

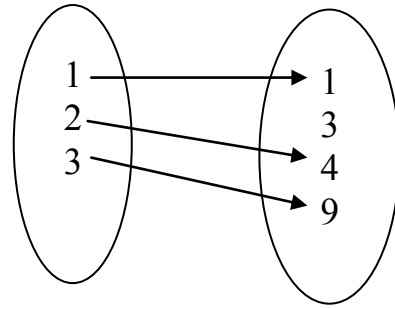
الدوال

تعريف الدالة: function

الدالة هي علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B يقترن فيها كل عنصر في A بعنصر واحد فقط في B وتكتب على الصورة: $f: A \rightarrow B$ أو $A \xrightarrow{f} B$ وتسمى المجموعة A نطاق الدالة والمجموعة B النطاق المصاحب . والمجموعة الجزئية من B التي تتألف من جميع صور عناصر A بالدالة f تسمى مدى الدالة ويرمز لها بالرمز $f(A)$ حيث: $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

مثال:

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 3, 4, 9\}$ فإن العلاقة: $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ المتمثلة بالمخطط السهمي التالي تمثل الدالة $f: A \rightarrow B$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2 \quad \forall x \in A$



واضح أن نطاق الدالة هو المجموعة $\{1, 2, 3\}$ ومدى هذه الدالة هو $\{1, 4, 9\}$

مثال:

الدالة $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $g(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ هي دالة نطاقها $\mathbb{R}$ ونطاقها المصاحب $\mathbb{R}$ ومداهما الفترة $[-1, 1]$

تعريف: الدالة الأحادية (one to one function (injective function)

الدالة $f: A \rightarrow B$ تسمى دالة أحادية (متباينة) إذا كان للعناصر المختلفة في A صوراً مختلفة في B أي أن لكل $x_1, x_2 \in A$ فإن $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ أو $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

تعريف: الدالة الفوقية (onto function (surjective function

الدالة $f: A \rightarrow B$ تسمى دالة فوقية (شاملة) إذا كان كل عنصر في B هو صورة لأحد عناصر A أي أن النطاق المصاحب يساوي المدى.

تعريف: دالة التناظر الأحادي bijective function

الدالة $f: A \rightarrow B$ تسمى دالة تناظر أحادي إذا كانت دالة أحادية وفوقية .

مثال:

إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ فإننا نلاحظ أن:

الدالة f دالة أحادية لأن $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

الدالة f فوقية لأنه بفرض أن $y \in \mathbb{R}$ وبوضع $x = \frac{y-1}{2}$ فإن $f(x) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y$

$\therefore$ كل عنصر $y \in \mathbb{R}$ هو صورة للعنصر $x \in \mathbb{R}$

ملاحظة:

لتكن كل من A, B مجموعة. يرمز للمجموعة التي عناصرها جميع الدوال من A إلى B بالرمز B^A

مبرهنة:

إذا كانت المجموعة A تحتوي على m من العناصر والمجموعة B تحتوي على n من العناصر فإن المجموعة B^A تحتوي على n^m من العناصر.

البرهان:

نفرض أن $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ، $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

لاحظ أن العنصر x_1 يمكن أن يرتبط بأي عنصر من عناصر B وبما أن عدد عناصر B يساوي n فإن

العنصر x_1 يمكن أن يرتبط بأي عنصر من عناصر B بطرق عددها n وكذلك العنصر x_2 يمكن أن

يرتبط بأي عنصر من عناصر B بطرق عددها n أيضاً.

إذاً عدد الطرق التي يمكن بواسطتها ارتباط عناصر المجموعة A مع عناصر المجموعة B هي:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \dots n}_{\text{من } m \text{ المرات}} = n^m$$

تساوي الدوال Equality of functions

ليكن كل من $f: A \rightarrow B$ ، $g: C \rightarrow D$ دالة.

الدالتين تكونان متساويتين إذا وإذا كان فقط $f = g$ ، $A = C$ ، $B = D$

مثال:

إذا كان كل من f, g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = |x|\} \quad , \quad g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{x^2}\}$$

فإن الدالتين f, g متساويتين.

وإذا كانت $h: Z \rightarrow \mathbb{N}$ دالة معرفة كالتالي $h(x) = \sqrt{x^2}$ فإن $h \neq f$ وكذلك $h \neq g$ لأن $Z \neq \mathbb{R}$ ، $\mathbb{N} \neq \mathbb{R}$ ،

مبرهنة:

إذا كان كل من $f: A \rightarrow B$ ، $g: A \rightarrow B$ دالة فإن $f = g$ إذا وإذا كان فقط

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $f = g$ ونبرهن أن $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$

$$x \in A \Rightarrow \exists y \in B : (x, y) \in f \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$\Rightarrow (x, y) \in g \Leftrightarrow g(x) = y \Rightarrow f(x) = g(x)$$

