البرهان الرياضي

ليكن $s_1, s_2, ..., s_n$ مجموعة من القضايا وأن s قضية استنتجت من $s_1, s_2, ..., s_n$ فإذا كانت الحجة $(s_1 \wedge s_2 \wedge .... \wedge s_n) \rightarrow s$ صائبة فإنها تسمى بالبرهان.

وسوف نشرح بالتفصيل لاحقاً كيفية برهان جمل من نوع $p \rightarrow q$

ملاحظة:

التعاريف والبديهيات والمسلمات لا يمكن برهنتها ولا تطلب برهنتها ولكن الواجب في البديهيات أن لا تكون متناقضة في البناء الرياضي الواحد ولا مانع من تناقض بعض البديهيات في بني رياضية مختلفة.

لهذا عند دراسة موضوع محدد في الرياضيات يجب أولاً تحديد بديهيات ذلك البناء الرياضي.

ويتطلب حل أي سؤال في الرياضيات إلى:

1- معرفة معنى كل مفردة من مفردات ذلك السؤال وإذا كانت تلك المفردة من المفردات المعرفة فيجب كتابة التعريف وملاحظة الترابط بينها وبين التعريف.

2- وضع الرموز المناسبة حيث يلزم ذلك بحيث تكون تلك الرموز واضحة ولا يستعمل نفس الرمز لأكثر من معنى في السؤال الواحد ويفضل استعمال الرموز المعروفة.

3- معرفة المفروض بكل عناصره.

4- معرفة المطلوب بكل عناصره.

5- تذكر كافة البديهيات والنظريات التي عناصر فروضها ترتبط بعناصر المفروض وترتبط عناصر نتائجها بعناصر المطلوب.

6- وضع خطة لربط جميع هذه العناصر السابقة معاً من أجل الوصول إلى الحل المطلوب.

هذا ويجب ملاحظة ما يلي:

أ- أن بعض الطرق قد لا تؤدى للوصول إلى النتيجة لهذا يجب المحاولة بطرق أخرى وذلك عن طريق تحوير المسألة لتصبح وفق طرق البرهان التي سنذكرها لاحقاً.

ب. البرهان الرياضي كل لا يتجزأ فهو إما برهان صحيح أو برهان خطأ وليس هناك نصف أو ثلث برهان صحيح.

ج- كل خطوة في البرهان يجب أن تكون خطوة مبررة.

ويمكن أن يحتوي البرهان على عبارات وفق القواعد التالية:

1- تعاريف أو بديهيات وهذه مقبولة ولا تحتاج إلى البرهان.

2- نظريات مبرهنة سابقاً.

3- عبارات مكافئة لعبارات مفروضة أو بديهية أو مبرهنة.

4- استبدال أشياء متساوية بأشياء متساوية.

5- إضافة عبارات صحيحة دائماً.

6- استعمال العبارات المفروضة.

7- إمكانية فرض عكس المطلوب بهدف الحصول على تناقض.

هذا ولا يمكن أن نفرض المطلوب كما لا يجوز أن نفرض عكس المفروض.

8- سلسلة الاستنتاجات في البرهان يجب أن تعتمد على إحدى طرق البرهان الرياضي المنطقي التي سنذكرها لاحقاً وأن تكون كل خطوة مبررة تبريراً صحيحاً مع ملاحظة أن البرهان يقوم على عبارات صحيحة دائماً.

طرق البرهان:

توجد عدة طرق للبرهان سندرسها بالتفصيل في هذا الباب ومن أهم هذه الطرق ما يلي:

1.برهان أن عبارة غير صحيحة 2.برهان الحالات الخاصة 3.برهان الحالات المنتهية

4.برهان حالات الوجود 5.برهان حالات الوجود الوحيد 6.برهان حالات الإنشاء

7.البرهان بالاستبعاد 8. برهان خطأ المفروض 9. البرهان بالتناقض

10.البرهان بالمعاكس الايجابي 11.البرهان بالاستقراء الرياضي

وهناك أساليب أخرى للحصول على بعض النتائج ولكنها لا ترقى إلى مرتبة البرهان الرياضي مثل: التخمين والاستدلال والمحاكاة.

أ) برهان أن عبارة غير صحيحة:

يتم هذا البرهان بإعطاء مثال مضاد واحد ولكن برهان أن عبارة صحيحة لا يتم بإعطاء ملايين من الأمثلة.

