2k\pi) \quad , \ k \text{ integer}$$
$$= \ 0 \ \ +2k\pi i \ \ = 2k\pi i$$
$$(2)\ln(-1)=\ln|1|+i(\text{Parg}.(-1)+2k\pi) \quad , \ k \text{ integer}$$
$$= \ 0 \ \ +i(\pi+2k\pi) = (2k+1)\pi i$$

نلاحظ أن القيمة الرئيسية :

$$\text{Ln } 1=0 \quad \text{at} \quad k{=}0$$
$$\text{Ln } (-1)=\pi i \quad \text{at} \quad k{=}0$$
$$e^{i\pi}=-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

ملاحظه(1) :

العلاقات المشهوره في حالة اللوغاريتم الطبيعي الحقيقي تظل كما هي في الحالة المركبة مثلا :

$$(1)\ln(z_1.z_2)=\ln z_1+\ln z_2$$
$$(2)\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\ln z_1-\ln z_2$$

ولكن هذه العلاقات يجب أن تفهم في المعنى الآتي :
كل قيمة من طرف هي قيمة محتواه ضمن قيم الطرف الآخر .

مثال توضيحي : للعلاقات (1) و(2) السابقة
إذا كانت

$$z_1=z_2=e^{i\pi}=-1$$

فإذا أخذنا $\ln z_1=\ln z_2=i\pi$ إذا (1) تتحقق شريطة أن نكتب

$$\ln(z_1 z_2)=\ln 1=2\pi i$$

و هذا بالطبع ليس صحيحا للقيمة الرئيسية حيث

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \ln 1 = 0$$

ملاحظة (2) :

$$\ln(e^z) = z \pm 2n\pi i, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

ملاحظة (3) :

$$\ln z^n = n \ln z$$

ليست صحيحة دائما .

مثال على ذلك :

$$\ln i^2 \neq 2 \ln i$$

حيث

$$\ln(i) = \ln|i| + i(\mathrm{P}\arg i + 2k\pi) \;, \quad k \text{ is integer}$$

$$= \ln|1| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$= \quad 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\therefore 2\ln(i) = i(\pi + 4k\pi) \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\ln(i)^2 = \ln|i^2| + i(\mathrm{P}\arg i^2 + 2k\pi) \;, \quad k \text{ is integer}$$

$$= \; 0 \; + i(\mathrm{P}\arg(-1) + 2k\pi)$$

$$= i(\pi + 2k\pi) \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

واضح ان $(1) \neq (2)$

سؤال للأعضاء : متى تصح علاقة التساوي ؟....

القوة العامة :

$(z_1)^{z_2}$ يمكن كتابتها في الصورة

$$(z_1)^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$$

مثال : احسب قيمة $(i)^i$.

الحل:

$$(i)^i = e^{i \ln i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}i \pm 2k\pi}$$

(لاحظ أن كل هذه القيم حقيقية و القيمة الرئيسية عند $k=0$ هي $e^{-\frac{\pi}{2}}$)

(١) الدوال الدائرية (المثلثية) المركبة والدوال الزائدية المركبة :

Trigonometric and hyperbolic complex functions

اولا: الدوال الدائرية (المثلثية) المركبة :

Trigonometric functions

تعرف هذه الدوال بالعلاقات الآتية :

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \quad , \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

هذه العلاقات لا ترتبط بالمثلث كما في حالة المتغير الحقيقي حيث z عدد مركب ومع ذلك فإنها تعطى متطابقات مشابهة تماما للمتطابقات الهندسية (المثلثية) في الحالة الحقيقية .

نلاحظ أن الدوال السابقة هي دوال دوريه فمثلا كل من الدالتين sin z ,cos z دوريه دورتها 2π أي

$$\sin(z+2\pi)=\sin z$$

$$\cos(z+2\pi)=\cos z$$

أيضا نلاحظ انها تحقق مثل العلاقات التالية :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$$

$$\sin(-z)=-\sin z$$

$$\cos(-z)=\cos z$$

ملاحظة : توجد بعض الفروق عن المتغير الحقيقي

١ ـنعلم مثلا :

$$|\sin x|\le 1 \quad , \quad |\cos x|\le 1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

في حين أنه في مجال الأعداد المركبة من الممكن أن يكون

$$|\sin x|\to\infty \quad , \quad |\cos x|\to\infty$$

$\overline{\cos z}=\cos\bar{z} \qquad , \qquad \overline{\sin z}=\sin\bar{z}$ -2

ثانيا : الدوال الزائدية المركبة :

Hyperbolic functions

تعرف الدوال الزائدية المركبة تماما كما في الحقيقي بالعلاقات الآتيه :

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \quad , \quad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \dots$$

وتصح هنا جميع المتطابقات المعروفة التي تحقق نظيراتها في المجال الحقيقي على سبيل المثال :

$$\cosh^{2} z - \sinh^{2} z = 1$$

ولكن في المجال المركب نلاحظ أنه يوجد ارتباط بين الدوال الزائدية المثلثية المركبة والدوال الزائدية المركبة كالآتي :

$$\sin(iz) = i\sinh z \quad , \quad \cos(iz) = \cosh z \quad , \quad \tan(iz) = i\tanh z$$

$$\sinh(iz) = i\sin z \quad , \quad \cosh(iz) = \cos z \quad , \quad \tanh(iz) = i\tan z$$

التمارين

1- اوجد معادلة المنحنى الذي يمثل الدالة $w=f(z)=z^2$ حيث مجال f هو

$$D=\{z:z=1+t+it \quad , \quad 0\le t\le 1\}$$

2- بين كيف تتحول النقط و الاشكال الآتيه تحت تأثير الراسم $w=z^2$ إلى المستوى –w

أ- النقطتين $P(2,2)$ ، $Q(1,0)$.

