مثال :

احسب مشتقة الدوال التاليه :

1- $\tan\left(z^2-3z+4i\right)$

2- $\tan^2\left(z^2-3z+4i\right)$

الحل :

$$-f'(z)=[\sec^2\left(z^2-3z+4i\right)](2z-3)$$

$$-f'(z)=2\tan\left(z^2-3z+4i\right)[\sec^2\left(z^2-3z+4i\right)](2z-3)$$

قابلية الإشتقاق (التفاضل) والإتصال :

نظرية :

إذا كانت الدالة $f(z)$ قابلة للتفاضل عند $z_0 \in D$ ، إذاً فهي متصلة عند z_0.

البرهان :

إذا كانت z نقطة في D ، $z \neq z_0$ فيمكن كتابة

$$f(z)-f(z_0)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.(z-z_0)$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $z \to z_0$ فإن

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)-f(z_0)\right]=f'(z).0=0$$

وبالتالي $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ ومن ثم $f(z)$ متصلة عند z_0.

سؤال :

هل العبارة التالية صحيحه ام خاطئه مع التعليل:

إذا كانت الدالة $f(z)$ متصلة عند z_0 إذاً فهي قابلة للتفاضل عند z_0.

الحل :

العباره خاطئة

مثال يثبت خطأ العبارة :

الدالة $f(z)=\bar{z}$ هي دالة متصلة عند كل نقطة في المستوى المركب
ولكنها غير قابلة للتفاضل عند أي نقطة .
فهي متصلة حيث مكوناتها $x,-y$ دوال متصلة .

التوضيح :

إذا كانت $z \neq z_0$ فبوضع $z = z_0 + h$ إذا $h \to 0$
وبالتالي من تعريف المشتقة نجد

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{(z_0 + h)} - \overline{z_0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

وهذه النهاية غير موجودة

لإثبات ذلك :

بفرض

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h}=\lim_{S\to 0}\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{-2i\theta}=g(\theta) \qquad \text{depends on } \theta$$

أي أن قيمة النهاية تعتمد على θ (θ لها عدد لا نهائي من القيم).

ملاحظة : (الفرق بين إشتقاق الدوال المركبة واشتقاق الدوال الحقيقية)

إذا كانت $f(z)$ قابلة للتفاضل ولو لمرة واحدة في مجال يشتمل على نقطة z_0

فإنها تكون قابلة للتفاضل أي عدد من المرات عند z_0 .

على عكس الحال في المجال الحقيقي

فإنه من الممكن أن تكون دالة حقيقية $f(x)$ قابلة للتفاضل مرة ولا تقبل للتفاضل مرة أخرى

مثال على ذلك :

اعتبر الدالة الحقيقية :

$$f(x)=\int |x|\ dx \qquad , \quad x\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=|x|$$

ولكن $f''(0)$ لا يمكن حسابها حيث (توجد نهايتان مختلفتان من تعريف المشتقة) .

قابلية الاشتقاق وشقي الدالة المركبة :

معادلتي كوشي – ريمان :

The Cauchy-Riemann equations

نظرية :

لتكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة تفاضلية (قابلة للإشتقاق) عند نقطة $z_0=(x_0,y_0)$

إذا $u(x,y)$، $v(x,y)$ لهما مشتقات جزئية من الرتبة الأولى $u_x(x_0,y_0), u_y(x_0,y_0), v_x(x_0,y_0), v_y(x_0,y_0)$ عند (x_0,y_0)

إذا هذه المشتقات الجزئية تحقق معادلات كوشي – ريمان الآتية :

$$u_x = v_y \qquad , \qquad u_y = -v_x$$

كذلك فإن المشتقة تعطى من العلاقات :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(z_0) + iv_x(z_0) \\ &= v_y(z_0) - iu_y(z_0) \qquad , \qquad z_0 = (x_0, y_0) \end{aligned}$$

ملاحظة (1) :

حيث أن

$$f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

$$\therefore |f'(z_0)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$$

$$= u_x v_y - u_y v_x$$

$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

ملاحظة (2) : (اختبار للدوال متى تكون غير قابلة للإشتقاق)

عدم تحقق م (ك- ر) $\Leftarrow$ عدم تفاضلية الدالة .

تنويه : م (ك – ر) اختصار لمعادلتي كوشي ريمان

أي إذا لم تتحقق معادلتي كوشي – ريمان للدالة عند نقطة فنستنتج أن الدالة ليست تفاضلية عند تلك النقطة .

مثال : اختبر اشتقاق الدالة الآتيه :

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

الحل :

$$\therefore u(x,y) = x \quad , \quad v(x,y) = -y$$

$$\therefore u_x(x,y) = 1 \quad , \quad v_y(x,y) = -1$$

$$u_y(x,y) = 0 \quad , \quad v_x(x,y) = 0$$

$$\therefore u_x \neq v_y$$

أي أن م(ك-ر) غير محققة عند أي نقطة z .

ملاحظه (3) :

معادلتي كوشي – ريمان غير كافية لتحديد تفاضلية الدالة عند نقطة ما .

مثال توضيحي :
بفرض

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{if} \quad z\neq 0\\ 0 & \text{if} \quad z=0\end{cases}$$

بين أن هذه الدالة تحقق م (ك ــ ر) عند z=0 إلا أنها غير تفاضلية عند z=0 .

الحل :

نلاحظ أن

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{if} \quad (x,y)\neq 0\\ 0 & \text{if} \quad (x,y)=0\end{cases}$$

$$v(x,y)=0$$

(ومن تعريف المشتقة)

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{0-0}{h}\right]=0$$

بالمثل يمكن أن نجد $u_y(0,0)=0$ وأيضا

$$v_x(0,0)=0 \quad , \quad v_y(0,0)=0$$

وبالتالي فإن

م (ك-ر) تتحقق عند $z=0$.

الآن : خلال المسار $y=mx$ نجد

$$f(z)=\frac{xmx}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}, \qquad x\neq 0$$

فإذا كان خلال المسار $y=mx$ فإن

$$f(z)\to\frac{m}{1+m^2}\neq f(0)$$

والتي تختلف قيمتها بإختلاف قيم m

وبالتالي $f(z)$ ليس لها نهاية عندما $z\to 0$

ومن ثم $f(z)$ غير متصلة عند $z=0$

إذا المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالتين u,v تحقق م(ك-ر) عند أي نقطة في المستوى .