ثانياً: نفرض أن $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$ ونبرهن أن $f = g$

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow f(x) = y \Rightarrow g(x) = y \Rightarrow (x, y) \in g$$

$$\Rightarrow f \subseteq g \dots\dots\dots(1)$$

$$(x, y) \in g \Leftrightarrow g(x) = y \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow (x, y) \in f$$

$$\Rightarrow g \subseteq f \dots\dots\dots(2)$$

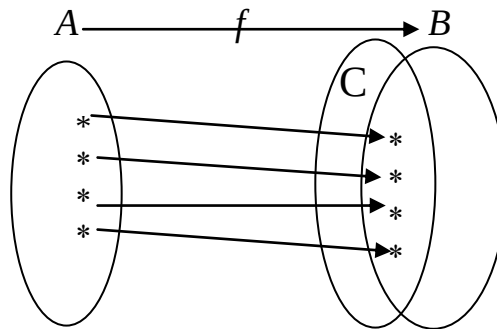
من (1) و (2) نستنتج أن $f = g$

من أولاً وثانياً نستنتج أن $f = g$ إذا وفقط إذا كان $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$

مبرهنة:

إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة و $\text{ran } f \subseteq C$ فإن $f: A \rightarrow C$ دالة أيضاً

البرهان:



نفرض أن $x \in A$

∴ يوجد $y \in \text{ran } f$ بحيث $(x, y) \in f$

بما أن $ran f \subseteq C$ فإن $y \in C$
إذا $f: A \rightarrow C$ دالة

تعريف:

لتكن $f: A \rightarrow B$ دالة ، $b \in B$.

تسمى f بالدالة الثابتة constant function إذا وإذا كان فقط لكل عنصر $a \in A$ فإن $f(a) = b$

مثال:

ليكن $A = B = \mathbb{R}$ وأن f علاقة على $\mathbb{R}$ معرفة كالتالي:

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 5\}$ أي أن $f(x) = 5 \forall x \in \mathbb{R}$ فإن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تسمى دالة ثابتة

ملاحظة:

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة ثابتة

(1) إذا كانت المجموعة A تحتوي على أكثر من عنصر فتكون الدالة ليست أحادية.

(2) إذا كانت المجموعة B تحتوي على أكثر من عنصر فتكون الدالة غير فوقية.

تعريف:

لتكن $f: X \rightarrow Y$ دالة تسمى f بالدالة المحايدة (الذاتية) identity function إذا وإذا كان فقط لكل

$x \in X$ فإن $f(x) = x$ ويرمز لها بالرمز I_X

لاحظ أن I_X دالة تقابلية "تناظر أحادي" (أحادية وفوقية) **Bijection function**

دالة الاحتواء: inclusion function

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة B فتسمى الدالة $f: A \rightarrow B$ بدالة الاحتواء إذا فقط وإذا

كان $f(x) = x \forall x \in A$

مثال

إذا كانت f دالة من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{Z}$ معرفة كالتالي:

$f(x) = x \forall x \in \mathbb{N}$ فإن f تكون دالة الاحتواء لأن $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

ملاحظة:

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة الاحتواء.

(1) إذا كان $A = B$ فإن $I_X = f$

(2) دالة الاحتواء أحادية

3) إذا كان $A \subset B$ فإن دالة الاحتواء ليست فوقية

الدالة المقيدة Restriction function:

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة ولتكن C مجموعة جزئية من A .

الدالة $g: C \rightarrow B$ المعرفة بحيث $g(x) = f(x), \forall x \in C$ تسمى بـ f على C ونرمز لها بالرمز

$$g = f / C \text{ أي أن: } f / C: C \rightarrow B$$

مثال:

لتكن f دالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كالآتي: $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: f(x) = x + 1\}$

ولتكن g دالة من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{R}$ معرفة كالتالي: $g = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}: g(x) = x + 1\}$

بما أن $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $g(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{N}$ فإن الدالة g هي تقييد f على $\mathbb{N}$

مبرهنة:

$$\text{إذا كان } f: B \cup C \rightarrow A \text{ فإن } f = f / B \cup f / C$$

البرهان:

نفرض أن $(x, y) \in f$ أي أن $f(x) = y$ وهذا يعني أن $x \in B \cup C$ وبالتالي $x \in B$ or $x \in C$

فإذا كانت $x \in B$ فإن $(f / B)(x) = f(x) = y$ أي أن $(x, y) \in f / B$

وإذا كانت $x \in C$ فإن $(f / C)(x) = f(x) = y$ أي أن $(x, y) \in f / C$

مما سبق نستنتج أن $(x, y) \in f / B \cup f / C$ أي أن:

$$f \subseteq f / B \cup f / C \quad \dots\dots\dots(1)$$

نفرض أن $(x, y) \in f / B \cup f / C$ وهذا يعني أن $(x, y) \in f / B$ أو $(x, y) \in f / C$

فإذا كانت $(x, y) \in f / B$ فإن $(f / B)(x) = y = f(x)$ أي أن $(x, y) \in f$

وإذا كانت $(x, y) \in f / C$ فإن $(f / C)(x) = y = f(x)$ أي أن $(x, y) \in f$

مما سبق نستنتج أن $(x, y) \in f$ أي أن:

$$f / B \cup f / C \subseteq f \quad \dots\dots\dots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $f = f / B \cup f / C$

توسيع (تمديد) الدالة Extension or function

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة وليكن $A \subseteq D$.