ب- القطعة المستقيمة z=iy حيث $0\le y\le a$.

جـ- القطعة المستقيمة z=x حيث $0\le x\le b$.

3- تحت تأثير التحويل w=iz+i بين ان نصف المستوى $x>0$ يتحول إلى نصف المستوى $v>1$.

4- بين ان المنطقة في المستوى – z المعطاة بالعلاقات $x>0$ ، $0<y<2$ تتحول إلى منطقة في المستوى – w معطاة بالعلاقة - $1<u<1$، $v>0$ تحت تأثير التحويل (الراسم) $w=iz+1$

5- بين ان التحويل $w=\dfrac{2z+3}{z-4}$ يحول الدائرة $z\bar{z}-2(z+\bar{z})=0$ إلى الخط المستقيم المعطى في الصورة $2(w+\bar{w})+3=0$.

6- بين ان التحويل $w = \frac{z-1}{z+1}$ ينقل المحور التخيلي في المستوى – z إلى الدائرة $|w| = 1$.

7- بين ان التحويل $w = \frac{z-1}{z+1}$ ينقل محور x (أي y=0) في المستوى – z إلى المحور الحقيقي في المستوى – w (أي الى v=0) حيث

$$w = u + iv, \quad z = x + iy$$

8- برهن ان التحويل ثنائي الخطية $w = \frac{z-1}{z+1}$ ينقل نصف المستوى الايسر في المستوى – z إلى خارج الدائرة $|w| = 1$.

أوجد معادلة المنحنى الذي يمثل الدالة :

$$w = f(z) = z^2$$

حيث أن مجال f هو :

$$D = \{z : z = 1+t+it \ , \ 0 \le t \le 1\}$$

الحل

$$w = u + iv = z^2 = (1+t+it)^2$$

$$w = (1+t)^2 - t^2 + 2it(1+t)$$

$$\therefore \ u = 2t+1 \quad , \quad v = 2t(1+t)$$

$$\therefore \ t = \frac{1}{2}(u-1)$$

$$\therefore \ v = (u-1)\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right)$$

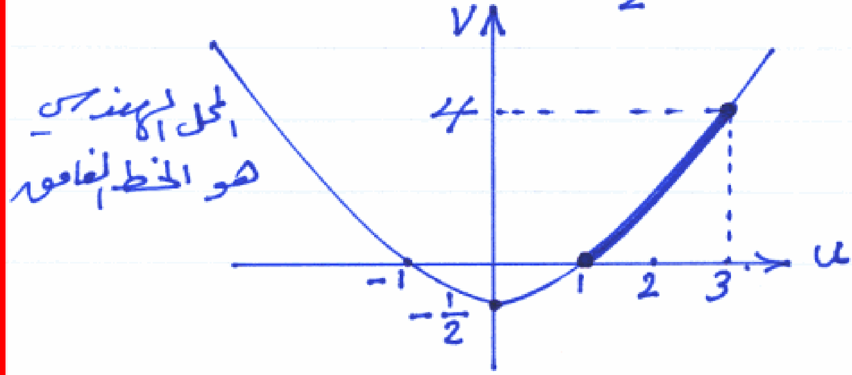
$$\therefore \ 2v = u^2 - 1$$

$$\therefore \ (u-0)^2 = 2\left(v + \frac{1}{2}\right)$$

$\therefore$ المنحنى الذي يمثل الدالة w هو قطع مكافئ رأسه $(0, -\frac{1}{2})$ وفتحته إلى أعلى ومحور تناظره هو المحور $V'V$

$\because \ 0 \le t \le 1 \quad \therefore \ 1 \le u \le 3$

$\because \ v = \frac{1}{2}(u^2 - 1) \quad \therefore \ 0 \le v \le 4$



مع تحيات
محمد خالد غزول

الدرس الخامس

نهاية الدالة المركبة :

Limit of the complex function

تعريف :

الدالة $w=f(z)$ يقال ان لها النهاية L عندما تقترب z من z_0 إذا أعطينا $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث

$$|f(z)-L|<\varepsilon \Leftarrow 0<|z-z_0|<\delta$$

ونكتب في هذه الحاله

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=L$$

ملاحظه: إذا وجدت نهاية الدالة $f(z)$ عندما $z\to z_0$ فإن هذه النهاية وحيدة .

مثال (1) :

اثبت أن $\lim_{z\to 2}\frac{z^2-4}{z-2}=4$ (وذلك بإستخدام التعريف).

