هذه المجموعة من الدروس في التحليل المركب من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com

$$f'(2i) = \frac{-8}{-64i} = \frac{1}{8i}$$

$$\therefore I = 2\pi i\, f'(2i) = 2\pi i \left(\frac{1}{8i}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-2i)^2}\,dz = \frac{I}{2\pi i}$$

عكس نظرية كوشي (نظرية موريرا)

Moreras Theorem

لتكن $f(z)$ دالة وحيدة القيمة ومتصلة داخل وعلى الكنتور المغلق C . فإذا كان $\oint_C f(z)dz = 0$ خلال كل كنتور مغلق يقع داخل C فإن $f(z)$ تكون تحليلية (منتظمة) في داخل C .

نظرية (متباينة كوشي) :

Cauchys Inequality

إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل وعلى الدائرة C التي مركزها z_0 ونصف قطرها r وكانت $M=\max|f(z)|$ على C فإن

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!\,M}{r^n}$$

نظرية ليوفيل :

Louisvilles theorem

إذا كانت $f(z)$ شاملة محدودة القيمة المطلقة لكل قيم z أي $|f(z)| \le k$ إذاً $f(z)$ لابد وان تكون مقدار ثابت .

تمارين :

(١) بدون حساب التكامل بين أن $\left|\int_C \frac{dz}{z^4}\right| \le 4\sqrt{2}$ حيث C هي القطعة المستقيمة الواصلة بين $z=i$ إلى $z=1$

(٢) اوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)\,dz$ حيث $f(z)=e^{iz}$ ومسار التكامل هو الكنتور المكون من الخطين المستقيمين اللذين يصلان بين النقط

$$z=0 \quad , \quad z=2+\pi i \quad , \quad z=2$$

على الترتيب.

(٣) اوجد قيمة التكامل $\int_C z\,dz$, C دائرة الوحدة .

(٤) اوجد قيمة التكامل $\int_C \bar{z}\,dz$ على المسار C حيث C دائرة الوحدة .

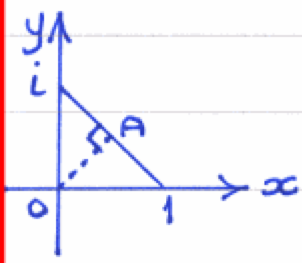
(٥) بين أن $\left|\int_C \frac{e^{iz}}{z^2-i}dz\right| \le \frac{12}{5}\pi e^2$ حيث C هو $|z|=\frac{3}{2}$

(٦) إحسب التكامل $\int_C \frac{z}{z^2+1}dz$ حيث C هو الدائرة $|z|=3$.

بدون حساب التكامل بين أن : $\left|\int_C \frac{dZ}{Z^4}\right| \leqslant 4\sqrt{2}$

حيث C القطعة المستقيمة الواصلة من $Z=1$ إلى $Z=i$

الحل



حسب نظرية ML-Inequality

$$\left|\int_C \frac{dZ}{Z^4}\right| \leqslant ML$$

حيث :

$$M = \max\left\{\left|\frac{1}{Z^4}\right| : Z \in C\right\}$$

و L هو طول المنحنى C

حسب فيثاغورس فإن $L = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\left|\frac{1}{Z^4}\right| = \frac{1}{r^4}$ تكون أكبر ما يمكن على C

عندما r أصغر ما يمكن ويتم ذلك عندما $r = OA$

ولكن $OA = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow M = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = 4$

$$\therefore \quad \left|\int_C \frac{dZ}{Z^4}\right| \leqslant 4\sqrt{2}$$

مع تحيات

محمد خالد غزول

الدرس التاسع
المتتابعات والمتسلسلات المركبة
Complex Sequences and Series

تعريف : متتابعة الأعداد المركبة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ومداها أعداد مركبة .

المتتابعة الثابتة : يقصد بها المتتابعة $< z_n >$ والتي جميع حدودها متساوية أي

$$z_k = z_{k+1} \quad , \quad k=1,2,.....$$

مثال لمتتابعة مركبة :

$$< i \, , -1 \, ,- i \, , 1 \, , i \, , -1 \, , i \, ,....>$$

هذه المتتابعة يمكن كتابتها في الصورة $< i^n >$ حيث $f(n) = i^n$ وحدودها هي :

$$i, i^2, i^3, i^4, \ ...$$

تقارب المتتابعة :

المتتابعة $< z_n >$ يقال أنها تتقارب إلى العدد المركب z عندما $n \to \infty$ ونكتب

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z$$

وهذا يكافئ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

إذا لم تكن المتتابعة تقاربية تسمى تباعدية .

نظرية :

إذا كان $z_n = x_n + iy_n$ لكل $n=1,2,\ldots$ فإن $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

مثال :

إبحث تقارب المتتابعة $<\frac{i}{n}>$.

الحل :

بما أن $\frac{1}{n} \to 0$ فإن المتتابعة $<\frac{i}{n}>$ تتقارب إلى الصفر .

مثال :

إبحث تقارب أو تباعد $<(2i)^n>$.

الحل :

بما أن i^n يمكن كتابتها مساوية للأعداد $1,i,-1,-i$ عندما يكون باقي القسمة على 4 هو $0,1,2,3$ على التوالي وأن $2^n \to \infty$ عندما $n \to \infty$ فإن المتتابعة تتباعد .

مثال :

ناقش تقارب المتتابعة $<\frac{i^n}{n}>$ نحو الصفر .

الحل :

يمكن إثبات ذلك من خلال التعريف أي يجب إثبات أنـه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \exists N \quad s.t. \left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon \qquad \forall n > N$$

الآن نلاحظ $\left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$ إذا باختيار $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$

يتحقق التعريف .

المتسلسلات في المجـال المركب :

تعريف :

لتكن $< z_n > = < z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots >$ متتابعة من الأعداد المركبـة إذا التعبير $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ يدعى متسلسلة لانـهائية من الأعداد المركبة ويرمز لـها $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

متسلسلات القوى :

Power Series

متسلسلة القوى هي متسلسلة لانـهائيـة تأخذ الشكل التـالي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

حيث المعـاملات $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ، المتغير z كلها أعداد مركبـة .

وفي الصيغة العامة تأخذ الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ حيث تسمى متسلسلة قوى حول z_0 .

نصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ هو عدد حقيقي R يعرف بالعلاقة $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

يسمى القرص الذي مركزه صفر ونصف قطره R مجال التقارب .

نعتبر الآن الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى :

$$(1)R=0 \qquad (2)0<R<\infty \qquad (3)R=\infty$$

$R=0 \ (1)$

تكون دائرة التقارب فقط نقطة واحدة هي z=0 أي أن المتسلسلة تكون تباعدية في المستوى المركب إلا عند النقطة z=0 وفي الواقع تختفي المتسلسلة عند z=0 فيما عدا الحد الأول وهو a_0 .

$0<R<\infty \ (2)$

أي أن المتسلسلة مطلقة التقارب لجميع قيم z حيث $|z|< R$ وخارج هذه الدائرة تكون تباعدية .

$R=\infty(3)$

في هذه الحالة تكون المتسلسلة تقاربية في المستوى المركب بأكمله بل ومطلقة التقارب .

الحالة الثانية :

الحالة التي عندها z على محيط الدائرة $|z|=R$ فإنها تعالج على إنفراد باستخدام اختبارات التقارب او بطرق أخرى .

مثال توضيحي :

(المتسلسلة الهندسية) (Geometric series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ...$$

يعطى المجموع الجزئي (مجموع n من الحدود) S_n بالعلاقة

$$S_n = 1 + z + ... + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

(*) عندما $|z| < 1$ فإن المتتابعة $< z^n > \to 0$ عندما $n \to \infty$ ومن ثم نجد أن $< S^n > \to \frac{1}{1-z}$. أي أننا نقول أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تتقارب إذا كان $|z| < 1$.

(**) عندما $|z| \geq 1$ المتتابعة $< z^n >$ تتباعد ومن ثم متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تكون متباعدة .

نظرية :

لأي متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ يوجد عدد $0 \le R \le \infty$ بحيث :

(أ) المتسلسلة تتقارب مطلقا لكل z تحقق $|z| < R$.

(ب) المتسلسلة تتباعد إذا كان $|z| > R$ حيث تكون حدود المتسلسلة غير محدودة .