الدالة $g: D \rightarrow B$ تسمى بتوسيع f من A إلى D إذا تحقق الشرط التالي:

$$g(x) = f(x), \forall x \in A \text{ أن } g|_A = f$$

مثال:

الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هي توسيع للدالة $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $g(x) = x^2$ ، $f(x) = x^2$

دالة المسافة Distance function

لنعتبر أن $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ أي أن $\mathbb{R}^*$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة وليكن A مجموعة

فإن الدالة: $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}^*$ تسمى بدالة المسافة إذا تحققت الشروط التالية:

لكل $a, b, c \in A$

$$d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b \quad (1)$$

$$d(a, b) = d(b, a) \quad (2)$$

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \quad (3)$$

d يسمى قياس على A (Metric on A).

مثال:

إذا كانت d دالة من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}^*$ معرفة بحيث: $d(x, y) = |x - y|$ فإن: d هي دالة مسافة

البرهان:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (1)$$

$$d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x) \quad (2)$$

$$d(x, z) = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z) \quad (3)$$

أي أن $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

∴ d دالة مسافة

تمرين:

لتكن A مجموعة ولتكن d دالة من $A \times A$ إلى $\mathbb{R}^*$ معرفة بحيث:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

برهن أن d دالة مسافة

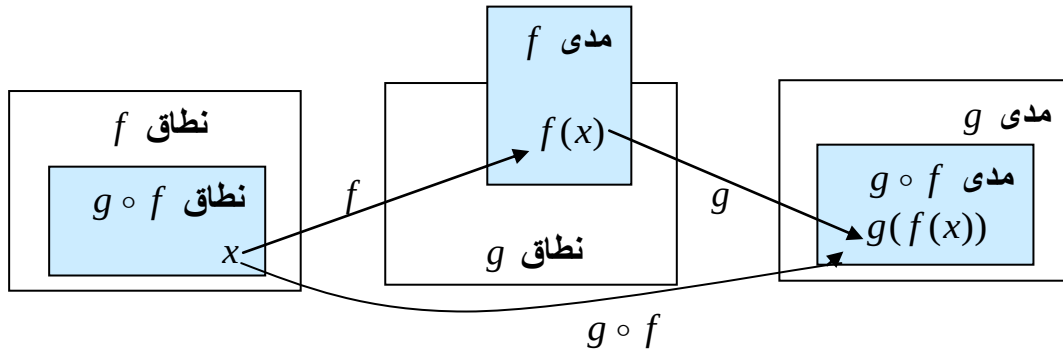
ملاحظة:

إذا كانت $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}^*$ دالة مسافة فإن (A, d) يسمى فضاء مترى. أي أن في المثال السابق $(\mathbb{R}, d)$ تمثل فضاءً مترياً، وسيتم دراسة الفضاءات المترية بتفصيل أكثر في مقرر التحليل الحقيقي.

الدالة التركيبية Composite function

تعريف:

لتكن f دالة نطاقها $dom f$ ، ومدنها $ran f$ ، ولتكن g دالة نطاقها $dom g$ ، ومدنها $ran g$. نعرف تركيب f مع g بأنه الدالة $g \circ f$ التي نطاقها هو المجموعة $\{x: x \in dom f, f(x) \in dom g\}$



ملاحظة:

لاحظ أنه إذا كان كل من $f: A \rightarrow B$ ، $g: C \rightarrow D$ دالة فإنه يمكن إيجاد $g \circ f: A \rightarrow D$ عندما يكون $ran f \cap dom g \neq \emptyset$ وكذلك يمكن إيجاد $f \circ g: C \rightarrow B$ بشرط أن $ran g \cap dom f \neq \emptyset$ وفي هذه الحالة يكون $dom(f \circ g) = \{x: x \in dom g, g(x) \in dom f\}$

مثال:

إذا كان $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ ، $g(x) = 2x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ فإن:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 3$$

مثال:

لا يمكن إيجاد $(g \circ f)(x)$ من الدالتين $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{1}{\sqrt{-1-x}}$ لأن $ran f \cap dom g = \emptyset$

حيث $dom g = (-\infty, -1)$ ، $ran f = [0, \infty)$

مبرهنة:

إذا كان كل من $f: A \rightarrow B$ ، $g: B \rightarrow C$ دالة ، فإن $g \circ f: A \rightarrow C$ دالة أيضاً

البرهان

أولاً سنبرهن أنه لكل $a \in A$ يوجد $c \in C$ بحيث $(g \circ f)(a) = c$ ثم سنبرهن أن لكل عنصر صورة واحدة فقط.