الحل:

بوضع $f(z)=\frac{z^2-4}{z-2}$ فنجد أن $f(z)$ ليست معرفة عند $z=2$

وعندما $z\neq 2$ نجد أن :

$$f(z)=\frac{(z+2)(z-2)}{z-2}=(z+2)$$

$$\therefore \left|f(z)-4\right| = \left|z+2-4\right| = \left|z-2\right|, \quad z \neq 2$$

الآن بإعطاء $\varepsilon > 0$ نختار $\delta = \varepsilon$

$$\therefore 0 < \left|z-2\right| < \delta \to \left|f(z)-4\right| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{z \to 2} f(z) = 4$$

مثال (2) :

لتكن

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{if} \quad z \neq i \\ 0 & \text{if} \quad z = i \end{cases}$$

بين أن

$$\lim_{z \to i} f(z) = -1$$

الحل :

عندما $z \to i$ نجد $f \to i^2 = -1$ فنتوقع أن $\therefore \lim_{z \to i} f(z) = -1$

لإثبات ذلك يجب أن نبين أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\therefore 0 < \left|z-i\right| < \delta \to \left|z^2+1\right| < \varepsilon$$

الآن

$$\left|z^2+1\right| = \left|(z+i)(z-i)\right| = \left|z+i\right|\left|z-i\right| \leq \delta\left|z+i\right|$$

(توضيح: نلاحظ أنه إذا أمكن أيجاد $\delta > 0$ تحقق متطلبات التعريف إذا يمكن أختيار قيمة δ بحيث $\delta \leq 1$ محققة متطلبات التعريف .)

الآن :

$$0<|z-i|<\delta \to |z+i| = |z-i+2i|$$
$$\leq |z-i|+|2i|$$
$$<\delta+2$$
$$\therefore |z^2+1| \leq \delta(\delta+2) = \delta^2+2\delta$$

فإذا كانت

$$\delta^2 \leq \delta \Leftarrow \delta \leq 1$$

وبالتالي:

$$|z^2+1| \leq (\delta+2\delta) = 3\delta < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

فإذا اخترنا $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ نحصل على :

$$0<|z-i|<\delta \to |z^2+1|<\varepsilon$$
$$\therefore \lim_{z\to i} f(z) = -1$$

ملاحظه :

في حالة دالة المتغير الحقيقي يوجد مسارين اثنين فقط خلالهما نجد المتغير $x \to x_0$ وبالتالي نميز بين النهاية اليمنى و النهاية اليسرى عند x_0 وأن النهاية عند x_0 تتواجد إذا وفقط إذا كان النهاية اليمنى = النهاية اليسرى وكل منهما لها قيمة .

لكن في حالة الدوال ذات المتغير المركب يوجد عدد لا نهائي من المسارات التي من خلالها يقترب المتغير z من z_0 وبالتالي فإنه

إذا كانت $f(z)$ تقترب إلى قيمتين مختلفتين عندما $z \to z_0$ عبر مسارين مختلفين فإن $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ ليس لها وجود.

مثال (3) :

أثبت أن الدالة $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$ ليس لها نهاية عندما $z \to 0$

الحل:

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x - iy}{x + iy}$$

بفرض $z \to 0$ خلال المسار y=mx عبر هذا المسار نجد

$$f(z) = \frac{x - imx}{x + imx} = \frac{1 - im}{1 + im} \quad , \quad x \neq 0$$

أي إذا كان $f(z) = \dfrac{x - iy}{x + iy}$ عبر المسار y=mx فإن

$$f(z) \to \frac{1 - im}{1 + im}$$

والتي تأخذ قيما مختلفة وذلك لقيم m المختلفة .

ومن ثم فإن f(z) ليس لها نهاية عند 0.

مثال (4) :

أثبت أن نهاية الدالة $f(z) = \dfrac{x^2 y^2}{\left(x + y^2\right)^3}$ غير موجودة عندما $z \to 0$.

الحل :

إذا f(z) تأخذ القيمة الآتية عبر المسار $y^2 = mx$ أو $x=my^2$

$$\therefore f(z)=\frac{mx^3}{(x+mx)^3}=\frac{m}{(1+m)^3}$$

فإذا كان $z\to 0$ خلال المسار $y^2=mx$ فإن

$$f(z)\to\frac{m}{(1+m)^3}$$

والتي تعتمد على قيمة m .

أي ان النهاية تعتمد على المسار وعليه تأخذ قيما مختلفة وبالتالي ليس لها وجود .

تعريف :

(١) نقول أن $\lim_{z\to\infty} f(z)=L$ إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد $m>0$ بحيث

$$|z|>m\to|f(z)-L|<\varepsilon$$

(٢) نقول أن $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ إذا كان لعدد $n>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث

$$0<|z-z_0|<\delta\to|f(z)|>n$$

(٣) نقول أن $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$ إذا كان بإعطاء $n>0$ يوجد $m>0$ بحيث

$$|z|>m\to|f(z)|>n$$

نظريات على النهايات :

نظرية :

ليكن f,g دالتين لهما نهايتين عند z_0 فإذا كان

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L, \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) = M$$

$$\therefore \ (i)\ \lim_{z\to z_0}\left[f(z) \pm g(z)\right] = L \pm M$$

$$(ii)\ \lim_{z\to z_0} f(z).g(z) = L.M$$

$$(iii)\ \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

نظرية :

(١) إذا كان $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ فإن $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{L}$

(٢) إذا كان $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ فإن $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |L|$

(٣) $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{z\to z_0} Re.f(z) = Re.L \qquad , \qquad \lim_{z\to z_0} Im.f(z) = Im.L$$

مثال:

اوجد نهاية $\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i}$.

الحل:

نلاحظ أن كلا من البسط والمقام يساوي صفر عند التعويض مباشرة بالقيمة $-i$ أي ان التعويض المباشر يعطي $\frac{0}{0}$ وبالتحليل إلى عوامل والتبسيط نجد :

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i}=\lim_{z\to -i}\frac{(z-i)(z+i)}{z+i}=\lim_{z\to -i}(z-i)=-2i$$

اتصال الدوال المركبة :

Continuity of complex functions

تعريف :

لتكن f دالة ذات قيمة مركبة معرفة على مجال D من المستوى المركب . ولتكن $z_0 \in D$ إذا f يقال أنها متصلة عند z_0 إذا كان

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

وعليه فإن $f(z)$ تكون متصلة عند z_0 إذا كان لأي $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث

$$|z-z_0|<\delta \to |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

وتكون الدالة متصلة في المنطقة D إذا كانت متصلة عند كل نقطه من نقاطها .