(جـ) المتسلسلة تتقارب بإنتظام في المنطقة $|z| \le \rho$ حيث $0 < \rho < R$.

ملاحظة :

يمكن إيجاد نصف قطر التقارب بإحدى الطرق الآتية وذلك بإستخدام اختبار كوشي للجذر أو اختبار النسبة :

(أ) بوضع $R = \dfrac{1}{L}$ حيث $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

(ب) بوضع $R = \dfrac{1}{L}$ حيث $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(جـ) بوضع $R = \dfrac{1}{L}$ حيث $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$

حيث هذه النهاية موجودة دائما . وذلك لوجود sup .

مثال:

اوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{0}^{\infty} \dfrac{2^n (z-i)^n}{n!}$.

الحل :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1}$$ بإيجاد النسبة

من ذلك فإن : $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 = L$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تكون تقاربية لجميع قيم z التي تحقق

$|z-i| < R = \frac{1}{L} = \infty$ أي في كل المستوى المركب.

مثال :

اختبر تقارب المتسلسلة الآتية وأوجد منطقة التقارب

$$\sum \frac{n^n (z+i)^n}{n!}$$

الحل :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e = L$$

إذن المتسلسلة تقاربية لجميع قيم z التي تحقق $|z+i| < R = \frac{1}{e}$

مثال :

ادرس من حيث التقارب والتباعد متسلسلة القوى $\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

مثال :

اوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3+(-1)^n\right\}^n z^n$

الحل :

عندما تكون n فردية إذاً $a_n=(3-1)^n=2^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty\ n\ odd}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(2^n)^{\frac{1}{n}}=2$$

عندما تكون n زوجي إذاً $a_n=(3+1)^n=4^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty\ n\ even}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(4^n)^{\frac{1}{n}}=4$$

$$\therefore \lim_{n\to a}\sup(a_n)^{\frac{1}{n}}=4 \quad \Rightarrow \quad R=\frac{1}{4}$$

متسلسلة تايلور Taylor Series

نظرية تايلور :

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية (منتظمة)في المجال D الذي يحتوي $(z-z_0)$ إذاً $f(z)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى في $(z-z_0)$ تعطى في الصورة :

مثال :

اوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3+(-1)^n\right\}^n z^n$

الحل :

عندما تكون n فردية إذاً $a_n=(3-1)^n=2^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty\ n\ \text{odd}}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(2^n\right)^{\frac{1}{n}}=2$$

عندما تكون n زوجي إذاً $a_n=(3+1)^n=4^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty\ n\ \text{even}}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(4^n\right)^{\frac{1}{n}}=4$$

$$\therefore \limsup_{n\to a}(a_n)^{\frac{1}{n}}=4 \quad\Rightarrow\quad R=\frac{1}{4}$$

متسلسلة تايلور Taylor Series

نظرية تايلور :

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية (منتظمة)في المجال D الذي يحتوي $(z-z_0)$ إذاً $f(z)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى في $(z-z_0)$ تعطى في الصورة :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots.$$
$$+ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

هذا المفكوك يصح داخل أكبر قرص مركزه z_0 ويقع داخل المجال D.

ملاحظة :

متسلسلة تايلور حول z=0 تسمى متسلسلة ماكلورين والتي تكون على الصورة :

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots. + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

مثال :

اوجد متسلسلة تايلور للدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ حول z=1.

الحل :

الصورة العامة لمفكوك (المتسلسلة)المطلوب تكون على الصورة :

$$\frac{1}{z}=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(z-1)^3+\ldots$$

$$\text{Now , } f(z)=\frac{1}{z}=z^{-1} \qquad \Rightarrow f(1)=1$$

$$f'(z)=(-1)z^{-2} \qquad \Rightarrow f'(1)=(-1)$$

$$f''(z)=(-1)(-2)z^{-3} \qquad \Rightarrow f''(1)=(-1)^2\,2!$$

$$f'''(z)=(-1)(-2)(-3)z^{-4} \qquad \Rightarrow f'''(1)=(-1)^3 n!$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(z)=(-1)^n(n)!z^{-(n+1)} \qquad \Rightarrow f^{(n)}(1)=(-1)^n n!$$

$$\frac{1}{z}=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(z-1)^3+\ldots$$

$$\text{Now , } f(z)=\frac{1}{z}=z^{-1} \qquad \Rightarrow f(1)=1$$

$$f'(z)=(-1)z^{-2} \qquad \Rightarrow f'(1)=(-1)$$

$$f''(z)=(-1)(-2)z^{-3} \qquad \Rightarrow f''(1)=(-1)^2\,2!$$

$$f'''(z)=(-1)(-2)(-3)z^{-4} \qquad \Rightarrow f'''(1)=(-1)^3 n!$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(z)=(-1)^n(n)!z^{-(n+1)} \qquad \Rightarrow f^{(n)}(1)=(-1)^n n!$$

وبالتالي فإن متسلسلة تايلور للدالة $f(z)=\frac{1}{z}$ حول $z=1$ يكون :

$$\frac{1}{z}=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots+\text{where it is}$$
$$\text{valid in } |z-1|<1$$

ملاحظة :

مفكوك ماكلورين لبعض الدوال الأساسية يعطى كالآتي :

$$(1)e^{-z}=1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}\ldots\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{n!}-\ldots \qquad (|z|<\infty)$$

$$(2)\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}-\ldots \qquad (|z|<\infty)$$

$$(3)\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}-\ldots \qquad (|z|<\infty)$$

$$(4)\sinh z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\ldots+\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad (|z|<\infty)$$

$$(5)\cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (|z|<\infty)$$

$$(6)\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots \qquad (|z|<1)$$

$$(7)\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots \qquad (|z|<1)$$

$$(8)\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots \qquad (|z|<1)$$

$$(9)\log(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\ldots\ldots-\frac{z^n}{n}+\ldots \qquad (|z|<1)$$

مثال :

اوجد مفكوك $\frac{1+z}{1-z}$ حول $z_0 = i$.

الحل :

$$f(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

$$\to f(i)=\frac{1+i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}=\frac{1-1+2i}{2}=i$$

$$f'(z)=\frac{1-z+(1+z)}{(1-z)^2}=\frac{2}{(1-z)^2} \quad , \quad f'(i)=\frac{2}{(1-i)^2}$$

$$f''(z)=\frac{2.(-2).(-1)}{(1-z)^3}=\frac{2.2!}{(1-z)^3} \quad , \quad f''(i)=\frac{2.2!}{(1-i)^3}$$

$$f'''(z)=\frac{2.2.(-3).(-1)}{(1-z)^4}=\frac{2.(3!)}{(1-z)^4} \quad , \quad f'''(i)=\frac{2.(3!)}{(1-i)^4}$$

$$\therefore \frac{1+z}{1-z}=i+\frac{2}{(1-i)^2}(z-i)+\frac{2.2!}{2!(1-i)^3}(z-i)^2+\frac{2.3!}{3!(1-i)^4}(z-i)^3+\ldots$$

$$=i+2\left[\frac{z-i}{(1-i)^2}+\frac{(z-i)^2}{(1-i)^3}+\frac{(z-i)^3}{(1-i)^4}+\ldots\right]$$

$$=i+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

متسلسلات لورانت :

نظرية لورانت : Laurents Theorem

بفرض $f(z)$ دالة تحليلية في المجال الحلقي المفتوح

$$0 < r < |z - z_0| < R$$

وعند كل نقطة على الدائرتين

$$C_1 : |z - z_0| = r \quad , \quad C_2 : |z - z_0| = R \; .$$

إذاً $f(z)$ يمكن تمثيلها في هذا المجال بالمفكوك الآتي :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \quad ,\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}},$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{-n+1}},$$

تنويه :

إذا كان C كنتور يقع في المنطقة الحلقية $r < |z - z_0| < R$ بحيث z_0 تقع داخله فإنه يمكن اعتباره مسار التكامل بدلا من C_1, C_2 المسارين ويصبح المفكوك (1) في الصورة :

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n (z-z_0)^n, \qquad (r<|z-z_0|<R)$$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

مثال :

اوجد مفكوك للدالـة $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+2)(z+3)}$ يمثلها في المناطق الآتية :

$$(a)\quad |z|<2 \qquad (b)\quad 2<|z|<3 \qquad (c)\quad |z|>3$$

الحل :