نفرض أن $a \in A$ وهذا يعني أنه يوجد $b \in B$ حيث $(a, b) \in f$

بما أن $b \in B$ ، و g دالة فإنه يوجد $c \in C$ حيث $(b, c) \in g$

بما أن $(a, b) \in f$ ، $(b, c) \in g$ فإن $(a, c) \in g \circ f$ أي أن $(g \circ f)(a) = c$

الآن نفرض أن $(a, c_1) \in g \circ f$ ، $(a, c_2) \in g \circ f$ وهذا يعني أنه يوجد $b_1, b_2 \in B$ حيث

$$(a, b_1) \in f, (b_1, c_1) \in g \text{ وكذلك } (a, b_2) \in f, (b_2, c_2) \in g$$

بما أن $f: A \rightarrow B$ دالة ، و $(a, b_1) \in f, (a, b_2) \in f$ فإن $b_1 = b_2$

وبما أن $g: B \rightarrow C$ دالة ، و $(b_1, c_1) \in g, (b_1, c_2) \in g$ فإن $c_1 = c_2$

نتيجة:

إذا كان كل من $f: A \rightarrow B$ ، $g: B \rightarrow C$ دالة فإنه لكل $x \in A$ يكون $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

البرهان:

$$(g \circ f)(x) = z \Rightarrow (x, z) \in g \circ f \Rightarrow \exists y \in B: (x, y) \in f, (y, z) \in g$$

ولكن $z = g(y) = g(f(x))$ وبالتالي $(x, y) \in f \Leftrightarrow f(x) = y$ ، $(y, z) \in g \Leftrightarrow g(y) = z$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ أي أن}$$

مبرهنة:

ليكن كل من $f: A \rightarrow B$ ، $g: B \rightarrow C$ دالة:

(1) إذا كان كل من f, g دالة أحادية فإن $g \circ f$ دالة أحادية أيضاً.

(2) إذا كان كل من f, g دالة فوقية فإن $g \circ f$ دالة فوقية أيضاً.

(3) إذا كان كل من f, g دالة تقابلية فإن $g \circ f$ دالة تقابلية أيضاً.

البرهان:

(1) نفرض أن $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ حيث $x_1, x_2 \in A$

أي أن $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ وبما أن g دالة أحادية فإن $f(x_1) = f(x_2)$

وبما أن f دالة أحادية فإن $x_1 = x_2$ وهذا يبرهن أن $g \circ f$ دالة أحادية أيضاً
 (2) نفرض أن $z \in C$ وبما أن g دالة فوقية فإنه يوجد $y \in B$ بحيث $g(y) = z$
 وبما أن f دالة فوقية فإنه يوجد $x \in A$ بحيث $f(x) = y$
 مما سبق نستنتج أن $g(f(x)) = z$ أي أن لكل $z \in C$ يوجد $x \in A$ بحيث $(g \circ f)(x) = z$
 إذًا $g \circ f$ دالة فوقية

(3) من (1) و(2) نستنتج أنه إذا كان كل من f, g دالة تقابلية فإن $g \circ f$ دالة تقابلية أيضاً

مبرهنة:

ليكن كل من $f: A \rightarrow B$ ، $g: B \rightarrow C$ دالة:

(1) إذا كانت $g \circ f$ دالة أحادية فإن f دالة أحادية أيضاً.

(2) إذا كانت $g \circ f$ دالة فوقية فإن g دالة فوقية أيضاً.

البرهان:

(1) نفرض أن $x_1, x_2 \in A$ حيث $f(x_1) = f(x_2)$

بما أن g دالة فإن $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ أي أن $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

بما أن $g \circ f$ دالة أحادية فإن $x_1 = x_2$ وهذا يثبت أن f دالة أحادية.

(2) نفرض أن $z \in C$

بما أن $g \circ f$ دالة فوقية فإنه يوجد $x \in A$ حيث $(g \circ f)(x) = z$ أي أن $g(f(x)) = z$

وبما أن $f(x) \in B$ فإن g دالة فوقية

تمارين

(1) هل العلاقات التالية تمثل دوال أم لا؟ برهن صحة ما تقول؟

$$(i) f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ حيث } f(x) = x - 7$$

$$(ii) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ حيث } g(x) = \frac{1}{x}$$

$$(iii) h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ حيث } h(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(iv) k: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ حيث } k\left(\frac{m}{n}\right) = m + n, 0 \neq n, m \in \mathbb{Z}$$

(2) ليكن $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^*$ دالة مترية "دالة مسافة".