نظرية :

(١) إذا كانت $g(z)$ و$f(z)$ دالتين متصلتين عند z_0 فإن

$$f(z)\pm g(z)\ \ ,\ \ f(z).g(z)\ \ ,\ \ \overline{f(z)}$$

تكون دوال متصلة عند z_0 كذلك $f(z)/g(z)$ تكون متصلة عند z_0 بشرط $g(z)\neq 0$.

(٢) إذا كان $f(z)$ متصلة عند z_0 فإن $|f(z)|$ ايضا متصلة عند z_0.

(٣) الدالة $f(z)$ تكون متصلة عند z_0 إذا وفقط إذا كان كل من $\mathrm{Re}.z$,$\mathrm{Im}.z$ متصلة عند z_0.

(٤) أي كثيرة حدود $p(z)$ تكون متصلة عند كل نقطة من المستوى .

مثال:

إبحث اتصال الدالة $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z+i}$ عند كل نقطة من نقط المستوى المركب .

الحل:

الدالة غير معرفة عند $z=-i$ وبالتالي فهي ليست متصلة عندها ولكن

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{z\to -i}\frac{(z-i)(z+i)}{z+i}=-2i=f(-i)$$

فإذا عرفنا الدالة كالآتي :

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2+1}{z+i} & \text{if} \quad z\neq -i \\ -2i & \text{if} \quad z=-i\end{cases}$$

فإنها تصبح متصلة عند جميع نقط المستوى المركب .

ملاحظه :

الدالة المركبة $f(z)$ تكون متصلة عند $z_0=x_0+iy_0$ إذا وفقط إذا كان الجزء الحقيقي والجزء التخيلي من $f(z)$ بإعتبارهما دالتين حقيقيتين في متغيرين حقيقيين x,y كل منهما دالة متصلة عند (x_0,y_0) .

مثال :

(١) الدالة $f(z)=2xy^2+i(x-y)$ متصلة عند أي نقطة وذلك لأن كثيرتي الحدود $2xy^2,(x-y)$ متصلتان عند أي x,y .

(٢) الدالة $f(z)=\cos y+ie^{xy}$ متصلة عند أي نقطة وذلك لأن $u(x,y)=\cos y$ متصلة لكل y والدالة $v(x,y)=e^{xy}$ متصلة لكل x,y .

ملاحظه هامه (1) :

عندما تكون الدالة المركبة متصلة على المجال D فهي بالضرورة متصلة عند x بإعتبار y ثابت وكذلك متصلة عند y بإعتبار x ثابت .

ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح بمعنى :

الإتصال بالنسبة للمتغير x عند z_0، الاتصال بالنسبة للمتغير y عند z_0 لا يؤدي بالضرورة إلى الإتصال بالنسبة للمتغير z عند z_0

مثال توضيحي :

الدالة :

$$f(z)=f(x+iy)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0 \quad , & z=0\end{cases}$$

لو اعتبرنا الدالة بالنسبة إلى x فقط بإعتبار y منعدم و العكس نجد أن :

$$f(x+i.0)=\varphi(x)=\frac{0.x}{x^2}=0 \quad , \quad x\neq 0$$

إذا $\varphi(x)$ متصلة عند $z_0=(x_0,y_0)=(0,0)$ حيث

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\varphi(x)=0=f(0)=\varphi(0)$$

ايضا بالنسبة إلى y فإن

$$f(0+iy)=\psi(y)=\frac{0.y}{y^2}=0 \qquad , \quad y\neq 0$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}}\psi(y)=0=f(0)=\psi(0)$$

أي أن $\psi(y)$ متصلة عند $z_0=(x_0,y_0)=(0,0)$

ولكن بإعتبار $z=(x+iy)\to 0$ عن طريق المسار y=mx

$$\therefore f(z)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}, \qquad z\neq 0$$

إذاً $\lim_{z\to 0} f(z)$ تعتمد على m أي تعتمد على الطريقة التي تؤول بها z إلى الصفر وبالتالي النهاية غير موجودة مما يؤدي إلى عدم إتصال f(z) عند z=0.

ملاحظه هامه (2) :

إذا كانت الدالة f متصلة على مجال مغلق D فإنها تكون محدودة

.

الاتصال المنتظم :

Uniform continuity

تعريف:

إذا كان لأي $0 < \varepsilon$ يمكن إيجاد $0 < \delta$ بحيث $|z_1 - z_2| < \delta$ فإن

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

حيث z_1, z_2 أي نقطتين اختيارتين من المجال .

مثال (1) :

أثبت أن الدالة $f(z) = z^2$ منتظمة الإتصال في المنطقة $|z|<1$.

الحل:

(المطلوب إثبات انه لأي $0 < \varepsilon$ يوجد $0 < \delta$ بحيث

$|z_1^2 - z_2^2| < \varepsilon$ عندما $|z_1 - z_2| < \delta$ وبحيث تعتمد δ فقط على ε

وليس على z).