مثال

ناقش صحة العبارة الآتية:

لكل عدد طبيعي n يكون $\frac{1}{n} < 0.1$

الحل

لنأخذ مثلاً $n = 2$ نجد أن $\frac{1}{2} > 0.1$ لذلك العبارة خاطئة.

ب. **البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي:**

نستخدم طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي عند وجود قانون ما ويراد معرفة هل هذا القانون صحيح دائماً أو لا.

فمثلاً: المقدار n^2+n+11 يعطي عدداً أولياً في حالة $n=\{1,2,3,......,9\}$ ولكن عندما $n=10$ الناتج يكون عدد غير أولي ولهذا فإن طريقة التجريب وحدها لا تكفي لإثبات صحة قانون ما ولإثبات صحة هذا القانون يلزم إضافة خطوات أخرى لقاعدة التجريب.

لهذا وضع الرياضيون عدة قواعد للبرهان بطريقة الاستقراء الرياضي وهذا القواعد هي:

1- إثبات صحة القانون في الحالات البسيطة أي عندما $n=1,2$

2- فرض أن القانون صحيح في حالة عدد معين من الحدود وليكن مثلا k ثم إثبات صحته في حالة $k+1$ من الحدود.

3- الجملة الرياضية (القانون أو النظرية أو....) صحيحة على الإطلاق

والأمثلة التالية توضح كيفية استخدام طريقة الاستقراء الرياضي في برهنة صحة الجمل الرياضية المعطاة.

مثال

برهن أن: $1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

البرهان

أولا بالتجريب

n	الطرف الأيسر	الطرف الأيمن
1	1	$\dfrac{1(1+1)}{2}=1$
2	$1+2=3$	$\dfrac{2(2+1)}{2}=3$
3	$1+2+3=6$	$\dfrac{3(3+1)}{2}=6$

∴القانون صحيح في الحالات البسيطة

ثانيا: نفرض صحة القانون في حالة k من الحدود أي أن:

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad ....(1)$$

بإضافة الحد الذي ترتيبه $k+1$ إلى طرفي المعالة (1) وهو المقدار $k+1$

$$1+2+3+.....+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} \quad ....(2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد أنهما نفس الشيء باستبدال k بـــــ $k+1$

∴ القانون صحيح في حالة $k+1$ من الحدود

ثالثاً: ∵ القانون صحيح في حالة k من الحدود وصحيح أيضاً في حالة $k+1$ من الحدود فهو صـــحيح على الإطلاق.

مثال:

برهن أن $2+4+6+......2n = n(n+1)$

البرهان

أولا: بالتجريب

n	الطرف الأيسر	الطرف الأيمن
1	2	$1(1+1)=2$
2	$2+4=6$	$2(2+1)=6$
3	$2+4+6=12$	$3(3+1)=12$

∴ القانون صحيح في الحالات البسيطة.

ثانياً: نفرض صحة القانون في حالة k من الحدود أي أن:

$$2+4+6+.......+2k = k(k+1) \quad ....(1)$$

بإضافة الحد الذي ترتيبه $k+1$ إلى طرفي المعادلة (1) وهو المقدار $2k+2$

$$2+4+6+....+2k+2k+2 = k(k+1)+2k+2$$
$$= k(k+1)+2(k+1)$$
$$= (k+1)(k+2)$$
$$= (k+1)(k+1+1) \quad ....(2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد أنهما نفس الشيء مع استبدال k بـــ $k+1$

∴ القانون صحيح في حالة $k+1$ من الحدود

∴ القانون صحيح على الإطلاق.

مثال:

برهن أن $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)n+2)}$

البرهان

أولاً: بالتجريب

n	الأيسر	الأيمن
1	$\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}-\frac{2+3}{2(2+1)(1+2)}=\frac{3}{4}-\frac{15}{12}=\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}=\frac{11}{24}$	$\frac{3}{4}-\frac{4+3}{2(3)(4)}=\frac{3}{4}-\frac{7}{24}=\frac{11}{24}$

$\therefore$ القانون صحيح في الحالات البسيطة

ثانياً: نفرض أن القانون صحيح في حالة k من الحدود أي أن:

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{2(k+1)(k+2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

بإضافة الحد الذي ترتيبه $k+1$ من الحدود إلى طرفي المعادلة وهو $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{2(k+1)(k+2)}=\frac{1}{(k+1)(k+3}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{(k+3)(2k+3)\_2(k+2)}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2k^{2}+9k+9-2k+4}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{(k+1)(2k+5}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{2(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2(k+1)+3}{2(k+1+)(k+1+2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بمقارنة (1) و (2) نجد أنهما نفس الشيء مع استبدال k بـــ $k+1$.