بتجزئ الكسر في الدالة إلـى كسوره الجزئيـة نجد أن :

$$f(z)=\frac{4}{(z+3)}-\frac{3}{(z+2)}$$

(أ) $\underline{|z|<2}$ ، نلاحظ أن النقط الشاذه للدالـة $f(z)$ تكون عند 3-,2- إذاً $f(z)$ تحليلية فـي $|z|<2$ وبالتالي فيكون لـها متسلسلة تـايلور فـي قوى z ، وعليه فـإن :

$$f(z)=\frac{4}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}-\frac{3}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\frac{4}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{2}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}$$

$$=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{3^{n+1}}-\frac{3}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

(أ) $3<|z|<2$ ، نلاحظ هنـا أن $f(z)$ لـها نقط شاذة على الدائرة $|z|=2$ ، $|z|=3$. بالتالي فإنها منتظمة فـي المجال الحلقي المعطى وسيكون لـها مفكوك لورانت . وعليه فإن

$$f(z)=\frac{4}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}-\frac{3}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)},\qquad \text{since } \left|\frac{z}{3}\right|<1,\left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$=\frac{4}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{z}\left(1+\frac{2}{z}\right)^{-1}$$

$$=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}-\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}$$

(جـ) $|z|>3$ هنا نلاحظ $\left|\frac{3}{z}\right|<1,\left|\frac{2}{z}\right|<1$ إذاً

$$f(z)=\frac{4}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)}-\frac{3}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}$$

$$=\frac{4}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{z^n}-\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}\left(4.3^n-3.2^n\right)$$

مثال :

أوجد مفكوك للدالة $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ في صورة متسلسلة لورانت في المجالات الآتيه :

(أ) $1<|z|<3$ (ب) $|z|>3$

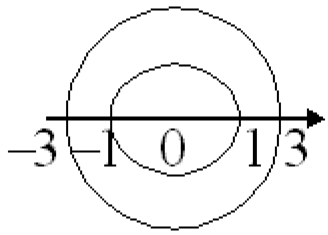
(جـ) $0<|z+1|<2$ (د) $|z|<1$

الحل :

اولا :

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\right]$$

(أ) $\underline{1<|z|<3}$ فنجد أن $\frac{1}{|z|}<1,\frac{|z|}{3}<1$



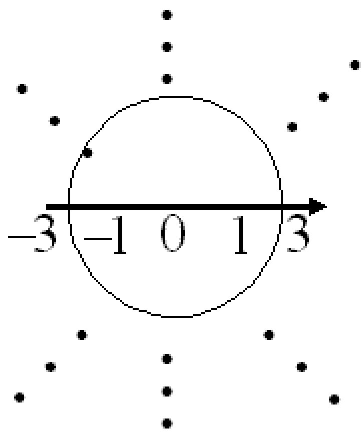
$$\therefore f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}-\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2z^{n+1}}$$

(ب) $\underline{|z|>3}$ فنجد أن $\left|\frac{z}{3}\right|<1$, $\frac{1}{|z|}<\frac{1}{3}<1$



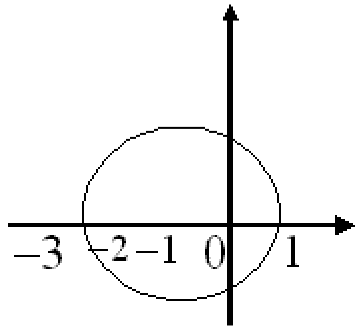
$$\therefore f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}-\frac{1}{2z}\left(1+\frac{3}{z}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(1-3^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}$$

(جـ) $0<|z+1|<2$: بوضع $z+1=u$ إذاً $0<|u|<2$



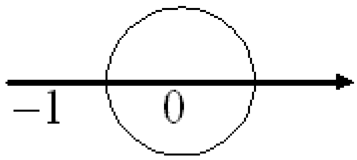
$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{u(u+2)}$$

$$=\frac{1}{2u}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{2u}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{u}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2(z+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}$$

(د) $|z|<1$: نلاحظ أن $\left|\frac{z}{3}\right|<\frac{1}{3}<1$



$$\therefore f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+z)^{-1}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n\right]$$

مثال :

أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ حول z=-2

ثم أوجد منطقة التقارب لهذه المتسلسلة .

الحل :

بوضع z+2=u إذاً

$$f(z)=\frac{u-2}{(u-1)u}=\frac{2-u}{u}(1-u)^{-1}=\frac{2-u}{u}\sum_{0}^{\infty}u^n \quad , \quad |u|<1$$

$$=\frac{2}{u}\sum_{n=0}^{\infty}u^n-\sum_{n=0}^{\infty}u^n$$

تكامل واشتقاق متسلسلات القوى :

نظرية :

ليكن C أي منحنى كفافي داخل دائرة تقارب متسلسلة القوى

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

ي أي دالة متصلة علىC ، يمكن تكامل المتسلسلة الناتجه من ضرب g(z) في كل حد من حدود متسلسلة حداً حداً علىC أي أن

$$\int_C g(z)f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)z^n dz$$

نظرية :

يمثل متسلسلة القوى دالة تحليلية عند كل نقطة داخل دائرة تقارب المتسلسلة .

البرهان :

بفرض C أي منحنى كفافي مغلق داخل دائرة التقارب ، وبأخذ $g(z)=1$
وبتطبيق النظرية :

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C z^n dz$$

$$\because \int_C z^n dz = 0 \quad \rightarrow \int_C f(z)dz = 0$$

وبتطبيق نظرية موريرا نجد أن $f(z)$ دالة تحليلية .

نظرية 3 :

اشتقاق متسلسلة القوى $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ حدا حداً أي أن عند كل نقطة z داخل دائرة التقارب فإن

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

مثال :

اوجد تكامل متسلسلة ماكلورين لـ $\frac{1}{1+s}$ على منحنى كفافي داخل دائرة التقارب من $s=0$ إلى $s=z$ ؟

الحل :

$$\frac{1}{1+s}=1-s+s^2-s^3+s^4-\ldots \quad , \quad |s|<1$$

$$\int_0^z \frac{1}{1+s}\,ds=\int_0^z\left(1-s+s^2-s^3+s^4-\ldots\right)ds$$

$$\rightarrow \log(1+s)\Big|_0^z = s-\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3}-\ldots\Big|_0^z$$

$$\rightarrow \log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} \qquad , \quad |z|<1$$

وحدانية التمثيل :

نظرية :

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ تقاربية إلى $f(z)$ عند كل النقاط داخل دائرة ما $|z-z_0|=r_0$ فإنها مفكوك تايلور لـ $f(z)$ بقوى $z-z_0$.

نظرية:

إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

متقاربة إلى $f(z)$ عند كل نقطة في منطلق حلقي حول z_0 فإنها مفكوك لورانت للدالة $f(z)$ بقوى $z-z_0$ في ذلك المنطلق .

مثال :

بإستخدام ضرب كوشي أوجد $f(z)=\sin z \cos z$ ؟

الحل :

$$f(z)=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right).\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)$$

$$a_0=0 \,,\, a_1=1 \,,\, a_2=0 \,,\, a_3=\frac{-1}{3!} \,,\, a_4=0 \,,\, a_5=\frac{1}{5!}$$

$$b_0=1 \,,\, b_1=0 \,,\, b_2=\frac{-1}{2!} \,,\, b_3=0 \,,\, b_4=\frac{1}{4!} \,,\, b_5=0$$

$$C_0=0 \quad , \quad C_1=0+1=1$$

$$C_2=0+0+0=0$$

$$C_3=0-\frac{1}{2!}+0-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{-4}{6}$$

$$C_4=0+0+0+0+0=0$$

$$C_5=0+\frac{1}{4!}+0+\frac{1}{3!}.\frac{1}{2!}+0+\frac{1}{5!}=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{120}$$

$$\therefore f(z)=z-\frac{2}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\ldots$$

مثال :