نفرض ان z_1, z_2 أي نقطتين في المنطقة $|z|<1$ إذا

$$(z_1) - f(z_2)| = |z_1^2 - z_2^2| = |z_1 - z_2||z_1 + z_2|$$

$$\leq |z_1 - z_2|(|z_1| + |z_2|) < 2|z_1 - z_2| \qquad (\text{where}\ |z|<1)$$

إذاً

$$|z_1 - z_2| < \delta \rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < 2\delta$$

إذا كانت $0 < \varepsilon$ فإننا نحتاج فقط بأن نأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ لنحصل على

$$\left|z_1 - z_2\right| < \delta \rightarrow \left|f\left(z_1\right) - f\left(z_2\right)\right| < \varepsilon$$

حيث تحقق التعريف بإختيار δ معتمدة على ε فقط وليس على z أي ان $f(z)$ منتظمة الاتصال في المنطقة $|z|<1$.

مثال (2) :

اثبت أن الدالة $f\left(z\right) = \frac{1}{z}$ ليست منتظمة الاتصال في المنطقة $0 < |z| < 1$.

الحل :

بإختيار $0 < \varepsilon$ ولتكن $0 < \delta < 1$ وبأخذ عددين مركبين في المنطقة $|z|<1$ مثلا :

$$z_1 = \delta \quad , \quad z_2 = \frac{\delta}{1+\varepsilon}$$

نجد أن كلا من z_1, z_2 ينتمي إلى المنطقة المعطاة حيث يكون $|z_2| < 1 \quad , \quad |z_1| < 1$ وكذلك نجد أن

$$\left|z_1 - z_2\right| = \left|\delta - \frac{\delta}{1+\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta\right| < \delta$$

$$\left|f\left(z_1\right) - f\left(z_2\right)\right| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| > \varepsilon$$

إذاً $f(z)$ لا يمكن ان تكون منتظمة الاتصال على المنطقة المعطاة .

مثال (3) :

اثبت ان الدالة $f(z)=|z|^2$ منتظمة عند جميع نقط المستوى المركب .

الحل :

حيث أن

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=|z|^2=x^2+y^2$$

$$\therefore u(x,y)=x^2+y^2 \quad , \quad v(x,y)=0$$

وكلا من $u(x,y),v(x,y)$ كدوال حقيقية متصلة عند جميع النقط .

إذاً $f(z)$ دالة متصلة .

نظرية :

إذا كانت $f(z)$ متصلة في مجال مغلق ، فإنها تكون منتظمة الاتصال في هذا المجال .

التمارين

(1) إذا كانت $f(z) = x + i(x + 2y)$
فبين بإستخدام التعريف أن
$\lim_{z \to i} f(z) = 2i$.

(2) إذا كانت $z \to 2i$
فبين بإستخدام التعريف أن
$\lim_{z \to 2i} z^2 = -4$.

(3) بين بإستخدام تعريف النهاية أن
$\lim_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$.

(4) لتكن f معرفة بالمتساوية $f(z) = \dfrac{z^2}{|z|^2}$
فبين أن

$\lim_{z \to 0} f(z)$ غير موجوده .

(5) بين أن $\lim_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ غير موجودة .

(6) أوجد $\lim_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z}$.

(7) اثبت أن $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.

2- بين كيف تتحول النقط والاشكال الآتيه تحت تأثير الراسم $w = z^2$ إلى المستوى –w

أ -النقطتين $P(2,2)$ ، $Q(1,0)$.

ب- القطعة المستقيمة z=iy حيث $0 \le y \le a$.

جـ - القطعة المستقيمة z=x حيث $0 \le x \le b$.

الحل :

حيث أن

$$z = (x, y) = r\text{cis}\theta$$

$$w = (u, v) = R\text{cis}\varphi$$

$$\therefore w = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\text{Also,} \quad w = z^2 = r^2\text{cis}2\theta$$

$$\therefore R^2 = r^2 \ , \quad \varphi = 2\theta \qquad \ldots\ldots(2)$$

(أ) إذا كانت $p(2,2)$ نقطة في المستوى – z

إذاً بالتعويض عن x,y في (1) نحصل على صورة P في مستوى –w لتكن :

$$p' = (4 - 4, 2.2.2) = (0, 8)$$

وبالمثل صورة $Q(1,0)$ هي $Q'(1,0)$

(ب) نعتبر القطعة المستقيمة z=iy حيث $0 \le y \le a$ من العلاقة (1) ومع ملاحظة أن x=0 نجد أن

$$u=-y^2 \quad , \quad v=0 \quad \Rightarrow \quad w=-y^2$$

فعندما تتحرك z عبر محور Y من $a \to 0$ فإن w تتحرك عبر محور u السالب من $-a^2 \to 0$.

(جـ) بالنسبة للقطعة z=x حيث $0 \le x \le b$

$$\therefore u=x^2 \quad , \quad v=0 \quad \Rightarrow \quad w=x^2$$

عندما تتحرك z عبر محور X من $b \to 0$ فإن w تتحرك عبر محور u الموجب من $b^2 \to 0$.

3- تحت تأثير التحويل w=iz+i بين ان نصف المستوى $x>0$ يتحول إلى نصف المستوى $v>1$.