$\therefore$ القانون صحيح في حالة $k+1$ من الحدود وبالتالي هو صحيح على الإطلاق.

تمارين

باستخدام الاستقراء الرياضي برهن صحة ما يلي:

1) $n^4 \le 2^n$ لكل عدد صحيح موجب n أكبر من أو يساوي 16

2) $(1+x)^n \ge 1+nx$ لكل عدد صحيح موجب n ، $x > -1$

3) $1+2+3+\dots\dots\dots\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

4) $1+3+5+\dots\dots\dots\dots+(2n-1) = n^2$

5) $1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

6) $1^2+4^2+7^2+\dots\dots\dots\dots+(3n-2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$

7) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

8) $1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

9) $2+5+8+\dots\dots\dots\dots+(3n-1) = \frac{1}{2}n(3n+1)$

10) $3+7+11+\dots\dots\dots\dots+(4n-1) = n(2n+1)$

11) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\dots\dots\dots\dots+n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

12) $2\times 3+5\times 7+8\times 11+\dots\dots\dots\dots+(3n-1)(4n-1) = \frac{1}{2}n(8n^2+5n-1)$

13) $1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\dots\dots\dots\dots+n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

14) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

15) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

16) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ، $n > 1$

17) $1+2+2^2+\dots\dots\dots+2^{n-1} = 2^n-1$

18) $(1+x_1)(1+x_2)\dots\dots\dots(1+x_n) \ge 1+x_1+x_2+\dots\dots\dots+x_n$ حيث كل الأعداد $x_1,x_2,\dots\dots,x_n$ من إشارة واحدة وأكبر من العدد -1

19) لأي عددين a,b حيث $a+b \ne 0$ يكون $a+b$ قاسم للعدد $a^{2n}-b^{2n}$ لكل $n \in N$

20) $2+4+6+\dots\dots\dots\dots+2n = n(n+1)$

21) العدد 3 قاسم للعدد $2^{2n}-1$ لأي $n \in N$

ج. البرهان المباشر

هو البرهان الذي يعتمد على الفروض في السؤال والحقائق المعروفة للتوصل إلى النتيجة المطلوبة باستعمال عبارات شرطية صحيحة (إذا كان فإن " $p \to q$ " هذا ويمكن تصنيف هذا النوع من أنواع البرهان إلى عدة أصناف نتعرض إليها بالتفصيل فيما يلي:

1- البرهان المباشر باستعمال العبارة الشرطية التي مقدمها نفس تاليها.

لاحظ أن العبارة الشرطية $p \to p$ هي تحصيل حاصل (صائبة منطقياً)

مثال:

لأي مجموعة A برهن أن $A \subseteq A$

البرهان:

باعتبار أن $p \to p$ صائبة

لتكن A مجموعة و x أي عنصر

إذا كان $x \in A$ فإن $x \in A$ أي أن $x \in A \to x \in A$ عبارة صائبة دائماً ومن تعريف المجموعات الجزئية نستنتج أن: $A \subseteq A$

2.البرهان المباشر باستعمال العبارة الشرطية التي مقدمها خطأ.

نعلم أن العبارة الشرطية $p \to q$ تكون صحيحة إذا كان مقدمها p خطأ مهما كانت قيمة صدق q.

والمثال التالي يوضح كيفية البرهان بهذه الطريقة:

مثال:

لأي مجموعة A برهن أن ϕ مجموعة جزئية من A

البرهان:

لتكن A أي مجموعة وليكن x أي عنصر.

بما أن ϕ مجموعة خالية فإن $x \in \phi$ عبارة خاطئة وعليه فإن $x \in \phi \to x \in A$ عبارة صادقة بغض النظر عن كون $x \in A$ أو $x \notin A$

ومن تعريف المجوعة الجزئية ينتج أن: $\phi \subseteq A$

مثال:

برهن أن أي عدد حقيقي هو حد سفلي للمجموعة الخالية.