أوجد الحدود الأولى من متسلسلة لورانت للدالة :

$$h(z)=\frac{1}{z^2\sinh z}\qquad,\ (0<|z|<\pi)$$

الحل :

$$h(z)=\frac{1}{z^2\sinh z}$$

$$=\frac{1}{z^2}.\frac{1}{\sinh z}$$

$$\because \frac{1}{z^2}.\frac{1}{\sinh z}=\frac{1}{z^2}.\frac{1}{\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right)}$$

$$=\frac{1}{z^3\left(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\frac{z^6}{7!}\ldots\right)}$$

$$\frac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\frac{z^6}{7!}\ldots}=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots.$$

$$1=\left(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+a_5z^5+....\right).\left(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\frac{z^6}{7!}...\right)$$

$$=a_0+\frac{a_0}{3!}z^2+\frac{a_0}{5!}z^4+\frac{a_0}{7!}z^6+a_1z+\frac{a_1}{3!}z^3+\frac{a_1}{5!}z^5+a_2z^2+\frac{a_2}{3!}z^4$$

$$+\frac{a_2}{5!}z^6+\frac{a_3}{3!}z^5+a_4z^4+\frac{a_4}{3!}z^6+a_5z^5+\frac{a_5}{3!}z^7$$

$$=a_0+a_1z+\left(\frac{a_0}{3!}+a_2\right)z^2+\left(\frac{a_1}{3!}+a_3\right)z^3+\left(\frac{a_0}{5!}+\frac{a_2}{3!}+a_4\right)z^4$$

$$+\left(\frac{a_1}{5!}+\frac{a_3}{3!}+a_5\right)z^5+....$$

مثال :

اوجد الحدود الأولى من مفكوك ماكلورين للدالـة $\tan z$.

الحل :

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\rightarrow \tan z.\cos z=\sin z$$

بفرض $|z|<\frac{\pi}{2}$, $\tan z=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+....$

$$\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\right).\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \ldots\right)$$

$$= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right)$$

$$a_0 - \frac{a_0}{2!} z^2 + \frac{a_0}{4!} z^4 + a_1 z - \frac{a_1}{2!} z^3 + \frac{a_1}{4!} z^5 + a_2 z^2 - \frac{a_2}{2!} z^4$$

$$+ \frac{a_2}{4!} z^6 + a_3 z^3 - \frac{a_3}{2!} z^5 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \ldots = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

$$\rightarrow a_0 + a_1 z + \left(-\frac{a_0}{2} + a_2\right) z^2 + \left(-\frac{a_1}{2} + a_3\right) z^3 + \left(\frac{a_0}{4!} - \frac{a_2}{2!} + a_4\right) z^4$$

$$+ \left(\frac{a_1}{4!} + a_5\right) z^5 + \ldots = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

بمقارنة المعاملات للطرفين

$$a_0 = 0 \quad , a_1 = 1$$

$$-\frac{a_0}{2} + a_2 = 0 \;\rightarrow\; a_2 = 0$$

$$-\frac{a_1}{2} + a_3 = -\frac{1}{3!} \;\rightarrow a_3 = \frac{-1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_0}{4!} - \frac{a_2}{2!} + a_4 = 0 \rightarrow a_4 = 0$$

$$\frac{1}{4!} + a_5 = \frac{1}{5!} \rightarrow a_5 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}$$

$$\therefore \tan z = z + \frac{1}{3} z^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\right) z^5 + \ldots \quad , \quad |z| < \frac{\pi}{2}$$

الضرب و القسمة :

إذا كانت كل من متسلسلتي القوى

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$$

متقاربة داخل دائرة ما $|z|<r$ فإن حاصل الضرب للمجموعتين له مفكوك متسلسلة ماكلورين

$$f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$$

المعاملات C_n تعطى بالصيغة :

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$$

تعريف : حاصل ضرب كوشي :

حاصل ضرب كوشي لمتسلسلتي تايلور :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n (z-z_0)^n, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n (z-z_0)^n \qquad ...(1)$$

هو المتسلسلة $f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$ حيث $C_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$

النقاط الشاذه – الأقطاب – الأصفار:

Singular points, Poles and Zeros

النقطة الشاذة المفردة :

Singular Point

نسمي أي نقطة z_0 لا تكون الدالة عندها منتظمة (تحليلية)هلومورفي بأنها نقطة شاذة .

مثال :

النقطة الشاذة للدالة $f(z)=\frac{z}{z^2+z-2}=\frac{z}{(z+2)(z-1)}$

هي النقطة $z_0=-2$، النقطة $z_0=1$.

والنقطة الشاذة للدالة $f(z)=\frac{\cos z}{z^2+1}$ هي $z=\pm i$.

والنقطة الشاذة للدالة $f(z)=\cot z$ هي

$$z=n\pi\ ,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

الدالة $f(z)=e^z$ ليس لها نقط شاذة على الإطلاق وتسمى دالة كاملة (شاملة) لأنها منتظمة (تحليلية) في مستوى آرجند بأكمله .

تنويه :

إذا كانت الدالة $f(z)$ ممثلة بمتسلسلة لورانت

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-z_0)^n = \sum_1 + \sum_2$$

حيث $\sum_1$ الجزء التحليلي(قوى موجبة) و $\sum_2$ الجزء الأساسي (قوى سالبة)

على المجال الحلقي $r<|z-z_0|<R$ حول z_0 فإن الدالة $f(z)$ ليست منتظمة عند النقطة z_0 أي أن z_0 نقطة شاذة لهذه الدالة

أما في حالة إذا كانت $r=0$ فإن هذه النقطة الشاذة تسمى نقطة شاذة معزولة . وفي هذه الحالة المتسلسلة تتقارب على القرص المثقوب $0<|z-z_0|<R$.

مثال :

النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)=\frac{1}{z}$

النقاط $z=\pm i$ نقاط شاذة معزولة للدالة $f(z)=\frac{2i}{z^2+1}$

تصنيف النقاط الشاذة المعزولة :

تصنف النقاط الشاذة المعزولة على أساس النظر إلى الجزء الأساسي $\sum_2$ من مفكوك لورانت إلى ثلاثة أصناف .

١ ـ نقاط شاذة معزولة قابلة للإزالة : (سيكون لدينا $\sum_2 = 0$)

٢ ـ نقاط شاذة تعطى أقطاب الدالة : سيكون لدينا

$$\left(\sum_2 \neq 0, \ \text{for some } n\right)$$

٣ ـ نقاط شاذة أساسية : وعندها نجد ($\sum_2 \neq 0, \ \forall n$)

نقاط شاذة معزولة قابلة للإزالة :

Removable Singularities

إذا كانت a نقطة شاذة معزولة للدالة f(z) فيقال أن a قابلة للإزالة

إذا كان الجزء الأساسي $\sum_2 = 0$ من مفكوك لورانت منعدم .

ونلاحظ عندئذ أن متسلسلة لورانت تأخذ شكل متسلسلة تايلور .
وبالتالي نجد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$= a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \ldots$$

$$\therefore \lim_{z \to a} f(z) = a_0$$

وبالتعريف فإن $f(a) = a_0$ وبهذا تصبح الدالة منتظمة (تحليلية)
عند a .

مثال :

الدالة $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة $z=0$ واضح أن $\lim_{z\to 0} f(z)=1$ بالتالي فإنه بوضع $f(0)=\lim_{z\to 0} f(z)=1$ تصبح :

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z} & , \quad z\neq 0\\ 1 & , \quad z=0\end{cases}$$

وبذلك تكون الدالة معرفة عند $z=0$. أي أن النقطة الشاذة أزيلت بتعريف الدالة عندها .

كما أن مفكوك لورانت هو

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)$$

$$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots$$

وهذا المفكوك ينعدم فيه الجزء الأساسي $\sum_2$ (أي خالي من الحدود ذو القوة السالبة) .

مثال :

النقطة $z=2$ هي نقطة شاذة زائلة للدالة $f(z)=\frac{z^2-3z+2}{(z-2)}$ حيث أن $f(z)=z-1$ عندما $z\neq 2$.

2- نقاط شاذة تعطى أقطاب الدالة Poles

إذا كانت a نقطة شاذة معزولة للدالة f(z) فيقال أن a قطب من رتبة r إذا كان الجزء الأساسي $\sum_2$ من مفكوك لورانت يحتوي على عدد r من الحدود ويعطى في الصورة :

$$\sum_2 = \frac{b_1}{z-1} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{b_r}{(z-a)^r} = \sum_{n=1}^{n=r} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

حيث $b_r \neq 0$

ملاحظات :

(*) إذا كان r=1 فتسمى النقطة a قطب بسيط Simple pole .