ونعلم أن $u(x,y), v(x,y)$ ومشتقاتهما الجزئية من الرتبة الأولى متصلة عند كل نقطة في المستوى .

إذا $f(z)$ تفاضلية عند كل نقطة من المستوى المركب .

يمكن حساب تفاضل $f(z)$ من العلاقة :

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^z$$

مثال :

ابحث تفاضلية الدالة $f(z) = |z|^2$ بإستخدام م(ك-ر) عند نقطة الأصل.

الحل :

نلاحظ

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\therefore u(x,y) = x^2 + y^2 \qquad , \qquad v(x,y) = 0$$

$$\therefore u_x(x,y) = 2x \qquad , \qquad u_y(x,y) = 2y$$

$$v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0$$

واضح أن م (ك-ر) تتحقق عند $z=0$.
بالإضافة لذلك أن $u(x,y), v(x,y)$ ومشتقاتهما الجزئية من الرتبة الأولى تكون متصلة

ومن ثم فإن $f(z)$ تكون تفاضلية عند $z=0$.

ايضا نلاحظ :

أن م(ك-ر) لا تحقق عند أي نقطة $z \neq 0$ ومن ثم فإن $f(z)$ ليست تفاضلية عند $z \neq 0$. إذا $f(z)$ تفاضلية فقط عند $z=0$.

صيغ بديلة (مختلفة) لمعادلتي كوشي- ريمان :
Alternate forms of Cauchy-Riemann Equations

نظرية : (معادلتي كوشي –ريمان في الصورة المركبة)

لتكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة مركبة تفاضلية إذا م(ك-ر) يمكن وضعهما في الصيغة المركبة الآتية :

$$f_x + if_y = 0$$

$$\text{i.e.} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$$

نظرية :

إذا كانت $f(z)$ دالة تفاضلية فإن م(ك-ر) يمكن ووضعهما في الصورة :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

نظرية : (معادلتي كوشي –ريمان في الإحداثيات القطبية)

لتكن $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تفاضلية عند النقطة

$z=re^{i\theta}\neq 0$ إذا

م(ك-ر) في الإحداثيات القطبية تكون :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

بالإضافة إلى ذلك فإن :

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

مثال :

بين أن الدالة $f(z)=z^3$ تحقق م (ك- ر) في الإحداثيات الكارتيزية و القطبية ثم استنتج $f'(z)$.

الحل :

$$f(z)=z^3=(x+iy)^3$$

$$=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$

$$\therefore u(x,y)=x^3-3xy^2 \quad , \quad v(x,y)=3x^2y-y^3$$

$$\therefore u_x(x,y)=3x^2-3y^2 \quad , \quad v_x(x,y)=6xy$$

$$u_y(x,y)=-6xy \quad , \quad v_y(x,y)=3x^2-3y^2$$

$$\therefore u_x=v_y \quad , \quad u_y=-v_x$$

أي ان م(ك-ر) محققة . ومشتقاتها دوال متصلة على C وبالتالي فإن f قابلة للإشتقاق على C .

$$f'(z) = u_x + iv_x = 3x^2 - 3y^2 + i(6xy)$$
$$= 3\left[\left(x^2 - y^2\right) + i(2xy)\right] = 3(x+iy)^2$$
$$= 3z^2$$

مثال :

بين أي الدوال الآتيه غير قابلة للتفاضل :

$$\text{i) } f(z) = \text{Re. } z$$
$$\text{ii) } f(z) = e^x(\cos y - i\sin y)$$
$$= e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

في حين أن الدالة $f(z) = e^z$ قابلة للتفاضل ومشتقها هي $f'(z) = e^z$.

الحل :

$$\text{i) } f(z) = \text{Re.}z = x$$

$$\therefore u(x,y) = x \quad , \quad v(x,y) = 0$$
$$\therefore u_x = 1 \quad , \quad v_x = 0$$
$$u_y = 0 \quad , \quad v_y = 0$$

وحيث أن $u_x \neq v_y$ فإن م(ك-ر) غير محققة عند أي نقطة بالتالي فإن $f(z)$ ليست تفاضلية عند أي نقطة .

$$\text{ii) } f(z) = e^x(\cos y - i\sin y)$$
$$= e^x \cos y + i(-e^x \sin y)$$

$$\therefore u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x,y) = -e^x \sin y$$
$$u_x = e^x \cos y \quad , \quad v_x = -e^x \sin y$$
$$u_y = -e^x \sin y \quad , \quad v_y = -e^x \cos y$$

واضح أن م (ك- ر)غير محققة عند أي نقطة وبالتالي فإن الدالة غير تفاضلية .

ملاحظه :

نلاحظ أن الدالة السابقة

$$f(z) = e^{\bar{z}}$$

تحقق

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{\bar{z}} = e^{\bar{z}} \neq 0$$

أي ان شرط النظرية السابقة غير محقق وبالتالي فالدالة غير تفاضلية أما بالنسبة للدالة $f(z) = e^z$ فنلاحظ أن

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

والتي تحقق م(ك-ر) ولحساب مشتقها نجد

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y$$
$$= e^x e^{iy} = e^z$$

مثال :

بين أن االدالة f(z)=zIm.z قابلة فقط عند للتفاضل z=0 ثم أوجد $f'(0)$.

الحل :

$$f(z)=zIm.z = (x+iy)y$$

$$\therefore u(x,y) = xy \quad , \quad v(x,y) = y^2$$
$$u_x = y \quad , \quad v_x = 0$$
$$u_y = x \quad , \quad v_y = 2y$$

واضح أن م (ك-ر) تتحقق عند z=0 .

بالإضافة إلى أن المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى متصلة إذا f(z) قابلة للتفاضل عند z=0 .

$$f'(z) = u_x + iv_x \Rightarrow f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$$

مثال :

بين أن الدالة :

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z\,\mathrm{Re}.z}{|z|} & , \quad z\neq 0\\ 0 & , \quad z=0\end{cases}$$

متصلة عند $z=0$ ولكنها غير تفاضلية عند $z=0$.