برهن أن $m(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ لكل $x, y \in A$ تمثل دالة مترية "دالة مسافة" حيث

$$m : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^*$$

(3) ليكن $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ دالة مترية. برهن أن $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ دالة مترية حيث

$$m(x, y) = h \cdot d(x, y) \text{ لكل } x, y \in \mathbb{R} \text{ و } h \text{ عدد حقيقي موجب.}$$

الدالة العكسية inverse function

إذا كان $f : A \rightarrow B$ دالة فإن العلاقة العكسية f^{-1} من B إلى A قد تحقق شروط الدالة أو لا تحققها كما أنه إذا كان $f^{-1} : C \rightarrow D$ دالة فليس من الضروري أن تكون $f : D \rightarrow C$ دالة والأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال:

إذا كانت $f = \{(1,4), (2,4), (3,5)\}$ علاقة من $A = \{1,2,3\}$ إلى $B = \{4,5\}$ فإن:

$$f^{-1} = \{(4,1), (4,2), (5,3)\}$$

واضح أن $f : A \rightarrow B$ دالة ولكن $f^{-1} : B \rightarrow A$ ليست دالة.

مثال:

إذا كانت $f = \{(1,2), (1,3)\}$ علاقة من $A = \{1\}$ إلى $B = \{2,3\}$ فإن: $f^{-1} = \{(2,1), (3,1)\}$

واضح أن $f : A \rightarrow B$ ليست دالة بينما $f^{-1} : B \rightarrow A$ دالة.

تعريف:

يقال أن الدالة $f : A \rightarrow B$ لها معكوس إذا كانت العلاقة $f^{-1} : B \rightarrow A$ دالة، وتسمى العلاقة f^{-1}

بالدالة العكسية للدالة f

مبرهنة:

يكون للدالة $f : A \rightarrow B$ دالة عكسية إذا وإذا كان فقط $f : A \rightarrow B$ دالة تقابلية

البرهان:

أولاً: نفرض أن الدالة $f : A \rightarrow B$ لها معكوس وليكن $f^{-1} : B \rightarrow A$ ونبرهن أن $f : A \rightarrow B$ دالة تقابلية

ولإثبات أن f دالة أحادية نفرض أن: $f(x_1) = f(x_2) = y : x_1, x_2 \in A$ وهذا يعني أن

$(y, x_1) \in f^{-1}, (y, x_2) \in f^{-1}$ وبالتالي $(x_1, y) \in f, (x_2, y) \in f$

وبما أن f^{-1} دالة فإن $x_1 = x_2$ وهذا يثبت أن f دالة أحادية

ولإثبات أن f دالة فوقية نفرض أن $y \in B$ وبما أن f^{-1} دالة فإنه يوجد $x \in A$ بحيث $f^{-1}(y) = x$

أي أن $(y, x) \in f^{-1}$ وهذا يعني أن $(x, y) \in f$ أي أن $f(x) = y$

إذاً f دالة فوقية

ثانياً: نفرض أن $f: A \rightarrow B$ دالة تقابلية ونبرهن أن لها معكوس وليكن $f^{-1}: B \rightarrow A$

أي أننا سنبرهن أن $f^{-1}: B \rightarrow A$ تحقق شروط الدالة، لذلك نفرض أن $y \in B$ وبما أن f دالة فوقية

فإنه يوجد $x \in A$ بحيث $f(x) = y$ وهذا يعني أن $(x, y) \in f$

إذاً $(y, x) \in f^{-1}$ أي أن $f^{-1}(y) = x$ أي كل عنصر في B له صورة في A وسنبرهن الآن أن صورة كل

عنصر تكون وحيدة تحت تأثير العلاقة f^{-1}

نفرض أن $(y, x_1) \in f^{-1}, (y, x_2) \in f^{-1}$ وهذا يعني أن $(x_1, y) \in f, (x_2, y) \in f$

وبما أن f دالة أحادية فإن $x_1 = x_2$

إذاً $f^{-1}: B \rightarrow A$ دالة

تمرين:

برهن أنه إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة تقابلية فإن $f^{-1}: B \rightarrow A$ دالة تقابلية

مبرهنة:

إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة لها معكوس فإن:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad (2) \quad f \circ f^{-1} = I_B \quad (1)$$

البرهان:

(1) نفرض أن $(x, z) \in f \circ f^{-1}$ ، هذا يعني أنه يوجد $y \in A$ بحيث $(x, y) \in f^{-1}$ و $(y, z) \in f$

أي أن $(y, x) \in f$ و $(y, z) \in f$ وبما أن f دالة فإن $x = z$

إذاً $(x, z) = (x, x) = (z, z) \in I_B$ ولذلك فإن: (1) $f \circ f^{-1} \subseteq I_B$

نفرض أن $(b, b) \in I_B$ أي أن $b \in B$ وبما أن f دالة فإنه يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = b$ أي أن