الحل :

بفرض

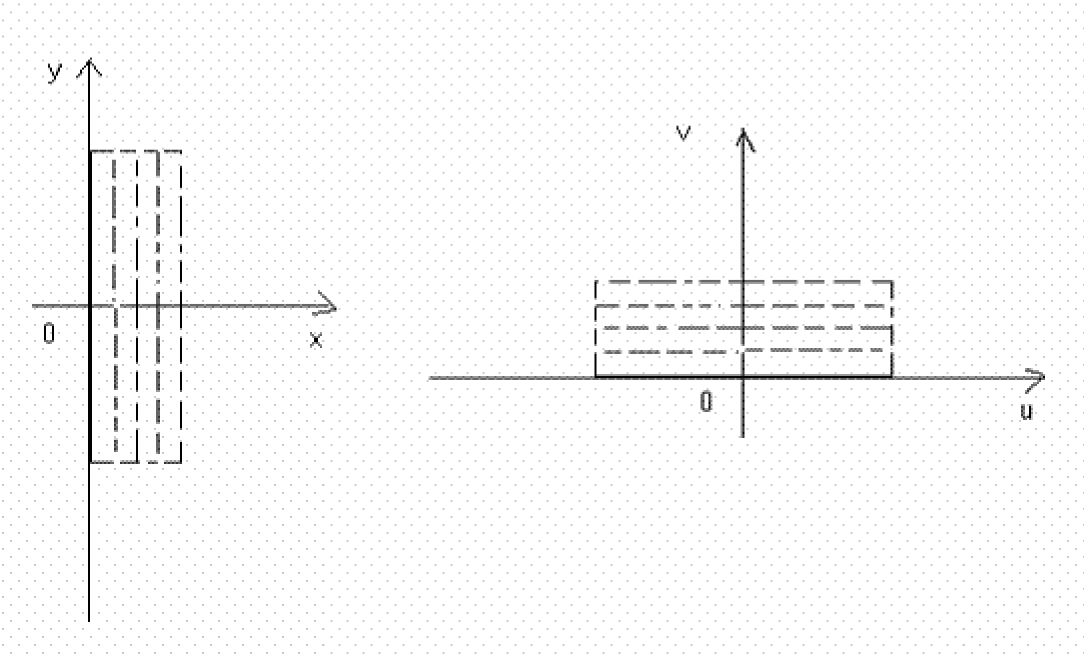
$$z=x+iy, \quad w=u+iv$$

$$\therefore w=iz+i$$

$$=i(x+iy)+i=-y+i(x+1)$$

$$\therefore u=-y \quad , \quad v=x+1$$

$$\therefore x>0 \quad \Leftrightarrow \quad v>1$$



إذاً نصف المستوى $x>0$

يتحول إلى نصف المستوى $v>1$.

4- بين ان المنطقة في المستوى – z المعطاة بالعلاقات $x>0$ ، $0<y<2$ تتحول إلى منطقة في المستوى – w معطاة بالعلاقة - $1<u<1$، $v>0$ تحت تأثير التحويل (الراسم) $w=iz+1$

الحل :

بفرض

$$z=x+iy, \quad w=u+iv$$

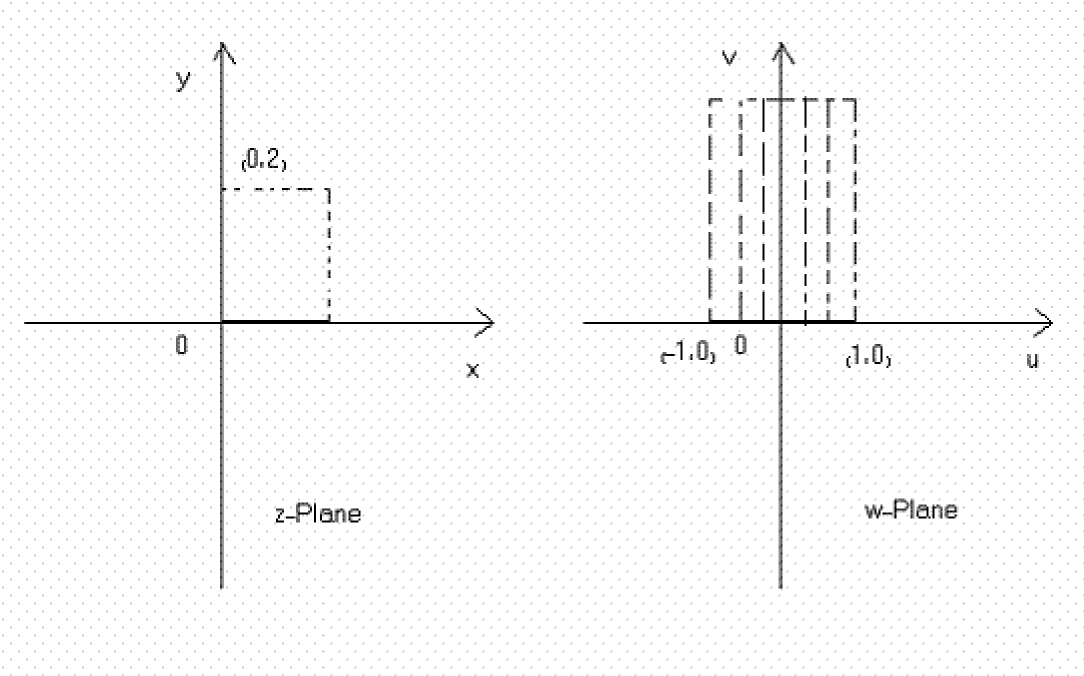
$$\therefore w=iz+1$$

$$=i(x+iy)+1$$

$$u+iv=(-y+1)+ix$$

$$\therefore u=1-y \quad , \quad v=x$$

$$\therefore x>0 \quad , \quad 0<y<2 \Leftrightarrow \quad v>0 \quad , \quad -1<u<1$$



5- بين ان التحويل $w = \dfrac{2z+3}{z-4}$ يحول الدائرة $z\bar{z} - 2(z+\bar{z}) = 0$ إلى الخط المستقيم المعطى في الصورة $2(w+\bar{w}) + 3 = 0$.