الحل :

من تعريف الإتصال :

$$|f(z)-0|=\left|\frac{z\,\mathrm{Re}.z}{|z|}\right|=|\mathrm{Re}.z|<|z|$$

إذا لأي $\varepsilon>0$ فإنه بإختيار $\delta=\varepsilon$ نجد

$$|z|=|z-0|<\delta\Rightarrow|f(z)-0|<|z|<\varepsilon$$

وبالتالي فإن f متصلة عند $z=0$
ومن تعريف المشتقة نجد أن

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{z\,\mathrm{Re}.z}{z|z|}=\frac{\mathrm{Re}.z}{|z|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad z=x+iy$$

عبر المسار $y=mx$ نجد

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{y=mx}\frac{x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

وهذه قيمه تعتمد على m وبالتالي فإن النهاية تعتمد على المسار الذي من خلاله $z \to 0$
أي أن النهاية غير موجوده
إذا الدالة غير تفاضلية عند $z=0$.

الدوال التحليلية :

Analytic functions

تعريف :

(١) الدالة $f(z)$ المعرفة عند مجال D في المستوى المركب يقال أنها تحليلية (منتظمة) (هلومورفية) عند نقطة $a \in D$ إذا كانت $f(z)$ تفاضلية عند كل نقطة من نقط جوار ما للنقطة a بما فيهم a.

(٢) إذا كانت $f(z)$ تحليلية عند كل نقطة في المجال D فيقال أنها تحليلية على هذا المجال .

(٣) الدالة التي تكون تحليلية عند كل نقطة في المستوى المركب يقال أنها دالة شاملة Entire أو دالة صحيحة Integral function
على سبيل المثال الدالة e^z ، ودالة كثيرة الحدود.

ملاحظة هامة :

إذا كانت f(z) تحليلية عند نقطة a فإن f(z) تكون تفاضلية عند a والعكس غير صحيح .

مثال توضيحي :

الدالة $f(z)=|z|^2$ تفاضلية فقط عند z=0 .
بالتالي يقال للدالة $f(z)=|z|^2$ انها
ليست تحليلية عند z=0 برغم أنها تفاضلية عند 0 .

مثال :

الدالة $f(z)=\frac{1}{z}$ قابلة للإشتقاق فيما عدا عند z=0
حيث توجد المشتقة عند كل $z \neq 0$
بالتالي يقال أنها تحليلية لجميع قيم z ماعدا عند z=0

(النقطة z=0 في هذه الحالة تسمى نقطة شاذه Singular point
).

مثال :

الدالة $f(z)=\bar{z}$ ليست تفاضلية لكل z
بالتالي فهي ليست تحليلية .

نظرية :

تكون $f(z)$ تحليلية في مجال D إذا وفقط إذا كان
الجزء الحقيقي والجزء التخيلي من $f(z)$
لهما مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الأولى
وتحقق م(ك-ر) عند جميع نقط D .

نظرية :

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في مجال D
وتنعدم مشتقتها عند كل نقطة في هذا المجال
فإنها تكون دالة ثابته .

البرهان :

بفرض $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحليلية في D ،
$f'(z)=0$ لكل $z \in D$ وحيث

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y=0$$

فإن

$$u_x=v_y=u_y=v_x=0$$

ومن ثم فإن

$$u(x,y)\ ,\ v(x,y)$$

دالتين ثابتتين
وبالتالي $f(z)$ دالة ثابتة .

التمارين

(١) بين أن الدالة $f(z)=\sqrt{|xy|}$ تحقق م(ك-ر) عند z=0 ومع ذلك فإنها ليست تفاضلية عند z=0.

(٢) اثبت انه إذا كانت f(z) تحليلية في مجال ما وكانت $|f(z)|$ مقدار ثابت فإن f(z) تكون ايضا مقدار ثابت .

(٣) اثبت انه لأي دالة تحليلية f(z)=u+iv إذا كان arg(f(z)) مقدار ثابت فإن الدالة f(z) نفسها تكون ثابته .

(٤) إذا كانت f(z)، $\overline{f(z)}$ تحليليتان في مجال D فبين ان f(z) تكون دالة ثابته .

من أجل كل عدد مركب z أثبت أن :

$$\sqrt{2}\,|z| \geqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$$

الحـــــــل

$$Z = x + i\,y = r \operatorname{cis} \theta$$

$$|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = |x| + |y| = r\,|\cos\theta| + r\,|\sin\theta|$$

$$= r\,(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

حيث $\varphi \in [\,0\,,\ \frac{\pi}{2}\,]$

$$\cos\varphi = |\cos\theta|\,,\ \sin\varphi = |\sin\theta|$$

$$\therefore |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = \sqrt{2}\, r\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)$$

$$= \sqrt{2}\, r \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}\, r$$

$$\therefore |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leqslant \sqrt{2}\,|z|$$

مع تحيات
محمد خالد غزول

الدوال التوافقية :

Harmonic functions

تعريف :

بفرض $u(x ,y)$ دالة حقيقية في متغيرين x ,y معرفة في مجال D إذا يقال أن $u(x ,y)$ دالة توافقية إذا كانت كل من مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية موجوده ومتصلة وتحقق :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لابلاس Laplaces equation

نظرية:

إذا كانت $f = u+iv$ دالة تحليلية في مجال D فإن كلا من u,v توافقية في D (أي كلا من الجزء الحقيقي والتخيلي من دالة تحليلية هو دالة توافقية أي يحقق معادلة لا بلاس)

البرهان :

بفرض $f =u(x,y)+iv(x,y)$ دالة تحليلية .
إذا كل من u,v متصلة ولهما مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الاولى
وتحقق م (ك- ر)

$$u_x = v_y \qquad , \qquad u_y = -v_x$$

ولكن

$$u_{xy} = u_{yx} \qquad , \qquad v_{xy} = v_{yx}$$

$$\therefore u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{yx} = 0$$

ومن ثم فإن u دالة توافقية . وبالمثل يمكن التحقق من أن v توافقية .