البرهان:

إذا كانت $x \in \phi$ فإن $x \geq a$ حيث $a \in \Re$ قضية صائبة دائماً لأن $x \in \phi$ قضية خاطئة

أي أنه لكل $x \in \phi$ يوجد $a \in \Re$ بحيث $x \geq a$ أي أن a حد سفلي للمجموعة ϕ

3. البرهان المباشر بالتعويض

إذا كانت العبارة p صحيحة وكانت $p \leftrightarrow q$ صحيحة فإننا نستنتج أن q صحيحة.

مثال:

ليكن x عدداً صحيحاً برهن أنه إذا كان x عدداً فردياً فإن $x+1$ يكون عدداً زوجياً.

البرهان

$x = 2n+1 \ \ ,n \in Z$ عدد صحيح فردي

$x+1 = 2n+1+1 = 2n+2 = 2(n+1)$

$x+1 = 2l \ \ ,l = n+1$

أي أن $x+1$ عدد زوجي

مثال:

إذا كان x عدد زوجي برهن أن x^2 زوجي

البرهان:

$x \leftrightarrow x = 2n \ :n \in Z$ عدد زوجي

$x^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$

$x^2 = 2l \ \ :l = 2n^2$ أي أن x^2 زوجي

4- البرهان المباشر بالإنشاء

طريقة البرهان المباشر بالإنشاء تتم بإنشاء الحالة الموجودة التي تحقق المطلوب كما يتتضح من خلال المثال التالي:

مثال:

برهن أن إذا كان $f(x) = ax^2 + b + c$ فإنه للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين حقيقيين مختلفين حيث $a \neq 0 \ , \ \mathrm{b}^2 - 4ac > 0$

البرهان

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ,a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$
$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}==\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

إذا كان $a\neq 0,\ \mathrm{b}^2-4ac>0$ فإنه يوجد للمعادلة حلول وهي:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad ,\mathrm{x}_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مثال:

برهن أن $x^2-2x+6>0$ لكل $x\in\Re$

البرهان

$$x^2-2x+6=x^2-2x+1+5=(x-1)^2+5$$

وبما أن $(x-1)^2\geq 0$ لكل $x\in\Re$ فإن $(x-1)^2+5\geq 5$ أي أن $x^2-2x+6>0$

5– برهان الحالات الخاصة.

يتم باستعمال حالة عامة شروطها متحققة من قبل الحالة الخاصة.

مثال:

دون محاولة إجراء العلميات الحسابية بالجمع العادي المباشر برهن أن: $1+2+3+.......+100=5050$

البرهان

لاحظ أن: $1+2+3+.......+100=5050$ هي متسلسلة حسابية حدها الأول $a=1$ وأساسها $r=1$

وعدد حدوها $n=100$ ونعلم أن الصيغة العامة لمجموع المتسلسلة الحسابية هي

$$\frac{n}{2}[2a+(n-1)r]=\frac{100}{2}[2+99]=50\times 101=5050$$

حل آخر

نعلم أن $1+2+3+.........+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$1+2+...+100=\frac{100(100+1)}{2}=5050$$

6- برهان الحالات المنتهية:

في هذه الطريقة يتم البرهان بتحقيق جميع الحالات

مثال:

ليكن $A=\{0,1\}$ ولتكن $\times$ عملية الضرب العادي على الأعداد الحقيقية برهن أن عملية الضرب $\times$ مغلقة على المجموعة A .

البرهان

نعلم أن العملية $\times$ تكون مغلقة إذا كان $x\times y\in A$ لكل $x,y\in A$ وبما أن عدد عناصر المجموعة A منتهية وهو عنصران فإن بالإمكان تحقيق جميع الحالات كما في الجدول:

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

لاحظ أن:

$0\times 0=0\in A$ ، $0\times 1=0\in A$ ، $1\times 0=0\in A$ ، $1\times 1=1\in A$

$\therefore$ العملية $\times$ مغلقة على المجموعة A

مثال:

لكل عدد طبيعي n برهن أن: $n(n+1)$ يقبل القسمة على 2

البرهان:

إذا كان n عدد طبيعي فإنه يكون عدد فردي أو عدد زوجي

أولاً: إذا كان n عدد فردي فإن $n+1$ عدد زوجي وبالتالي فإن: $n(n+1)$ تقبل القسمة على 2

ثانياً: إذا كان n عدد زوجي فإن $n(n+1)$ يقبل القسمة على 2

من أولاً وثانياً نستنتج أن: $n(n+1)$ يقبل القسمة على 2 لكل عدد طبيعي n

7- برهان حالات الوجود.