الحل :

بما أن

$$w = \frac{2z+3}{z-4}$$

$$\therefore w(z-4) = 2z+3$$

$$\therefore z = \frac{3+4w}{w-2}$$

إذاً صورة الدائرة $z\bar{z} - 2(z+\bar{z}) = 0$ تكون

$$\left(\frac{3+4w}{w-2}\right)\left(\frac{3+4\bar{w}}{\bar{w}-2}\right)-2\left(\frac{3+4w}{w-2}+\frac{3+4\bar{w}}{\bar{w}-2}\right)=0$$

بعد الإختصار نحصل على $2(w+\bar{w})+3=0$ وهي معادلة خط مستقيم .

١ ـبين ان التحويل $w=\frac{z-1}{z+1}$ ينقل المحور التخيلي في المستوى – z إلى الدائرة $|w|=1$.

الحل :

$$\begin{aligned}
|w|=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1 \\
&\Leftrightarrow \quad |z-1|=|z+1| \\
&\Leftrightarrow \quad |x+iy-1|=|x+iy+1| \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2=(x+1)^2+y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x=0
\end{aligned}$$

إذا التحويل $w=\frac{z-1}{z+1}$ ينقل المحور التخيلي $x=0$ إلى دائرة الوحدة $|w|=1$.

ايضا حيث أن النقطة $z=1$ ترسم إلى $w=0$ فإن نصف المستوى $x>0$ يرسم إلى النقط الداخلية للدائرة $|w|=1$.

7- بين ان التحويل $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ ينقل محور x (أي $y=0$) في المستوى – z إلى المحور الحقيقي في المستوى – w (أي الى $v=0$) حيث

$$w=u+iv,\quad z=x+iy$$

الحل :

$$y=\frac{1}{2i}\left(z-\bar{z}\right)=\frac{1}{2i}\left[\frac{1+w}{1-w}-\frac{1+\bar{w}}{1-\bar{w}}\right]=\frac{1}{2i}\left[\frac{2\left(w-\bar{w}\right)}{\left|1-w\right|^{2}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow w=\bar{w}\quad\Leftrightarrow\quad u+iv\quad\Rightarrow v=0$$

وهو محور u أي المحور الحقيقي في مستوى –w.

8- برهن ان التحويل ثنائي الخطية $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ ينقل نصف المستوى الايسر في المستوى – z إلى خارج الدائرة $|w|=1$.

الحل :

نحسب z بدلالة w إذا

$$z=\frac{1+w}{1-w}$$

$$\therefore \operatorname{Re} z=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1+w}{1-w}+\frac{1+\bar{w}}{1-\bar{w}}\right]=\frac{1-|w|^{2}}{|1-w|^{2}}<0\quad\Leftrightarrow\quad |w|>1$$

حل تمارين الدرس الخامس :

(1) إذا كانت $f(z)=x+i(x+2y)$ فبين بإستخدام التعريف أن

$\lim\limits_{z\to i} f(z)=2i$.

الحل :

لتكن $\varepsilon>0$ فعلينا إيجاد علاقة بين ε,δ بحيث

$$0<|z-z_0|<\delta \to |f(z)-L|<\varepsilon$$

لذلك نفرض أن $|z-i|<\delta$ إذاً

$$\begin{aligned}|f(z)-L| &= |x+i(x+2y)-2i|\\ &= |x+i(x+2y-2)|\\ &\le |x|+|x|+2|y-1| \qquad (*)\end{aligned}$$

ومن الفرض $|z-i|<\delta$ نجد أن

$$|z-i|=|x+i(y-1)|<\delta$$
$$\therefore |x|<\delta, \qquad |y-1|<\delta$$

وبالتعويض في $(*)$ نحصل على

$$|f(z)-L|\le 2\delta+2\delta=4\delta\le\varepsilon$$

وبالتالي فإن $\delta \le \frac{\varepsilon}{4}$ مما يحقق تعريف النهاية .

(2) إذا كانت $z \to 2i$ فبين بإستخدام التعريف أن
$\lim_{z \to 2i} z^2 = -4$.

الحل :

نفرض $\varepsilon > 0$ ونبحث عن علاقة بين ε وعدد حقيقي δ بحيث

$$0 < |z - z_0| < \delta \to |f(z) - L| < \varepsilon$$

لذلك نفرض أن $|z - 2i| < \delta$ ومن ذلك ينتج أن

$$\begin{aligned} |f(z) - L| = |z^2 + 4| &= |(z - 2i)(z + 2i)| \\ &= |z - 2i||(z - 2i + 4i)| \\ &\le |z - 2i||(|z - 2i| + |4i|)| \\ &< \delta(\delta + 4) \\ &= \delta^2 + 4\delta \qquad (*) \end{aligned}$$

فإذا كانت δ صغيرة فيمكن أن تكون $\delta < 1 \Leftarrow \delta^2 < \delta$

$$|f(z) - L| \le \delta^2 + 4\delta < \delta + 4\delta = 5\delta$$

فإذا فرضنا $\varepsilon \le 5\delta$ فإن $\delta \le \frac{\varepsilon}{5}$ ومن ذلك فإن $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ هي العلاقة المطلوبة .