نظرية:

إذا كان u ,v توافقيان وتحققان معادلتي كوشي ريمان في المجال D فإن

$$f(z)=u(x ,y)+iv(x ,y)$$

تكون دالة تحليلية في D .

البرهان :

حيث أن u,v توافقيان فإن المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لهما تكون متصلة وكون u,v تحققان م (ك- ر) في D فإن f تكون تحليلية .

المرافق التوافقي :

Harmonic Conjugate

تعريف :

إذا كانت f=u+iv تحليلية في D ، فإن v يسمى مرافق توافقي للدالة u .

ملاحظه هامة :

إذا كانت v مرافقا توافقيا للدالة u في نطاق ما فليس معنى ذلك –على وجه العموم – أن تكون u مرافقا توافقيا للدالة v في نفس النطاق .

مثال توضيحي :

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

وحيث أن

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v(x,y) = 2xy$$

هاتين الدالتين هما الشق الحقيقي والتخيلي ، على التعاقب للدالة الشاملة $f(z) = z^2$ فإن v تكون مرافقا توافقيا للدالة u في المستوى كله .

ومع ذلك : فإن u لا يمكن ان تكون مرافقا توافقيا للدالة v ، ذلك لأن دالة $2xy + i(x^2 - y^2)$ ليست تحليلية عند أي نقطة .

نظرية :

إذا كانت $f = u+iv$ تحليلية في مجال D فإن v تكون مرافق توافقي للدالة u إذا وفقط إذا كان u مرافق توافقي للدالة $-v$.

البرهان:

بفرض v مرافق توافقي للدالة u . إذا كون $f = u+iv$ تحليلية فإن $if = iu-v$ ايضا تكون تحليلية وبالتالي فإن u يكون مرافقا توافقيا للدالة $-v$ والبرهان في الإتجاه العكسي بنفس الطريقة .

استخدام معادلتي كوشي – ريمان لتعيين مرافق توافقي لدالة توافقية معلومة :

(سنوضح الطريقة بالمثال التالي)

مثال :

ليكن $u(x,y)=x^2-y^2$ اوجد المرافق التوافقي v ومن ثم كون الدالة التحليلية التي شقيها u,v.

الحل :

نلاحظ أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

أي أن $u(x\ ,y)$ توافقية . أي تحقق معادلة لابلاس.

نفرض $v(x\ ,y)$ هو المرافق التوافقي للدالة u إذا من م (ك-ر) نجد

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=\frac{-\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

بتكامل (1) بالنسبة إلى y بإعتبار x ثابت .

$$\therefore v=2xy+\varphi(x) \qquad \Rightarrow \qquad v_x=2y+\varphi'(x)$$

ولكن من (2) نجد

$$v_x = 2y$$

$$\therefore 2y = 2y + \varphi'(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = c$$

حيث c ثابت وبالتالي فإن

$$v = 2xy + c$$

أي أن المرافق التوافقي للدالة $u(x,y) = x^2 - y^2$ هو الدالة $v(x,y)=2xy+c$ وعليه فإن الدالة التحليلية المناظرة هي :

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + c)$$
$$= z^2 + ic$$

طريقة ميلن تومسون: (لتكوين دالة تحليلية متى علم أحد شقيها)
Milne –Thompson method
(سنوضح الطريقة بالمثال التالي)

مثال :

بين أن الدالة $u = 2x - x^3 + 3xy^2$ توافقية وأوجد دالة $f(z)$ بدلالة z تكون u هي شقها الحقيقي . (استخدم طريقة ميلن – تومسون).

الحل :

$$u_x = 2 - 3x^2 + 3y^2 \quad = v_y \qquad (1)$$
$$u_y = 6xy \quad = -v_x \qquad (2)$$

بمكاملة (2) بالنسبة إلى x :

$$v = -3x^2y + \varphi(y)$$

بالإشتقاق بالنسبة إلى y :

$$\begin{aligned} v_y &= -3x^2 + \varphi'(y) \\ &= u_x \\ &= 2 - 3x^2 + 3y^2 \\ &\rightarrow \varphi'(y) = 2 + 3y^2 \\ &\rightarrow \varphi(y) = 2y + y^3 + c \\ &\therefore v = -3x^2y + 2y + y^3 + c \end{aligned}$$

بإستخدام م(ك-ر) نجد أن

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x - iu_y \\ &= \left(2 - 3x^2 + 3y^2\right) - i(6xy) \\ &= \varphi_1(x,y) - i\varphi_2(x,y) \end{aligned}$$

بإحلال z بدلا من x ، 0 بدلا من y :

$$\begin{aligned} \therefore f'(z) &= \varphi_1(z,0) - i\varphi_2(z,0) \\ &= 2 - 3z^2 \end{aligned}$$

إذا بالتكامل بالنسبة إلى z نحصل على

$$f(z) = 2z - z^3 + c$$

مثال :

إذا كانت $v(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ كون دالة تحليلية f(z) بحيث تكون v شقها التخيلي (استخدم طريقة ميلن – تومسون) .

الحل :

نلاحظ أن :

$$v_x(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$$
$$v_y(x,y) = -12x^2y + 4y^3$$

وبفرض الدالة التحليلية المطلوبه هي :

$$f(z) = u + iv$$
$$\therefore f'(z) = u_x + iv_x$$
$$= v_y + iv_x$$
$$= \left(-12x^2y + 4y^3\right) + i\left(4x^3 - 12xy^2\right)$$

بإحلال z بدلا من x ، 0 بدلا من y :

$$\therefore f'(z) = i4z^3$$
$$\rightarrow f(z) = iz^4 + c$$

تمارين متنوعة في الإشتقاق

(١) اوجد الثوابت a,b بحيث تكون الدالة

$$f(z)=a(x^2-y^2)+ibxy+c$$

تفاضلية عند أي نقطة .

(٢) بين أن $f(z)=\sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$, $r>0$ حيث $0<\theta<2\pi$ هي دالة تفاضلية و أوجد $f'(z)$.

(٣) بين أنه إذا كانت $f(z)$ تحليلية في مجال D فإن تكون تحليلية في نفس المجال .