(*) إذا كان a قطب للدالة فإن $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

(*) أن معامل $\left(\frac{1}{z-a}\right)$ في $\sum_2$ هو b_1 ويسمى (باقي الدالة(راسب) عند z=a .
(Residue of f(z) at a) وبالتالي يمكن حسابه بإعتباره معامل $\left(\frac{1}{z-a}\right)$.

أمثلة توضيحية :

مثال 1:

الدالة $f(z)=\frac{e^z}{z}$ لها النقطة $z=0$ هي قطب بسيط حيث نلاحظ أن مفكوكها هو :

$$\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

الجزء الأساسي $\sum_2$ من مفكوك لورانت يحتوي على حد واحد هو $\frac{1}{z}$ وعليه فإن معامله $b_1=1$ (هو باقي الدالة عند القطب البسيط $z=0$).

مثال :

الدالة $f(z)=\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ لها نقاط شاذة عند

$$z=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

حيث n عدد صحيح .

مثال :

الدالة $f(z)=\frac{1}{(z-1)^3}$ لها قطب من الرتبة 3.

مثال:

الدالة $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$ لها قطب من الرتبة الأولى أي قطب بسيط

وذلك لأن :

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_0^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)=\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\ldots\right)$$

حيث يوجد فقط الحد $\frac{1}{z}$ في الجزء الأساسي $\sum_2$ وقوة z هي واحد .

مثال :

الدالة $f(z)=\frac{\sinh z}{z^n}$

النقطة z=0 نقطة شاذة

$$\frac{\sinh z}{z^n}=\frac{1}{z^4}\left[z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!z}+\frac{z}{5!}+\ldots.$$

حيث z=0 قطب من الدرجة 3.

الراسب = $\frac{1}{3!}$.

ـ نقاط شاذة أساسية :

إذا كانت a نقطة شاذة معزولة فيقال أن $z=a$ نقطة شاذة أساسية إذا كان الجزء الأساسي $\sum_{2}$ من مفكوك لورانت يحتوي على عدد لا نهائي من الحدود التي معاملاتها لا تساوي صفر .

مثال :

النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ حيث

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2}+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^{3}+\dots$$

الجزء الأساسي $\sum_{2}$ من المفكوك يحتوي على عدد لا نهائي من الحدود .

مثال :

الدالة $f(z)=z^{2}\sin\frac{1}{z}$ لها نقطة شاذة أساسية هي $z=0$ حيث

$$f(z)=z^{2}\sin\frac{1}{z}=z^{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^{3}}+\frac{1}{5!z^{5}}-\dots\right)$$

$$=z-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z^{3}}\right)+\dots$$

الجزء الأساسي $\sum_{2}$ من المفكوك يحتوي على عدد لا نهائي من الحدود .

تعريف الدالـة الميرومورفيـة :

Meromorphic function

الدالة $f(z)$ يقال أنها ميرومورفيـة إذا كانت منتظمة (تحليلية) فيما عدا عند عدد منتهي من النقاط . مجموعة النقاط المنتهية هذه تمثـل أقطاب للدالـة .

مثال :

الدالة $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ هذه الدالة تحليلية ماعدا عند $z=0$ ، $z=1$ أيضا $z=0$ ، $z=1$ أقطاب من رتبة واحد ، رتبـة2 على التوالي .
إذاً $f(z)$ دالة ميرومورفيـة.

مثال :

الدالة $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ هي دالة ميرومورفيـة . حيث

$$\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

مثال :

الدالة $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ ليست دالـة ميرومورفيـة . حيث $z=0$ هي نقطة شاذة أساسيـة .

التمارين

(١) أوجد مفكوك $\sin z$ (متسلسلة تـايلور) حول $z=\frac{\pi}{4}$ مع بيان منطقة التقارب .

(٢) أوجد مفكوك لورانت للدالـة $f(z)=\frac{2}{(1-z)(z-2)}$ في المناطق الآتية :

(أ) $|z|<1$ (ب) $1<|z|<2$ (جـ) $|z|>2$

(د) $|z-1|<1$ (هـ) $|z-2|<1$

(3) أوجد مفكوك لورانت للدالـة $f(z)=\frac{1}{z}$ ضمن الحلقة $R:1<|z-1|<\infty$.

(4) أوجد مفكوك لورانت للدالـة $f(z)=\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ في المنطقة الحلقيـة $1<|z|<2$.

(5) اوجد مفكوك الدالـة $f(z)=\frac{5z+2i}{z(z+i)}$ في المنطقة $1<|z-i|<2$.

الدرس العاشر
حساب البواقي
Calculus of Residues

أصفار الدالة التحليلية (المنتظمة) :
Zeros of Analytic (Regular) Functions

إذا كانت z_0 نقطة بحيث $f(z_0)$ فإن z_0 تسمى صفر للدالة $f(z)$.

تعريف :

إذا كانت z_0 تحقق الشرط التالي :
يوجد عدد صحيح k موجب بحيث

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0$$

ولكن $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ فإن z_0 تسمى صفر من درجة k للدالة التحليلية $f(z)$ عند z_0 .

نظرية :

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية عند z_0 فإنه يوجد لها صفر من درجة k إذا وفقط إذا وجدت دالة $g(z)$ تحليلية عند z_0 بحيث $g(z_0) \neq 0$ وتحقق :

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

البرهان :

بما ان $f(z)$ تحليليه عند z_0 فإنه يوجد لها متسلسه تايلور تتقارب

للدالة عند z_0 أي $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ في مجال تقارب ما D

فإذا كانت z_0 صفرا من الدرجه k للدالة $f(z)$ فإن :

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=....=f^{(k-1)}(z_0)=0 \quad , \quad f^{(k)}(z_0)\neq 0$$

وبالتالي تصبح المتسلسلة كما يلي :

$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha_k(z-z_0)^k+\alpha_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\dots \\ &= (z-z_0)^k\left[\alpha_k+\alpha_{k+1}(z-z_0)+\alpha_{k+2}(z-z_0)^2+\dots\right] \\ &= (z-z_0)^k\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{k+n}(z-z_0)^n \end{aligned}$$

ويمكن وضع المجموع في z كدالة تحليلية في $g(z)$ بحيث أن

$a_k=g(z_0)\neq 0$ وتصبح $f(z)=\alpha_k(z-z_0)^k g(z)$

نظرية (تربط بين الصفر من الدرجة m والقطب من الدرجة m):

اذا كانت $\phi(z)$ تحليله (منتظمة) عند z_0 ، $\phi(z_0)\neq 0$ وعرفنا $f(z)$ بحيث

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}, \quad m\geq 1$$

فإن z_0 قطب من درجة m للدالة $f(z)$.

البرهان :

بما ان $\phi(z)$ تحليلية عند z_0 فلها مفكوك تايلور

$$\phi(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\alpha_2(z-z_0)^2+\ldots$$

حيث $\alpha_0=\phi(z_0)\neq 0$

$$\therefore f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}=\frac{\alpha_0}{(z-z_0)^m}+\frac{\alpha_1}{(z-z_0)^{m-1}}$$

$$+\frac{\alpha_2}{(z-z_0)^{m-2}}+\ldots..+\alpha_m+\alpha_{m+1}(z-z_0)+\ldots.$$

قطب z_0 من الدرجه m للدالة $f(z)$.

مثال :

الداالة $f(z)=\sin z$ لها الموضع الصفري $z=0$ من رتبة (درجة) 1 يتضح ذلك من

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots.$$

$$=z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots.\right)=z.g(z)\quad , \quad g(z_0)\neq 0$$

نلاحظ ان $g(z)$ دالة تحليلية وأن $g(0)=1\neq 0$

مثال:

الدلة $f(z)=(z-2i)^2(z+3)^3e^z$ لها $2i$ صفر من رتبة 2 ، كذلك -3 صفر من رتبة 3 .

مثال :

الدالة $f(z)=z^2\sin z$ لها $z=0$ من رتبة 3 وذلك لأن :

$$f(z)=z^2\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-....\right)$$
$$=z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-....\right)=z^3.g(z)$$

واضح ان $g(z)$ تحليلية، $g(0)\neq 0$ إذا $z=0$ صفر من رتبة3 .