$(a, b) \in f$ ، ولكن f^{-1} دالة وبالتالي فإنه يوجد $x \in A$ بحيث $f^{-1}(b) = x$ أي أن $(b, x) \in f^{-1}$

أي أن $(x, b) \in f$ وبما أن f دالة أحادية، و $(a, b) \in f$ ، فإن $x = a$

الآن لدينا $(b,a) \in f^{-1}$ ، $(a,b) \in f$ ، ومن ذلك نستنتج أن $(b,b) \in f \circ f^{-1}$ أي أن:

$$I_B \subseteq f \circ f^{-1} \dots\dots\dots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $I_B = f \circ f^{-1}$

(2) نفرض أن $(x,z) \in f^{-1} \circ f$ ، هذا يعني أنه يوجد $y \in B$ بحيث $(x,y) \in f$ و $(y,z) \in f^{-1}$

أي أن $(x,y) \in f$ و $(z,y) \in f$ وبما أن f دالة أحادية فإن $x=z$

إذاً $(x,z) = (x,x) = (z,z) \in I_A$ ولذلك فإن: (1) $f^{-1} \circ f \subseteq I_A$

نفرض أن $(a,a) \in I_A$ أي أن $a \in A$ وبما أن f دالة فإنه يوجد $b \in B$ بحيث $f(a)=b$ أي أن

$(a,b) \in f$ ، ولكن f^{-1} دالة وبالتالي فإنه يوجد $x \in A$ بحيث $f^{-1}(b)=x$ أي أن $(b,x) \in f^{-1}$

أي أن $(x,b) \in f$ وبما أن f دالة أحادية ، و $(a,b) \in f$ ، $(x,b) \in f$ فإن $x=a$

الآن لدينا $(b,a) \in f^{-1}$ ، $(a,b) \in f$ ، ومن ذلك نستنتج أن $(a,a) \in f^{-1} \circ f$ ولذلك فإن:

$$I_A \subseteq f^{-1} \circ f \dots\dots\dots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $I_A = f^{-1} \circ f$

مبرهنة:

إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة لها معكوس فإن $f^{-1}: B \rightarrow A$ تكون دالة أحادية فوقية

البرهان: يترك تمرين للطالب

مبرهنة:

ليكن $f: A \rightarrow B$ ، $g: B \rightarrow A$ دالتين.

إذا كان $g \circ f = I_A$ ، $f \circ g = I_B$ فإن f دالة أحادية فوقية و $g = f^{-1}$

البرهان: يترك تمرين للطالب

الصورة المباشرة والصورة العكسية بفعل الدوال

تعريف:

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة وليكن C مجموعة جزئية من A .
المجموعة المتكونة من عناصر المجموعة B التي كل عنصر فيها هو صورة على الأقل لأحد عناصر المجموعة C تسمى صورة مباشرة للمجموعة C بفعل الدالة $f: A \rightarrow B$ ويرمز لها بالرمز $f(C)$.
أي أن $f(C) = \{y \in B : \exists x \in C, f(x) = y\}$

مثال:

إذا كانت $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ دالة بحيث $f(x) = x^2$ ، و $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ فإن $f(C) = \{0, 1, 4\}$

مثال:

إذا كانت $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة بحيث $f(x) = \frac{1}{x}$ ، و $C = (0, 1]$ فإن:

$$f(C) = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y < \infty\}$$

مبرهنة:

ليكن $f: X \rightarrow Y$ دالة وليكن كل من A, B مجموعة جزئية من المجموعة X .
إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $f(A) \subseteq f(B)$

البرهان:

نفرض أن $y \in f(A)$

من تعريف الصورة المباشرة نستنتج أنه يوجد $x \in A$ بحيث $y = f(x)$

وبما أن $A \subseteq B$ فإن $x \in B$ ولذلك فإن $f(x) \in f(B)$ أي أن $y \in f(B)$

وهذا يؤدي إلى أن $f(A) \subseteq f(B)$

مبرهنة:

ليكن $f: X \rightarrow Y$ دالة وليكن كل من A, B مجموعة جزئية من المجموعة X .
إذا كانت $A = B$ فإن $f(A) = f(B)$

البرهان:

يترك تمرين للطالب.

ملاحظة:

إذا كان $f(A) = f(B)$ فليس من الضروري أن يكون $A = B$ كما هو موضح بالمثال التالي:

مثال:

إذا كانت $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ دالة حيث $f(x) = x^2 + 1$ ، $A = \{-3, 0, 2\}$ ، $B = \{-2, 0, 3\}$ فإن:

$$f(A) = \{10, 1, 5\} , f(B) = \{5, 1, 10\}$$

لاحظ أن $f(A) = f(B)$ بينما $A \neq B$

مبرهنة:

إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة ، وكل من C, D مجموعة جزئية من A فإن:

$$f(C \cup D) = f(C) \cup f(D) \quad (1)$$

$$f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D) \quad (2)$$

$$f(C) - f(D) \subseteq f(C - D) \quad (3)$$

البرهان:

(1) نفرض أن $y \in f(C \cup D)$ وهذا يعني أنه يوجد $x \in C \cup D$ بحيث $y = f(x)$

$$\Rightarrow \exists x \in C \text{ or } \exists x \in D : y = f(x)$$

فإذا كان $x \in C$ فإن $f(x) \in f(C)$ وبالتالي فإن $y \in f(C)$ وهذا يعني أن $y \in f(C) \cup f(D)$

وإذا كان $x \in D$ فإن $f(x) \in f(D)$ وبالتالي فإن $y \in f(D)$ وهذا يعني أن $y \in f(C) \cup f(D)$

$$f(C \cup D) \subseteq f(C) \cup f(D) \dots\dots\dots(1)$$

الآن نفرض أن $y \in f(C) \cup f(D)$ وهذا يعني أن $y \in f(C)$ أو $y \in f(D)$

فإذا كان $y \in f(C)$ فإنه يوجد $x_1 \in C$ بحيث $f(x_1) = y$

وبما $x_1 \in C \subseteq C \cup D$ فإن $f(x_1) \in f(C \cup D)$ وبالتالي فإن: $y \in f(C \cup D)$

أما إذا كان $y \in f(D)$ فإنه يوجد $x_2 \in D$ بحيث $f(x_2) = y$

وبما $x_2 \in D \subseteq C \cup D$ فإن $f(x_2) \in f(C \cup D)$ وبالتالي فإن: $y \in f(C \cup D)$

$$f(C) \cup f(D) \subseteq f(C \cup D) \dots\dots\dots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$

(2) نفرض أن $y \in f(C \cap D)$ وهذا يعني أنه يوجد $x \in C \cap D$ بحيث $y = f(x)$

$$\Rightarrow x \in C \text{ and } x \in D : y = f(x)$$

أي أن $f(x) \in f(C) \cap f(D)$ وبالتالي فإن $y = f(x) \in f(C) \cap f(D)$ و $f(x) \in f(D)$ و $f(x) \in f(C)$

وهذا يثبت أن $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$

لاحظ أن $f(C) \cap f(D) \not\subseteq f(C \cap D)$ كما هو موضح بالمثال التالي:

مثال

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة معرفة بالقاعدة $f(x) = 5$ حيث $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{5\}$ وبفرض أن

$C = \{1, 2\}$ ، $D = \{3\}$ فإن $f(C \cap D) = f(\emptyset) = \emptyset$ بينما $f(C) = f(D) = \{5\}$

أي أن $f(C) \cap f(D) = \{5\}$

نلاحظ أن $f(C) \cap f(D) \not\subseteq f(C \cap D)$

(3) نفرض أن $y \in f(C) - f(D)$ وهذا يعني أن $y \in f(C)$ و $y \notin f(D)$

وبما أن $y \in f(C)$ فإنه يوجد $x \in C$ بحيث $y = f(x)$

وبما أن $y \notin f(D)$ فإن $f(x) \notin f(D)$ وعليه $x \notin D$

أي أن $\exists x \in C, x \notin D: y = f(x)$ وهذا يبرهن أن: $y \in f(C - D)$

$$f(C) - f(D) \subseteq f(C - D)$$

مبرهنة:

إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة أحادية وكل من C, D مجموعة جزئية من A فإن:

$$f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$$

البرهان:

أولاً: بنفس الطريقة في المبرهنة السابقة يمكن برهنة أن: $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$

ثانياً: لبرهنة أن $f(C) \cap f(D) \subseteq f(C \cap D)$ نفرض أن $y \in f(C) \cap f(D)$ أي أن:

$y \in f(C)$ و $y \in f(D)$ وهذا يعني أنه يوجد $x_1 \in C$ ، $x_2 \in D$ حيث $f(x_1) = y = f(x_2)$

وبما أن f دالة أحادية فإن $x_1 = x_2$

إذاً $x_1 \in C \cap D$ وبالتالي فإن $f(x_1) \in f(C \cap D)$ أي أن $y \in f(C \cap D)$

وهذا يبرهن أن $f(C) \cap f(D) \subseteq f(C \cap D)$

من أولاً وثانياً نستنتج أن: $f(C) \cap f(D) = f(C \cap D)$

مبرهنة:

ليكن كل من X, Y مجموعة وليكن $f: X \rightarrow Y$ دالة وليكن f^* علاقة من $P(X)$ إلى $P(Y)$ معرفة كالتالي: $f^* = \{(A, B) \in P(X) \times P(Y) : f(A) = B\}$ فإن $f^*: P(X) \rightarrow P(Y)$ تكون دالة.