(٤) عين الثوابت a,b التي تجعل الدالة

$$f(z)=(x^2+ay^2-2xy)+i(bx^2-y^2+2xy)$$

تحليلية . ثم أوجد $f'(z)$.

(٥) اوجد الدالة التحليلية $f(z)=u+iv$ بحيث

$$u-v=e^x(\cos y-\sin y)$$

(٦) إذا كان

$$u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$$

وكان

$$f(z)=u+iv$$

اوجد الدالة التحليلية f بدلالة z

.

(7)اوجد الثابت α بحيث

$$u(x,y)=\alpha x^2-y^2+xy$$

تكون توافقية أوجد دالة تحليلية $f(z)$ تكون $u(x,y)$ هي شقها الحقيقي ، أوجد المرافق التوافقي للدالة $u(x,y)$.

(8)بين أنه إذا كان u,v مرافقين توافقيين فإن حاصل الضرب uv يكون دالة توافقية .

(9)بين أن معادلة لابلاس في الإحداثيات الكارتيزية

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

يمكن ان تكتب في الصورة القطبية كالآتي :

$$r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=0$$

(10) بين ان الدالة $f(z)=(x+iy)$ المعرفة كالآتي :

$$f(z)=\frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2};\ \ z\neq 0\ \ ;\ \ f(0)=0$$

تحقق م(ك-ر) ومع ذلك فإنها ليست تفاضلية عند نقطة ما .

(11)اوجد العلاقات التي ينبغي ان تحققها الثوابت α,β,γ كي تكون الدالة $w=f(z)=\alpha x+\beta y+\gamma$ تحليلية في z.

(12) إذا كانت $f(z)=u+iv$ تحليلية فأثبت أنه ليس من الضروري أن تكون $g=v+iu$ تحليلية .

الدرس الثامن
تكامل الدوال المركبة
Integration of Complex Functions

التكامل المحدد :

Definite Integral

تعريف :

لتكن $f(t)=u(t)+iv(t)$ دالة متصلة ذات قيمة مركبة معرفة على الفترة $[a,b]$، نعرف :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

ملاحظة : الخصائص التالية للتكامل المحدد متحققة :

1. $\mathrm{Re.}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re.}\left[f(t)\right]dt$
2. $\mathrm{Im.}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Im.}\left[f(t)\right]dt$
3. $\int_a^b \left[f(t)+g(t)\right]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
4. $\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt \quad , \quad c$ is any complex const
5. $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b \left|f(t)\right|dt$

تعريف :

ليكن C منحنى تفاضلي (differentiable curve) أو (منحنى ممهد)(smooth curve) معرف بالمعادلة $z=z(t)$ حيث $a \le t \le b$ ولتكن $f(z)$ دالة متصلة ذات قيمة مركبة معرفة في منطقة تحتوي المنحنى C

إذا نعرف التكامل على C كالآتي :

(حيث $z(t)$ هو التمثيل البارامتري لـ C)

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)).z'(t)dt$$

مثال :

احسب التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $f(z)=\frac{1}{z}$، المنحنى C هو الدائرة $|z|=r$ في الإتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة)

كذلك احسب $\oint_C \bar{z}\, dz$، C دائرة الوحدة .

الحل :

نلاحظ أن المعادلة البارامترية للدائرة $|z|=r$ هي $z=re^{it}$ حيث $0 \le t \le 2\pi$ كذلك

$$f(z(t))=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{it}} \quad , \quad z'(t)=ire^{it}$$

$$\therefore \int_C f(z)dz=\int_C \frac{1}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{it}}{re^{it}}dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$$

$$f(z(t))=\bar{z}=\overline{e^{it}}=e^{-it} \quad , \quad z'(t)=ie^{it}$$

$$\therefore \int_C f(z)dz=\int_C \bar{z}\, dz=\int_0^{2\pi}(e^{-it})(ie^{it})dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$$

مثال :

بين أن $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ حيث C دائرة مركزها a ونصف قطرها r .

الحل:

المعادلة البارامترية لهذه الدائرة تكون في الصورة $z = a + re^{it}$ حيث $0 \le t \le 2\pi$

إذا

$$f(z) = \frac{1}{a + re^{it} - a} = \frac{1}{re^{it}} \quad , \quad z'(t) = ire^{it}$$

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

خصائص التكامل على C:

$$(1) \int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

$$(2) \int_C \alpha f(z)dz = \alpha \int_C f(z)dz \quad , \quad \alpha \text{ is complex const}$$

$$(3) \int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$$

خاصية :

إذا كان C مكون من منحنيات ملساء $C = C_1 + C_2$ فإن :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

طول المنحنى التفاضلي الأجزاء :

بفرض $C: z(t)=x(t)+iy(t)$ حيث $a \le t \le b$ إذاً الطول L للمنحنى C يعطى من العلاقة :

$$L = \int_a^b |z'(t)|\,dt$$

فإذا اعتبرنا $z'(t) = x^{\bullet}(t) + iy^{\bullet}(t)$ فإن الطول يعطى من :

$$L = \int_a^b \sqrt{x^{\bullet 2} + y^{\bullet 2}}\,dt$$

مثال :

اوجد طول المنحنى C إذا كان C هو دائرة مركزها a ونصف قطرها r .

الحل :

من المعادلة البارامترية للدائرة نجد أن $z = a + re^{it}$ حيث $a \le t \le b$ و $z'(t) = ire^{it}$

$$L = \int_0^{2\pi} |z'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$$

نظرية ML-Inequality:

$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$ حيث $M = \max\{|f(z) : z \in C|\}$ و L طول المنحنى C .

مثال :

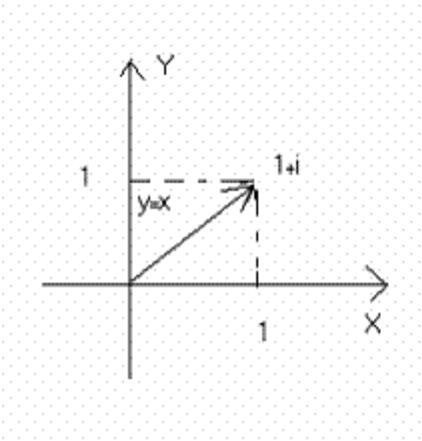
احسب $\int_C f(z)dz$ حيث $f(z) = y - x - 3ix^2$ والمنحنى C هو القطعة المستقيمة الواصلة بين $z=0$, $z=1+i$.