قد يتم البرهان بإنشاء الحالة الموجودة التي تحقق المطلوب كما في المثال التالي:

مثال:

إذا كان $f(x)=x^3-3x \ +8x-5$ دالة معرفة على الفترة $[-0.5,1.5]$ برهن أن المعادلة $f(x)=0$ لها جذر حقيقي في هذه الفترة.

البرهان

نعلم من نظرية بلزانو التي تنص على أنه إذا كان $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث $f(a),f(b)<0$ فإنه يوجد $c\in(a,b)$ بحيث أن $f(c)=0$

وبما أن $f(x)$ دالة متصلة لأنها كثيرة حدود، و $f(0)=-5$ ، $f(1)=1$ فإن $f(0).\mathrm{f}(1)=-5<0$

وبما أن $[0,1]\subset[-0.5,1.5]$ فإنه يوجد c بحيث $c\in(-0.5,1.5)$, $\mathrm{f(c)}=0$

د. البرهان غير المباشر

من أبرز أنواع البرهان الغير مباشر البرهان بالمعاكس الإيجابي والبرهان بالتناقض والبرهان بالاستبعاد.

1- البرهان المكافئ بالمعاكس الإيجابي.

إذا أردنا برهنة $p\to q$ وكانت هذه العبارة صعبة البرهان فإننا نستعمل برهان مباشر لمعاكسها الإيجابي $\sim q\to\sim p$ وبذلك نكون قد برهنا الجملة الأصلية لأن $p\to q\equiv\sim q\to\sim p$.

مثال:

برهن أنه إذا كان n^2 عدداً فردياً فإن n يكون عدداً فردياً

البرهان

نعلم أن العدد n يكون فردياً إذا وجد عدد صحيح k بحيث $n=2k+1$

نفرض أن n ليس عدداً فردياً أي أن n عدداً زوجياً أي أنه يوجد $k\in Z$ بحيث $n=2k$

$$n^2=4k^2=2(2k^2)$$

أي أن n^2 عدد زوجي أي أن n^2 عدد غير فردي

وبهذا نكون قد برهنا أن $\sim q\to\sim p$ ومنها نستنتج أن $p\to q$ صائبة أي أنه إذا كان n^2 عدد فردي فإن n يكون عدد فردي.

2- البرهان الغير مباشر بالتناقض (فرض عكس المطلوب)

نتبع في هذا الأسلوب من البرهان فرض أن عكس المطلوب صحيح ثم نستخدم هذا الفرض والمعطيات وباستعمال أسلوب مباشر للبرهان للوصول إلى تناقض فيكون سبب هذا التناقض هو فرضنا بأن عكس المطلوب صحيح وبناء على ذلك يكون المطلوب صحيح.

مثال

برهن أن $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي

البرهان

نفرض أن $\sqrt{2}$ عدد قياسي في أبسط صورة

إذاً يوجد عددين صحيحين a,b ، و $a \neq 0$ والقاسم المشترك الأعظم بين b,a هو 1 أي أن:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

بتربيع طرفي المعادلة السابقة نحصل على $2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$ ....(1)

$\therefore$ a^2 عدد زوجي وبالتالي فإن a عدد زوجي أي أن $a = 2k : k \in Z$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن $4k^2 = 2b^2$ أي أن $b^2 = 2k^2$ وهذا يعني أن b^2 عدد زوجي وبالتالي فإن b عدد زوجي.

إذاً يوجد قاسم مشترك بين b,a عدا الواحد وهذا يناقض الفرض ولذلك فإن $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي.

مثال:

ليكن n عدد صحيح برهن أنه إذا لم يكن هناك عدداً صحيحا بين الصفر والواحد فإنه لا يوجد عدد صحيح بين $n+1,n$

البرهان

المعطيات: n عدد صحيح ولا يوجد عدد صحيح بين 0 ، 1

المطلوب: لا يوجد عدد صحيح بين n و $n+1$

للبرهان بالتناقض نفرض عكس المطلوب أي نفرض أنه يوجد عدد صحيح بين n و $n+1$ وليكن k أي أن $n < k < n+1$

بطرح n من طرف المتباينة نجد أن $n-n < k-n < n+1-n$ أي أن $0 < k-n < 1$

وبما أن k,n أعداد صحيحة فإن $k-n$ يكون عدد صحيح أي أنه يوجد عدد صحيح بين 1,0 وهذا يناقض المعطيات وبالتالي فإن الفرض خاطئ والصواب هو: لا يوجد عدد صحيح بين n ، و $n+1$

3- البرهان غير المباشر بالاستبعاد والتناقض.