البرهان:

أولاً سنبرهن أن لكل عنصر A في $P(X)$ توجد صورة في $P(Y)$

من تعريف الصورة المباشرة نستنتج أنه إذا كان $A \subseteq X$ فإن $f(A) \subseteq Y$ وهذا يعني أن $f(A) \in P(Y)$ وبفرض أن $f(A) = B$ فإنه لكل $A \in P(X)$ يوجد $B \in P(Y)$ بحيث $(A, B) \in f^*$

ثانياً سنبرهن أن صورة العنصر A تكون وحيدة

نفرض أن $(A, B_1) \in f^*$ ، و $(A, B_2) \in f^*$ أي أن $f(A) = B_1$ ، $f(A) = B_2$

ولكن المجموعة $f(A)$ تتعين بصورة وحيدة لأن f دالة ولذلك فإن $B_1 = B_2$

من أولاً وثانياً نستنتج أن $f^*: P(X) \rightarrow P(Y)$ تكون دالة

تمرين:

ليكن $f: X \rightarrow Y$ دالة، وليكن $\{A_i\}_{i \in I}$ عائلة مجموعات مفهرسة جزئية من X برهن أن:

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i) \quad (2) \quad f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad (1)$$

تعريف:

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة ولتكن D مجموعة جزئية من B فإن مجموعة جميع العناصر في A التي تنتمي صورة كل عنصر منها إلى D تسمى المجموعة العكسية لـ D بفعل الدالة $f: A \rightarrow B$ ويرمز لها بالرمز

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \ni f(x) \in D\}$$

مثال:

إذا كانت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة بحيث $f(x) = x^2 + 2$ فإن $f^{-1}(11) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 11\} = \{-3, 3\}$

وكذلك $f^{-1}(\{17, 38\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \{17, 38\}\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 18 \text{ or } x^2 + 2 = 38\}$

أي أن $f^{-1}(\{17, 38\}) = \{-4, 4, -6, 6\}$

مبرهنة:

ليكن $f: X \rightarrow Y$ دالة وليكن كل من C, D مجموعة جزئية من Y .

إذا كان $C = D$ فإن $f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$

البرهان:

نفرض أن $C = D$ ونفرض أن $x \in f^{-1}(C)$

من تعريف الصورة العكسية نستنتج أن $f(x) \in C$

وبما أن $C = D$ فإن $f(x) \in D$ أي أن: $x \in f^{-1}(D)$

وبالتالي فإن $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$ (1)

وبالعكس نفرض أن $C = D$ ونفرض أن $x \in f^{-1}(D)$

من تعريف الصورة العكسية نستنتج أن $f(x) \in D$ وبما أن $C = D$ فإن $f(x) \in C$ أي أن: $x \in f^{-1}(C)$

وبالتالي فإن $f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C)$ (2)

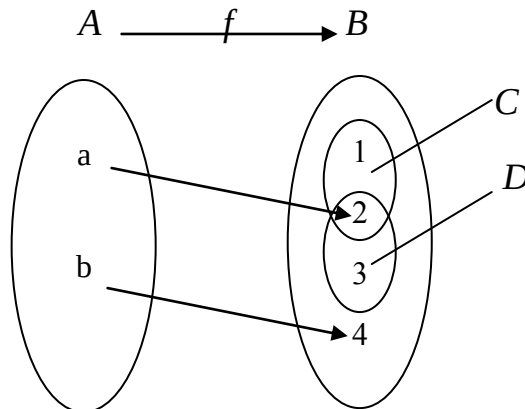
من (1) و (2) نستنتج أنه إذا كان $C = D$ فإن $f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$

ملاحظة:

إذا كان $f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$ فليس من الضروري أن يكون $C = D$ كما في المثال التالي:

مثال:

الشكل التالي يوضح الدالة $f: A \rightarrow B$ حيث $f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$ ولكن $C \neq D$



مبرهنة:

إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة وكلا من C, D مجموعة جزئية من B فإن:

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad (1)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \quad (2)$$

$$f^{-1}(C) - f^{-1}(D) = f^{-1}(C - D) \quad (3)$$

البرهان:

1) نفرض أن $x \in f^{-1}(C \cup D)$ وهذا يعني أن $f(x) \in C \cup D$ أي أن $f(x) \in C$ أو $f(x) \in D$

وهذا يؤدي إلى أن $x \in f^{-1}(C)$ أو $x \in f^{-1}(D)$ أي أن $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

وبالتالي نستنتج أن $f^{-1}(C \cup D) \subseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ (1)

وبالعكس نفرض أن $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ أي أن $x \in f^{-1}(C)$ أو $x \in f^{-1}(D)$

وهذا يؤدي إلى أن $f(x) \in C$ أو $f(x) \in D$ أي أن $f(x) \in C \cup D$ وبالتالي فإن $x \in f^{-1}(C \cup D)$

وبالتالي نستنتج أن $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \cup D)$ (2)

من (1) و (2) نجد أن: $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

برهان الفقرتين (2) ، (3) يترك تمرين للطالب.