الحل :

معادلة القطعة المستقيمة C الواصلة بين $z=0$ إلى $z=1+i$ هي $y=x$

والآن نوجد التمثيل البارامتري :

حيث t تتغير من 0 إلى 1



$$z(t) = x(t) + iy(t) = t + it$$

$$\therefore z'(t) = 1 + i$$

$$\therefore f(z(t)) = t - t - i3t^2 = -i3t^2$$

$$\therefore \int_C f(z)dz = \int_t f(z(t)).z'(t)dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} -i3t^2(1+i)dt$$

$$= -3i(1+i)\left[\frac{t^3}{3}\right] = 1-i$$

مثال :

اثبت أن

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq 1 \\ 2\pi i & , \quad n=1 \end{cases}$$

حيث C دائرة مركزها a ونصف قطرها r ، n عدد صحيح .

الحل:

المعادلات البارامترية للدائرة تعطى من العلاقة :

$$z = a + re^{it} \qquad , \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\therefore z'(t) = ire^{it}$$

$$f(z(t)) = \frac{1}{(a+re^{it}-a)^n} = \frac{1}{r^n e^{int}}$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{r^n e^{int}} dt = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} \qquad ; \quad n \neq 1$$

$$= \frac{1}{(1-n)r^{n-1}} \left[e^{i(1-n)2\pi} - 1 \right]$$

$$= \frac{i}{(1-n)r^{n-1}} [1-1] = 0$$

نلاحظ أنه عند $n=1$ نحصل على $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ (وقد أثبتناه في مثال سابق)

مثال : بين أن :

$$\int_C \bar{z}^2 \, dz = \begin{cases} 0 & , \quad C \text{ is } \quad |z|=1 \\ 2\pi i & , \quad C \text{ is } \quad |z-1|=1 \end{cases}$$

الحل:

(أ) إذا كان C هو الدائرة $|z|=1$ فإن المعادلة البارامترية هي $z(t) = e^{it}$ حيث $0 \le t \le 2\pi$ إذاً

$$z'(t) = ie^{it} \qquad , \qquad \left[\bar{z}(t)\right]^2 = e^{-2it}$$

$$\therefore \int_C \bar{z}^2 \, dz = \int_0^{2\pi} \left[\bar{z}(t)\right]^2 z'(t)\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{-it}dt = -\left[e^{-it}\right]_0^{2\pi} = 0$$

(ب) إذا كان C هو الدائرة $|z-1|=1$ فإن المعادلة البارامترية تكون

$$z(t) = 1 + e^{it} \qquad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\therefore z'(t) = ie^{it}$$

$$\therefore \int_C \bar{z}^2 \, dz = \int_0^{2\pi} \left(1 + e^{-it}\right)^2 ie^{it} \, dt = i\int_0^{2\pi} \left(e^{it} + e^{-it} + 2\right)dt$$

$$= i\left[\frac{e^{it}}{i} - \frac{e^{-it}}{i} + 2t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[e^{it} - e^{-it} + 2it\right]_0^{2\pi} = 4\pi i$$

مثال :

إحسب $\int_C \left(x^2 - iy^2\right) dz$ حيث C هو القطع المكافئ $y = 2x^2$ من النقطة (1,2) إلى النقطة (2,8).

الحل :

نلاحظ $f(z) = x^2 - iy^2$ والمعادلات البارامترية لمنحنى القطع المكافئ C تعطى من

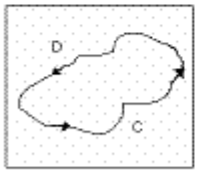
$$x = t \quad , \quad y = 2t^2$$

حيث $1 \le t \le 2$

$$\therefore z = x(t) + iy(t)$$
$$= t + i\left(2t^2\right)$$
$$\therefore z'(t) = (1 + 4it)$$
$$\therefore dz = (1 + 4it)dt$$
$$\therefore \int_C \left(x^2 - iy^2\right)\, dz = \int_{t=1}^{2} \left(t^2 - i4t^4\right)(1 + 4it)dt$$
$$= \int_1^2 \left[\left(t^2 - 16t^5\right) + i\left(4t^3 - 4t^4\right)\right]dt$$
$$= \left[\left(\frac{t^3}{3} + \frac{16t^6}{6}\right) + i\left(\frac{4t^4}{4} + \frac{4t^5}{5}\right)\right]_1^2$$
$$= \frac{511}{3} - \frac{49}{5}i$$

نظرية كوشي – جورسات :

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة D وكان C منحنى مغلق (كنتور) يقع داخل D فإن



$$\oint_C f(z)dz = 0$$

تنويه : اعتمد كوشي في برهانه لهذه النظرية على نظرية جرين في المستوى للدوال الحقيقية .

مثال :

$$\oint_C e^z \, dz = 0 \quad , \quad \oint_C \cos z \, dz = 0 \quad , \quad \oint_C z^n \, dz = 0 \quad , \quad n \neq -1$$

لأي منحنى بسيط مغلق C ، حيث كل الدوال تحت التكامل هي شاملة (تحليلية لكل z)

مثال :

$$\oint_C \sec z \, dz = 0 \qquad , \qquad \oint_C \frac{dz}{z^2+4} = 0$$

حيث C دائرة الوحدة .

فنلاحظ أن $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ ليست تحليلية عند

$$z = \pm\frac{\pi}{2} \, , \pm\frac{3\pi}{2} \, , \ldots$$

وكل هذه النقط تقع خارج C (دائرة الوحدة) حيث داخل C يتحقق $|z|<1$ وعليها $|z|=1$.

كذلك بالنسبة للتكامل الآخر فإن الدالة ليست تحليلية عند $z = \pm 2i$ والتي بدورها تقع خارج دائرة الوحدة C.

سؤال للأعضاء : هل تكامل الدالة الغير تحليلية على مسار مغلق يمكن أن يساوي صفر ؟ اثبت ذلك .