مثال:

حدد نوع النقطة الشاذة $z=1$ للدالة $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$.

الحل :

$$\phi(z)=e^z \quad , \quad \phi(1)\neq 0$$

تحليليه عند $z=1$

إذن $z=1$ يمثل قطب من الدرجة الثانية .

مثال:

حدد نوع النقطة الشاذة $z=1$ للدالة $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z^2-1)^2}$.

الحل :

$$f(z)=\frac{\sin z}{(z-1)^2(z+1)^2}$$

$$\rightarrow f(z)=\frac{\sin z \Big/ (z+1)^2}{(z-1)^2}$$

$\phi(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}$ تحليلية عند z=1 , $\phi(1)\neq 0$

اذن z=1 قطب من الدرجة الثانيه.

تمهيدية :

إذا كانت f لها صفر من الدرجة m عند z_0 فإن $\dfrac{1}{f}$ لها قطب من الدرجة m عند z_0 وبالعكس إذا كانت f لها قطب من الدرجة m عند z_0 فإن $\dfrac{1}{f}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند z_0 وإذا عرفنا $\dfrac{1}{f(z_0)}\neq 0$ فإن $\dfrac{1}{f}$ لها صفر من الدرجة m عند z_0.

البرهان :

z_0 صفر من الدرجة m للدالة f(z)

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$$

حيث g(z) تحليلية عند z_0 ، $g(z_0)\neq 0$ ....(1)

$$\therefore \frac{1}{f}=\frac{1}{(z-z_0)^m}.\frac{1}{g(z)} \qquad .....(2)$$

من (1) يمكن ايجاد متسلسلة تايلور لها باستخدام ضرب كوشي

$$\frac{1}{g(z)}=b_0+b_1(z-z_0)+......$$

$$\to 1=\left(a_0+a_1(z-z_0)+....\right)\left(b_0+b_1(z-z_0)+...\right)$$

بمقارنه المعاملات نوجد

$b_0,b_1,b_2,....$

وبالتعويض في(2) :

$$\therefore \frac{1}{f}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left(b_0+b_1(z-z_0)+...\right)$$

حيث $b_0 \neq 0$

اذن z_0 لها قطب من الدرجة m لـ$\frac{1}{f}$.

الاتجاه الثاني:

إذاكانت z_0 قطب من الدرجة m للدالة f

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

حيث $g(z)$ تحليلية عند z_0 ، $g(z_0)\neq 0$ .... (1)

من العلاقة (1) يمكن ايجاد مفكوك تايلور للدالـه $\frac{1}{g(z)}$. كما سبق

وتصبح (2):

$$\frac{1}{f}=(z-z_0)^m.\left(b_0+b_1(z-z_0)+...\right)$$

إذن z_0 صفر من الدرجة m للداله $\frac{1}{f}$ بشرط $\frac{1}{f(z_0)} \neq 0$
ايضا z_0 نقطة شاذة قابلـة للإزالـة.

البواقي:

Residue

تعريف:

إذا كانت a نقطة شاذة معزولة للدالـة f(z) فإن باقي الدالـة f(z)(Residue of f(z)) عند a هو معامل $\frac{1}{z-a}$ في مفكوك لورانـت للدالة حول النقطـة a ويرمز لـه بـالرمز $Res.(f(z),a)$ أي ان

$$Res.(f(z),a) = \text{معامل } \frac{1}{z-a} \text{ في مفكوك لورانت} \quad \ldots (I)$$

نتيجه :

إذا كانت z=a قطب بسيط للدالـة f(z) فإن باقي الدالة يعطى مـن

$$Res.(f(z),a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z) \quad \ldots\ldots (II)$$

البرهـان :

إذا كانت $z=a$ هو قطب بسيط للدالـة $f(z)$ إذا مفكوك لورانت للدالـة $f(z)$ حول $z=a$ يكون على الصـورة

$$f(z)=\sum_1 + \sum_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + b_1\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

$$\therefore (z-a)f(z)=b_1+\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n+1}$$

$$\therefore \lim_{z\to a}(z-a)f(z)=b_1$$

$$= \text{Res}(f(z),a)$$

تمرين :

اثبت ان النقاط الشاذة للدوال الكسرية إما نقاط شـاذة قابلـة للإزالـة او اقطاب ؟

الحل:

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

حيث $P(z)$، $Q(z)$ كثيرات الحـدود. فإذا كانت z_0 نقطة شاذة للدالـة f فإن z_0 صـفر من الدرجـة m لـ $Q(z)$ وبالتالـي فإن

$$Q(z)=(z-z_0)^m q(z)$$

حيث $q(z)$ تحليلية عند z_0 ، $q(z_0)\neq 0$

$$f(z)=\frac{P(z)}{(z-z_0)^m q(z)}$$

(أ) إذاكانت $f(z_0) \neq 0$

$$\therefore f(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)^m q(z)} = \frac{P(z)/q(z)}{(z-z_0)^m}$$

من النظرية فإن z_0 قطب من الدرجة m لـ f.

(ب) إذاكانت z_0 صفر من الدرجة n للدالة $P(z)$ فإن

$$P(z) = (z-z_0)^n p(z)$$

حيث $p(z)$ تحليلية عند z_0، $p(z_0) \neq 0$

$$\rightarrow f(z) = \frac{(z-z_0)^n p(z)}{(z-z_0)^m q(z)} = \frac{f(z)/q(z)}{(z-z_0)^{m-n}}$$

إذا كانت $m > n$ فإن z_0 قطب من الدرجة $m - n$.

إذا كانت $m \leq n$ فإن z_0 نقطة شاذه قابلة للإزالة.

مثال:

احسب الباقي للدالة :

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$$

عند نقاطها الشاذه.

الحل:

$$f(z)=\frac{z+1}{(z-3i)(z+3i)}$$

النقاط الشاذة هي $z=\pm 3i$ وجميعها اقطاب بسيطة

(١) الباقي عند $z=3i$:

$$f(z)=\frac{{}^{z+1}\!\diagup_{(z+3i)}}{(z-3i)}$$

$$\therefore \quad \operatorname{Res.}(f(z),3i)=\lim_{z\to a}(z-3i).\frac{(z+1)}{(z-3i)(z+3i)}$$

$$=\frac{3i+1}{6i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}i$$

(٢) الباقي عند $z=-3i$:

$$\operatorname{Res.}(f(z),-3i)=\lim_{z\to a}(z+3i).\frac{(z+1)}{(z-3i)(z+3i)}$$

$$=\frac{-3i+1}{-6i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}i$$

نتيجة:

إذا كانت a قطب بسيط للدالـة $f(z)$ وكانت $f(z)$ في الصـورة $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{\psi(z)}$ حيث $\phi(z),\psi(z)$ دالتين تحليلتين عند $z=a$، $\phi(a)\neq 0$

فإن :

$$\boxed{\operatorname{Res.}\left(f(z),a\right)=\frac{\phi(a)}{\psi'(a)}}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res.}\left(f(z),a\right)&=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)\\
&=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\phi(z)}{\psi(z)}\\
&=\lim_{z\to a}\phi(z).\lim_{z\to a}\frac{(z-a)}{\psi(z)}\\
&=\phi(a).\lim_{z\to a}\frac{(z-a)}{\psi(z)-\psi(a)}\qquad,\qquad\left(\psi(a)=0\right)\\
&=\phi(a).\frac{1}{\psi'(a)}\\
&=\frac{\phi(a)}{\psi'(a)}
\end{aligned}$$

مثال:

احسب الباقي للدالـة $\cot z$.

الحل :

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

النقاط الشاذه عند $z = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ وهي اقطاب بسيطة .