(3) بين بإستخدام تعريف النهاية أن

$$\lim_{z\to z_0} z^2 = z_0^2.$$

الحل :

$$\begin{aligned}|f(z)-f(z_0)| &= |z^2 - z_0^2| = |(z-z_0)||(z+z_0)| \\ &= |z-z_0||z-z_0+2z_0| \\ &\le |z-z_0|\left(|z-z_0|+2|z_0|\right) \\ &< \ |z-z_0|^2 + 2|z_0||z-z_0|\end{aligned}$$

بفرض $\delta \le 1$ نجد أن

$$\begin{aligned}0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |z^2-z_0^2| &< \delta^2+2\delta|z_0| \\ &< \delta+2\delta|z_0| \\ &< \delta(1+2|z_0|)\end{aligned}$$

الآن بإعطاء $\varepsilon > 0$ وبأخذ

$$\delta = \begin{cases}\dfrac{\delta}{1+2|z_0|} & \\ 1 & (\text{which is smaller})\end{cases}$$

$$\therefore 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |z^2-z_0^2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} z^2 = z_0^2.$$

(4) لتكن f معرفة بالمتساوية $f(z)=\dfrac{z^2}{|z|^2}$ فبين أن

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ غير موجوده .

الحل :

لبحث وجود النهاية نفرض اقتراب z من z_0 خلال مسارين مختلفين فإذا وجدنا قيمتين مختلفتين للنهاية فهذا يدل على عدم وجودها .

المسار الأول

عبر المحور التخيلي أي $x=0$ فنجد

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z^2|}=\lim_{\substack{x=0\\ iy\to 0}}\frac{(x^2-y^2)+i(2xy)}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{iy\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

المسار الثاني

هو اقتراب z من الصفر على المسار $y=x$ نجد أن

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z^2|}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{0+i(2x^2)}{2x^2}=i$$

واضح عدم وجود النهاية لاعتماد قيمتها على المسار .

(5)بين أن $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$ غير موجودة .

الحل :

إذا كانت النهاية موجودة فيجب ألا تعتمد قيمتها على المسار أي على الطريقة التي تقترب بها z من النقطة 0

(أ) اعتبر $0 \to z$ عبر محور x إذاً y=0 وبالتالي :

$$y=0,\quad \bar{z}=x-iy \quad \Rightarrow \bar{z}=x,\quad z=x+iy \quad \Rightarrow z=x$$

إذاً

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

(أ) اعتبر $0 \to z$ عبر محور y إذاً x=0 وبالتالي

$$x=0,\quad \bar{z}=x-iy \quad \Rightarrow \bar{z}=-iy\,,\quad z=x+iy \quad \Rightarrow z=iy$$

إذاً

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{-iy}{iy}=-1$$

وبذلك اختلفت قيمة النهاية و هذا يثبت عدم وجودها .

(6)أوجد $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}$.

الحل :

بأخذ المسارين

$(II)\ y=0\ ,\ x\to 0 \quad , \quad (I)\ x=0\ ,\ y\to 0$

$$\therefore \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{x+iy\to 0}\frac{\sin(x+iy)}{x+iy}=1$$

$$\text{Path}(I) \quad \text{gives} \quad \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\frac{\sin(iy)}{iy}=\lim_{y\to 0}\frac{i\sinh y}{iy}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-e^{-y}}{2(y)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=1$$

$$\text{Path}(II) \quad \text{gives} \quad \lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\therefore \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

(7) اثبت أن $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$.

الحل :

$$
\begin{aligned}
\overline{\sin z} &= \overline{\sin(x+iy)} \\
&= \overline{\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)} \\
&= \overline{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y} \\
&= \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y \\
&= \sin x \cos(iy) - \cos x \sin(iy) \\
&= \sin(x - iy) \\
&= \sin \overline{z}
\end{aligned}
$$

الدرس السادس
إشتقاق الدوال المركبة
Different of complex functions

تعريف المشتقة :

لتكن f(z) دالة مركبة وحيدة القيمة معرفة على المجال D .
ولتكن $z_0 \in D$ (نقطة تجمع)(نقطة نهاية) للمجال D . إذا يقال أن f(z) قابلة للإشتقاق (تفاضلية) عند z_0 إذا وجدت النهاية الآتية :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

وبوضع $z = z_0 + h$ إذا عندما $z \to z_0$ فإن $0 \to h$ ونكتب في هذه الحالة :

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

مثال :

اوجد مشتقة الدالة $f(z) = z^2$ بإستخدام التعريف ؟

الحل :

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2-z_0^2}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}(z+z_0)$$
$$=2z_0 \qquad , \quad z\neq z_0$$

قواعد الإشتقاق :

جميع قواعد الإشتقاق في الحالة الحقيقة تظل كما هي (أي قواعد الجمع – الضرب – القسمة – قاعدة السلسلة ....) ، كذلك قاعدة لوبيتال وقواعد اشتقاق الدوال الأولية ($\sin z, e^z$,....) واشتقاق z^n .

مثال :

إذا كان $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ أوجد المشتقة $f'(z)$ وبين أين تكون $f(z)$ غير تفاضلية ؟

الحل :

$$f'(z)=\frac{(1-z)+(1+z)}{(1-z)^2}=\frac{2}{(1-z)^2}$$

وبالتالي فإن الدالة قابلة للتفاضل لجميع قيم z المحددة فيما عدا عند $z=1$ حيث لا توجد مشتقة .