مثال :

إحسب $\oint_C \frac{7z-6}{z^2-2z}dz$ حيث C دائرة الوحدة .

الحل :

$$\frac{7z-6}{z^2-2z}=\frac{7z-6}{z(z-2)}=\frac{3}{z}+\frac{4}{z-2}$$

$$\therefore \oint_C \frac{7z-6}{z^2-2z}dz=\oint_C \frac{3}{z}\,dz+\oint_C \frac{4}{z-2}\,dz$$

$$=3.2\pi i+0=6\pi i$$

وذلك لأن $z=2$ تقع خارج C (دائرة الوحدة) وبالتالي فإن يمكن تطبيق نظرية كوشي على الدالة $\frac{4}{z-2}$ حيث أنها تحليلية داخل وعلى C .

تبعات نظرية كوشي : Consequences of Cauchys Theorem

نظرية (تشتت المسار) :(Deformation of contours)

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية بحيث تكون منتظمة (هلومورفية) داخل المجال المحدود بالكنتورين C,C_1 (حيث C_1 يقع داخل C كما في الشكل) وليس بالضرورة أن تكون $f(z)$ هلومورفية داخل المنحنى C_1 إذاً

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$$

مثال توضيحي:

اوجد قيمة $\oint_C \frac{dz}{z-a}$ حيث C أي كنتور بسيط مغلق ، z=a نقطة تقع :

(أ) خارج C

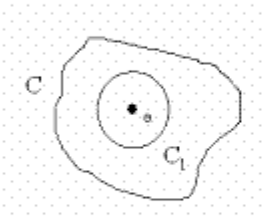
(ب) داخل C

الحل:

(أ) إذا كانت a خارج C فإن $f(z) = \frac{1}{z-a}$ تكون تحليلية في كل مكان داخل وعلى C وعليه ينتج من نظرية كوشي $\oint_C \frac{dz}{z-a} = 0$.

(ب) إذا كانت a داخل C فنفرض أن C_1 هو دائرة ما نصف قطرها r ومركزها z=a بحيث تقع C_1 داخل C

(يمكن إجراء ذلك لأن z=a نقطة داخلية)



$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-a}$$

والآن على الدائرة C_1 أي |z-a|=r نجد أن $z = a + re^{it}$ حيث $0 \le t \le 2\pi$ وبالتالي فإن

$$z'(t) = ire^{it}$$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-a} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

صيغة كوشي التكاملية :

Cauchys integral Formula

بفرض $f(z)$ تحليلية في مجال D بسيط الترابط (Simply connected domain) بحيث تكون هلومورفية أي تفاضلية عند جميع نقطه . إذاً لأي نقطة z_0 في D ولأي كنتور بسيط مغلق C يقع داخل D فإن :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i\ f(z_0)$$

مثال :

إحسب التكامل $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ لأي كنتور C يحتوي $z_0 = 2$ ولأي كنتور C تقع $z_0 = 2$ خارجه .

الحل :

إذا كانت $z_0 = 2$ تقع داخل C فمن صيغة كوشي التكاملية نجد أن $f(z)=e^z$ دالة تحليلية أي تفاضلية عند كل نقط المستوى المركب .

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i e^2$$

أما إذا كانت $z_0 = 2$ خارج C فإن قيمة التكامل =صفر (من نظرية كوشي) .

مثال :

إذا كانت $z_0 = \frac{i}{2}$ تقع داخل المنحنى C فاحسب $\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}dz$.

الحل :

$$\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}dz = \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3-3}{z-\frac{i}{2}}dz, \qquad \rightarrow f=\frac{1}{2}z^3-3$$

$$=2\pi i f\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{8}-6\pi i$$

نتيجة (على صيغة كوشي التكاملية) :

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على الكنتورين C_1, C_2 والمنطقة بينهما ، z_0 أي نقطة داخل هذه المنطقة إذا

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

(لاحظ أن اتجاه C_1 هو اتجاه عكس عقارب الساعة (موجب) اتجاه C_2 هو اتجاه سالب).

أمثلة على صيغة كوشي التكاملية

مثال (1): (التكامل حول مسارات مختلفة)

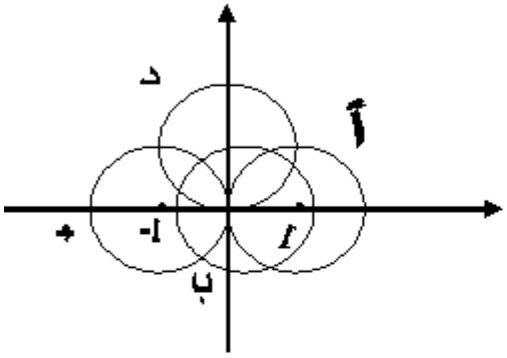
اوجد قيمة التكامل للدالة $g(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ في الإتجاه الموجب حول دائرة نصف قطرها 1 ومركزها :

(أ) $z=1$

(ب) $z=\dfrac{1}{2}$

(جـ) $z=-1+\dfrac{1}{2}i$

(د) $z=i$



الحل :

نلاحظ في صيغة كوشي التكاملية الدالة تحت علامة التكامل تكون غير منتظمة عند $z=z_0$ حيث

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\ \ f(z_0)\ldots\ldots(*)$$

فالنقط التي عندها $g(z)$ ليست منتظمة هي $z=1,-1$ فنطبق صيغة كوشي التكاملية على الدوائر التي تحتوي فقط $z=1,-1$.

(أ) $z_0=1$ أي $z-z_0=z-1$ (في صيغة كوشي) إذا

$$g(z)=\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)\left(\frac{1}{z-1}\right)\qquad\Rightarrow\qquad f(z)=\frac{z^2+1}{z+1}$$

من (*) نحصل على :

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i\left[\frac{z^2+1}{z+1}\right]_{z=1} = 2\pi i$$

(أ) نفس نتيجة (أ) وذلك لأن المجال في (أ) و(ب) يحتوي النقطة الشاذه $z=1$.