$\cos z$ تحليلية ، $\cos(n\pi) \neq 0$

$$\operatorname{Res.}(f(z), n\pi) = \frac{\cos n\pi}{(\sin z)'\,|_{(n\pi)}} = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1$$

نتيجة:

إذا كانت a قطب من رتبة $n > 1$ للدالة $f(z)$ فإن الباقي يعطى من :

$$\boxed{\operatorname{Res.}(f(z), a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-a)^n f(z)\right] \quad \ldots(\mathrm{III})}$$

البرهان :

حيث ان a قطب من الدرجة للدالة $f(z)$ فإن مفكوك لورانت لهذه الدالة حول a يأخذ الشكل

$$f(z) = \frac{b_n}{(z-a)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(z-a)} + \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k$$

بضرب الطرفين في $(z-a)^n$:

$$(z-a)^n f(z) = b_n + b_{n-1}(z-a) + b_{n-2}(z-a)^2$$
$$+ \dots + b_1 (z-a)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^{n+k}$$

وهذه متسلسله في صورة متسلسلة تايلور والتي يمكن اشتقاقها حدا حدا لأي عدد من المرات فبالاشتقاق (n-1) مرة نجد:

$$\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-a)^n f(z)\right] = (n-1)!\,b_n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}(z-a)^{n+k}$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $z \to a$:

$$\therefore \lim_{z\to a} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-a)^n f(z)\right] = (n-1)!\,b_1$$

$$\therefore \mathrm{Res}\left[f(z), a\right] = b_1 = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-a)^n f(z)\right]$$

مثال :

احسب الباقي $\mathrm{Res}\left[f(z), a\right]$ للدالة $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2(z^2+1)}$ عند كل قطب لها .

الحل:

حيث أن اقطاب $f(z)$ هي اصفار $\dfrac{1}{f(z)}$ وعليه فإن

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2(z+i)(z-i)}$$

إذا

(١) $z=i$ قطب بسيط للدالـة (من رتبـة 1) Simple Pole

(٢) $z=-i$ قطب بسيط للدالـة (من رتبـة 1) Simple Pole

(٣) $z=0$ قطب من رتبـة 2 (يسمى قطب ثنـائي) Double Pole

لحساب البواقي إما ان نستخدم مفكوك لورانت للدالـة أو نطبق النتائج السابقة (I), (II), (III)

إذا باستخدام النتائج السـابقه نجد:

$$(1)\ \mathrm{Res.}[f,i]=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{z+2}{z^2(z+i)}=\left(\frac{-1}{2}+i\right)$$

$$(2)\ \mathrm{Res.}[f,-i]=\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{z+2}{z^2(z-i)}=\left(\frac{-1}{2}-i\right)$$

$$(3)\ \mathrm{Res.}[f,0]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z-0)^2 f(z)\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z+2}{z^2+1}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{-z^2-4z+1}{\left(z^2+1\right)^2}=1$$

مثال :

أوجد $\text{Res}\left[f(z),a\right]$ عند كل قطب a للدالة

$$f(z)=\frac{\sin z}{\cos z}=\tan z$$

الحل :

نلاحظ أن $f(z)$ على الصورة $f(z)=\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$ حيث

$\phi(z)=\sin z$ ، $\psi(z)=\cos z$ كذلك فإن أقطاب الدالة $f(z)$ هي

أصفار الدالة $\frac{1}{f(z)}$

أي أصفار $\psi(z)=\cos z$

وحيث أن $\psi(z)=\cos z=0$

إذا وفقط إذا كان $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $a=$ حيث n عدد صحيح .

إذا أقطاب الدالة هي $a=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ (وهي أقطاب بسيطة)

كذلك فإن $\phi(a)=\phi\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$

حيث) $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=\pm1$ لكل $n\neq0$

وعليه فإننا نجد :

$$\text{Res.}\left[f(z),a\right]=\frac{\phi(a)}{\psi'(a)}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\cos'\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}=-1 \quad , \quad \forall n \text{ integer}$$

مثال:

احسب قطب وباقي الدالـة $f(z)=\dfrac{1-2z}{e^z\left(z^2+z^3\right)}$.

الحل:

نلاحظ أقطاب الدالـة $f(z)$ هي المواضع الصـفرية للدالـة $\dfrac{1}{f(z)}$

$$\therefore e^z\left(z^2+z^3\right)=0$$

$$\therefore e^z z^2(1+z)=0 \quad \Rightarrow \quad z=0 \quad , \quad z=-1$$

حيث $z=-1$ قطب بسيط، $z=0$ قطب من رتبـة 2 وباقي الدالة عند $z=-1$ هو

$$\text{Res.}[f\ ,-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)$$

$$=\lim_{z\to -1}\frac{1-2z}{z^2e^z}=3e$$

(*) لـحساب باقي الدالـة عند $z=0$:

الطريقة الاولى:(باستخدام مفكوك لورانـت)

نوجد من مفكوك لورانت معامـل $\frac{1}{z}$ فنجد مفكوك لورانت هو :

$$f(z)=\frac{1}{z^2}(1-2z)e^{-z}(1+z)^{-1}$$
$$=\frac{1}{z^2}(1-2z).\left(1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+....\right).(1-z+z^2-...)$$

معامل $\frac{1}{z}$ سيكون هو معامل z في حاصـل الضـرب
$(1\text{-}2z)(1\text{-}z)(1\text{-}z)$ و هو -4 .

ملاحظـة : معامل x في المقدار
$(1+a_1x)(1+a_2x)(1+a_3x)...(1+a_nx)$ هو
$a_1+a_2+a_3+...+a_n$

الطريقة الثانيـة :

باستخدام العلاقـة (III) نلاحظ n=2:

$$\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[\cancel{z^2}\cdot\frac{1-2z}{e^z\cancel{z^2}(1+z)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{-e^z\left(4-z-2z^2\right)}{e^{2z}\left(z^2+2z+1\right)}=-4$$

وهي نفس النتيجه التي حصلنا عليها أعلاه .

نظرية كوشي للباقي :

Cauchys Residue Theorem

إذا كانت $a_1,a_2,....,a_n$ نقاط شاذه للدالة التحليلية $f(z)$ واقعة في المنطقه الداخلية للكنتور المغلق البسيط الموجب الاتجاه C فإن :

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left[f(z),a_j\right] \qquad ....(V)$$

البرهان :

لتكن $C_1,C_2,....,C_n$ منحنيات كفافية موجبة الإتجاه تحتوي النقاط الشاذة $a_1,a_2,....,a_n$ للدالة التحليلية $f(z)$ وتقع داخل C إذا حسب نظرية كوشي فإن :

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \ldots\ldots + \oint_{C_n} f(z)dz \quad \ldots.(1)$$

الدالة$f(z)$ لها مفكوك لورانت حول النقطه الشاذة a_j

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a_j)^{-n}$$

حيث $0 < |z-a_j| < R$

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a_j)^n + \oint_{C} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a_j)^{-n} \quad \ldots.(2)$$

ملاحظة :

(*)من نظرية كوشي (التكامل للداله التحليلية على المسارات المعقلة = 0)

(*) ومن النتيجة

$$\oint \frac{dz}{(z-z_0)^m} = \begin{cases} 2\pi i & , \quad m=1 \\ 0 & , \quad m \neq 1 \end{cases}$$

وبالتعويض في (2):

$$\oint_{C} f(z)dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \, Res.\left[f(z), a_j\right]$$

وبالتعويض في (1) :

$$\oint_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res.\left[f(z), a_j\right]$$

مثال :

احسبي التكامل $\oint_C \frac{zdz}{z^2-1}$ حيث C الدائرة $|z|=2$ في الاتجاه الموجب .

الحل:

الدالة $f(z)=\frac{z}{z^2-1}$ لها قطبان $z=\pm1$ يقعان داخل المنحنى $|z|=2$ إذا وبإستخدام العلاقه V نجد أن

$$\oint_C \frac{zdz}{z^2-1} = 2\pi i\left[\text{Res.}(f,1)+\text{Res.}(f,-1)\right]$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2\pi i$$

عند قطب بسيط عند z= -1 قطب بسيط

الحل بطريقة اخرى:

بإستخدام صيغة كوشي التكاملية و هي :

$$\oint_C \frac{zdz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z-1}$$

$$=\frac{1}{2}.2\pi i f(-1)+\frac{1}{2}.2\pi i g(1)$$

حيث اعتبرنا في صيغه كوشي التكاملية $f(z)=1$ ، $g(z)=1$

و يكون $f(1)=1$ ، $g(-1)=1$ إذا

$$\oint_C \frac{z\,dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}.2\pi i(1+1)=2\pi i$$

مثال:

1)احسب $\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}dz$.