(جـ) $g(z)$ نفسها كما في السابق ولكن $f(z)$ تختلف لأننا يجب أن نأخذ $z_0=-1$ بدلا من 1 أي $z-z_0=z+1$ في (*) ولذلك

$$g(z)=\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)\left(\frac{1}{z+1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad f(z)=\frac{z^2+1}{z-1}$$

$$\therefore \oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i\left[\frac{z^2+1}{z-1}\right]_{z=-1} = -2\pi i$$

(د) نلاحظ أن الدائرة التي مركزها $z=i$ جميع نقاطها لا يوجد بينهم نقطة شاذة لذلك الدالة تحليلية (منتظمة) عند كل النقط وعليه فنطبق نظرية كوشي –جورسات على $g(z)$ وقيمة التكامل = صفر.

مثال (2) :

اوجد $\oint_C g(z)\,dz$ حيث $g(z)=\frac{\tan z}{z^2-1}$ حول الدائرة C

$:z=\left|\frac{3}{2}\right|$

الحل :

نلاحظ أن $\tan z$ ليست تحليلية عند $z=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\ldots$ ولكن

كل هذه النقط تقع خارج الكنتور C. وحيث أن

$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z-1)(z+1)}$ ليست تحليلية عند 1,-1

إذاً لتطبيق صيغة كوشي التكاملية نعتبر $z_0=1$, $z_0=-1$

$$\therefore \frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right]$$

$$\therefore \oint \frac{\tan z}{z^2-1}\,dz=\frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{\tan z}{z-1}\,dz-\oint_C \frac{\tan z}{z+1}\,dz\right]$$

$$=\frac{1}{2}.2\pi i\left[\tan(1)-\tan(-1)\right]$$

$$=\pi i\left[2\tan(1)\right]$$

طريقة أخرى للحل :

$$\oint_C g(z)\,dz=\oint_{C_1} g(z)\,dz+\oint_{C_2} g(z)\,dz$$

على المسار $C_1 \leftarrow z=1$:

$$g(z)=\frac{\tan z/(z+1)}{z-1}=\frac{f(z)}{z-1}$$

$$\oint_{C_1} g(z)\,dz=2\pi i.\,f(1)=2\pi i.\left[\frac{\tan(1)}{2}\right]=\pi i\tan(1)$$

على المسار $C_2 \leftarrow z=-1$:

$$g(z)=\frac{\tan z/(z-1)}{z+1}=\frac{f(z)}{z+1}$$

$$\oint_{C_2} g(z)\,dz=2\pi i.\,f(-1)=2\pi i.\left[\frac{\tan(-1)}{-2}\right]=\pi i\tan(1)$$

وبالتالي فإن :

$$\oint_{C} g(z)\,dz=\oint_{C_1} g(z)\,dz+\oint_{C_2} g(z)\,dz$$

$$=\pi i\tan(1)\quad+\quad\pi i\tan(1)=2\pi i\,.\tan(1)$$

نظرية (صيغة كوشي للمشتقة):

Cauchys formula for derivative

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في مجال D وكان C منحنى بسيط مغلق يقع بتمامه داخل D وكانت z_0 نقطة داخل C و اتجاه C اتجاه موجب . فإن $f(z)$ يكون لها مشتقات من جميع الرتب في D والتي بدورها ايضا تحليلية في D .
قيم هذه المشتقات عند z_0 في D تعطى من الصيغ الآتية :

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz,$$

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz,$$

وعموما

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

مثال :

لأي كنتور C يحتوي النقطة πi (في الإتجاه الموجب) إحسب :

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-\pi i)^2}dz$$

الحل :

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-\pi i)^2}dz=\left[2\pi i(\cos z)'\right]_{z=\pi i}=-2\pi i(\sin \pi i)=2\pi \sinh \pi$$

مثال :

لأي كنتور C يحتوي النقطة $-i$ (في الإتجاه الموجب) إحسب :

$$\oint_C \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3}dz$$

الحل :

$$\oint_C \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3}dz=\left[\pi i\left(z^4-3z^2+6\right)''\right]_{z=-i}$$

$$=\pi i\left[12z^2-6\right]_{z=-i}=-18\pi i$$

مثال :

بإستخدام صيغة كوشي للمشتقة ولأي كنتور C تقع z=1 داخله وتقع $z=\pm 2i$ خراجه (في الإتجاه الموجب) أوجد قيمة :

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$$

الحل :

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\left(\frac{e^z}{z^2+4}\right)'_{z=1}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^z(z^4+4)-e^z.2z}{(z^4+4)^2}\right)_{z=1} = \frac{6e\pi}{25}i$$

مثال :

بين أن :

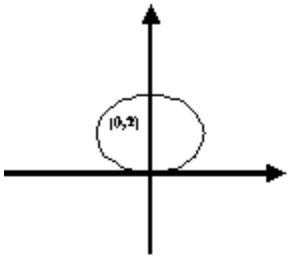
$$I=\oint_C \frac{z^2}{(z^2+4)^2}dz=\frac{\pi}{4}$$

حيث C هو الدائرة

$$x^2+y^2=4y$$

الحل :

نلاحظ أن C هو الدائرة التي مركزها $(0,2i)$ ونصف قطرها 2 وتمس محور x عند $(0,0)$.



$$\frac{z^2}{\left(z^2+4\right)^2}=\frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{z^2}{(z+2i)^2}\right)}{(z-2i)^2}=\frac{f(z)}{(z-2i)^2}$$

وذلك لأن $f(z)$ منتظمة على C وبداخله إذا :

$$I=\oint_C\frac{z^2}{\left(z^2+4\right)^2}dz=\oint_C\frac{f(z)}{(z-2i)^2}dz$$

من صيغة كوشي للمشتقة فإن :

$$f'(2i)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-2i)^2}dz=\frac{I}{2\pi i}$$

الآن نحسب المشتقة $f'(2i)$ فنجد أولا :

$$f'(z)=\left[\left(\frac{z}{z+2i}\right)\left(\frac{z}{z+2i}\right)\right]'$$

$$=2\left(\frac{z}{z+2i}\right)\left(\frac{z+2i-z}{(z+2i)^2}\right)=\frac{4iz}{(z+2i)^3}$$