النقطة الشاذة $z=1$ تقع داخل C هي قطب من الدرجة الثانية

$$\because \int f(z)dz=2\pi i \,\text{Res.}\left[f(z),1\right]$$

$$\because \text{Res.}\left[f(z),1\right]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2 e^{-z}}{(z-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\left[-e^{-z}\right]=-e^{-1}$$

$$\therefore \int f(z)dz=\frac{-2\pi i}{e}$$

2) $\int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}}dz$

النقطة الشاذة $z=0$ تقع داخل المنحنى

$$\because \int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}}dz=2\pi i\,\text{Res}\left[f(z),0\right]$$

$$\because e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^3+\ldots..$$

$z=0$ نقطه شاذه اساسية

$$\text{Res.}\left[f(z),0\right]=0$$

$$\therefore \int e^{\frac{1}{z^2}}\,dz=0$$

3) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$

الحل:

النقاط الشاذة $z=0$, $z=1$ داخل المنحنى

$$\int f(z)dz=2\pi i\left(\text{Res.}\left[f(z),0\right]+\text{Res.}\left[f(z),1\right]\right)$$

عند $z=0$ قطب بسيط

$$\text{Res.}\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z(5z-2)}{z(z-1)}=2$$

عند $z=1$ قطب بسيط

$$\text{Res.}\left[f(z),1\right]=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(5z-2)}{z(z-1)}=3$$

$$\therefore \int f(z)dz=2\pi i(2+3)=10\pi i$$

مثال:

احسب $\displaystyle\oint_C \frac{e^z-1}{z}dz$ حيث C الدائرة $|z|=1$ في الاتجاه الموجب.

الحل:

النقطة $z=0$ نقطة شاذة تقع داخل المنحنى زائلة (قابلة للإزالة)

للدالة $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$ وذلك لأن

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(e^z-1\right)=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+....$$

ومنها الباقي يساوي صفر يساوي صفر أي $Res.(f,0)=0$
وبالتالي التكامل = صفر

مثال:

احسب $\oint_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^4}dz$ حيث C الدائرة $|z|=5$ في الاتجاه الموجب

الحل:

النقطة $z=\pi$ تقع داخل $|z|=5$ وهي نقطه شاذه نفرض $u=z-\pi$
إذا :

$$\frac{\sin z}{(z-\pi)^4}=\frac{\sin(\pi+u)}{(u)^4}=\frac{-\sin u}{u^4}$$

$$=\frac{-1}{u^4}\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-...\right)$$

$$=\frac{-1}{u^3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{u}{5!}+...$$

$$=\frac{-1}{(z-\pi)^3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-\pi}\right)-\frac{1}{5!}(z-\pi)+...$$

الباقي هو معامل $\frac{1}{z-\pi}$ ويساوي $\frac{1}{6}$ أي ان $\text{Res.}(f,\pi)=\frac{1}{6}$

باستخدام نظرية الباقي نحصل على:

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^4}dz = 2\pi i\,\text{Res.}(f,\pi)$$

$$=2\pi i.\frac{1}{6}=\frac{\pi i}{3}$$

مثال:

احسب $\oint_C \frac{e^{iz}-\sin z}{(z-\pi)^3}\,dz$ حيث C منحنى الدائرة $|z-3|=1$ في الاتجاه الموجب .

الحل:

$z=\pi$ تمثل قطبا لدالة من الرتبة3 .

$$\text{Res.}\left[f(z),\pi\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to\pi}\frac{d^2}{dz^2}\left(e^{iz}-\sin z\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^{iz}-\sin z}{(z-\pi)^3}\,dz = 2\pi i\,\text{Res.}(f,\pi)=\pi i$$

مثال:

اوجد $\oint_C \frac{z+2}{z^2\left(z^2+1\right)}\,dz$ في الحالات الآتية :

(أ) C هو المسار $|z| = \frac{1}{2}$

(ب) C هو المسار $|z-i| = \frac{1}{2}$

(ج) C هو المسار $|z+i| = \frac{1}{2}$

(د) C هو المسار $|z| = 2$

الحل:

نلاحظ ان $f(z) = \frac{z+2}{z^2(z^2+1)}$

(أ) المسار $|z| = \frac{1}{2}$ يحتوي فقط القطب $z=0$ من الرتبة 2 داخلة إذا

$$\therefore \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \, \text{Res.}(f,0)$$

وحيث أن $\text{Res.}(f,0) = 1$ (سبق حسابه) إذا

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i$$

(ب) المسار $|z-i| = \frac{1}{2}$ يحتوي القطب البسيط $z=i$ داخله

$$\therefore \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \, \text{Res.}(f,i)$$

وحيث أن $\operatorname{Res.}(f,i)=\frac{-1}{2}+i$ (سبق حسـابه) إذاً

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{-1}{2}+i\right)$$

(ج) المسار $|z+i|=\frac{1}{2}$ يحتوي القطب البسيط $z=-i$ داخله

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res.}(f,-i)$$

$$=2\pi i\left(-\frac{1}{2}-i\right)$$

(د)المسار $|z|=2$ يحتوي الأقطاب الثلاثة وبالتـالي فمن نظريـة كوشي للباقي

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res.}(f,0)+\operatorname{Res.}(f,i)+\operatorname{Res.}(f,-i)\right]$$

$$=2\pi i\left(1-\frac{1}{2}+i-\frac{1}{2}-i\right)=0$$

لاحظ ان قيمة التكامل = صفر بينما الدالة ليست تحليليـة عند ثلاث نقط تقع في المنطقة الداخليـة للمسـار

حساب التكاملات المحدودة الحقيقة :

Evaluation of Definite real integrals

النوع الاول:

إذا كان التكامل في الصورة : $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

حيث $f(\cos\theta, \sin\theta)$ دالة كسرية في $\cos\theta, \sin\theta$.

لحساب هذا النوع من التكامل نستخدم التعويض عن $z = e^{i\theta}$

بالتالي $dz = iz\,d\theta$

وحيث θ تتغير من $0 \leftarrow 2\pi$ فإن z توصف دائرة الوحدة $|z| = 1$

كذلك نعوض عن $\cos\theta, \sin\theta$ بالعلاقات التالية :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

إذا باستخدام هذه التعويضات يتحول التكامل إلى الصورة :

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

حيث C هي دائرة الوحدة في الاتجاه الموجب وهذا التكامل الاخير يمكن حسابه باستخدام نظرية الباقي .

مثال :

احسب التكامل الأتي باستخدام نظرية الباقي :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$$

الحل:

ليكن $I=\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$ وبوضع $z=e^{i\theta}$, إذا $\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}$

$dz=izd\theta$ وباستخدام هذه التعويضات يتحول التكامل I الى الصورة :-

$$I=\int_C \frac{dz}{iz\left[5+4\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\right]}=\int_C \frac{dz}{2z^2+5iz-2}, \qquad C:\ |z|=1$$

وبوضع

$$f(z)=\frac{1}{2z^2+5iz-2}=\frac{1}{(2z+i)(z+2i)}=\frac{1}{2(z+2i)\left(z+\frac{i}{2}\right)}$$

إذا $-2i, \frac{-i}{2}$ هي اقطاب بسيطه للدالة $f(z)$ وفقط القطب $\frac{-i}{2}$ يقع داخل C أيضا

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{-i}{2}\right]=\lim_{z\to\frac{-i}{2}}\frac{1}{2(z+2i)}=\frac{1}{3i}$$

باستخدام نظرية الباقي فإن

$$I=\int_C f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{3I}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

النوع الثاني : تكامل معتل

مثل هذه التكاملات تكون في الصورة $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

حيث $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ دالة كسرية فيها كل من $g(x),h(x)$ كثيرة حدود حقيقية في x ودرجة $h(x) \leq$ (درجة $2+g(x)$)

لحساب هذا التكامل I نضع $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ نعين اقطاب f(z) والتي تكون اصفار المعادلة $h(z)=0$.

إذا كانت f(x) دالة متصلة على الفترة $0 \leq x \leq \infty$ فإنه يعرف

$$\int_0^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx$$

إذاكانت f(x) دالة متصلة على الفترة $-\infty \leq x \leq 0$ فإنه يعرف

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{0} f(x)dx$$

أي أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx + \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{0} f(x)dx$$

$$= \lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

تعريف:

لاي دالة f متصلة على الفترة $(-\infty,\infty)$ فإن النهايه

$\lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{p} f(x)dx$ (إذا وجدت)

تسمى قيمة كوشي الأساسية لتكامل f على الفترة $(-\infty,\infty)$ وتكتب

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx$$