هناك بعض الحالات المنتهية التي تواجهنا في الرياضيات وإذا أردنا أن نبرهن جملة تحتوى مثل هذه الحالات فإننا نقوم بحصر جميع الحالات ونسبعدها الواحدة بعد الأخرى إلى أن تبقى حالة واحدة فتكون هي المطلوبة كما هو موضح في المثال التالي:

مثال:

ليكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بحيث أن $f(-3)=-3\,,\mathrm{f}(3)=3,|\mathrm{f}'(\mathrm{x})|<1$ برهن أن $f(0)=0$

البرهان:

لاحظ أن $f(0)$ عدد حقيقي ولهذا هناك ثلاثة حالات ممكنة هي: $f(0)=0, f(0)>0,\ \mathrm{f}(0)<0$

فإذا استبعدنا الحالتين الأولى والثانية فإنه لا يبقى أمامنا إلا الحالة الثالثة وتكون صحيحة.

1- نفرض أن: $f(0)=a$ حيث a عدد حقيقي موجب وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,0]$ أي يوجد $c\in(-3,0)$ بحيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ أي أن:

$$f'(c)=\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\frac{a+3}{3}=\frac{a}{3}+1>1$$

وهذا غير ممكن لأن $|f'(c)|<1$

2- نفرض أن $f(0)=-b$ أي أن $-b$ قيمة سالبة وبالتالي فإن b عدد حقيقي موجب وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفقرة $[0,3]$ نستنتج أنه يوجد $c\in(0,3)$ بحيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ أي أن

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3+b}{3}=1+\frac{b}{3}>1$$

وهذا غير ممكن لان $|f'(c)|<1$

وبما أن $f(0)$ ليس موجباً وليس سالباً فإن $f(0)=0$

4. برهان حالات الوجود الوحيد

يتم بإثبات الوجود أولاً ثم إثبات أنه إذا وجد حلان فهما متكافئان.

مثال:

ليكن $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}$ حيث $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ بدون محاولة حل المعادلة $f(x)=0$ برهن أن هناك جذراً واحداً فقط لهذه المعادلة في الفترة $[0,\dfrac{\pi}{2}]$

البرهان:

بتطبيق نظرية بلزانوا على الدالة $f(x)$ حيث الدالة متصلة على الفقرة $[0,\frac{\pi}{2}]$

$f(0)=\sin(0)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ ، $f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$f(0).f(\frac{\pi}{2})=(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}<0$

أي أنه يوجد على الأقل جذر واحد للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

لاحظ أن $f'(x)=\cos x>0$ في الفترة $0<x<\frac{\pi}{2}$ أي أن الدالة $f(x)$ متزايدة علـــى الفتـــرة $(0,\frac{\pi}{2})$ وهذا يعني أنه لا يمكن لمنحنى الدالة أن يقطع المحور X إلا في نقطة واحدة.

إذاً يوجد جذر وحيد للدالة المعطاة.

هـــ . برهان جمل من نوع $\forall x,P(x)$

لبرهان جمل من نوع $\forall x,P(x)$ نفرض أن x يمثل عنصراً ما من المجموعة الشاملة ثم نبرهن أن $P(x)$ صادقة وبالتالي نكون قد برهنا أن $\forall x,P(x)$ صادقة.

و– برهان جمل من نوع $\exists x,P(x)$

لبرهان جمل من نوع $\exists x,P(x)$ نبرهن أنه يوجد عنصر x في المجموعة الشاملة يجعل $P(x)$ صادقة وبالتالي نكون قد برهنا أن $\exists x,P(x)$ صادقة.

مثال:

برهن أن $A-B\subseteq A\bigcap B^c$ لأي مجموعتين A,B

البرهان

نفرض أن $x\in A-B$ وهذا يعني أن $x\in A,x\notin B$ أي أن $x\in A,x\in B^c$ وهذا معناه أن $x\in A\bigcap B^c$

ومن تعريف المجموعة الجزئية نستنتج أن $A-B\subseteq A\bigcap B^c$

مثال:

برهن أنه يوجد دالة f مستمرة وغير قابلة للاشتقاق

البرهان

الدالة $f(x)=|x|$ تكون مستمرة وغير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ (يترك للطالب التحقق من ذلك)

تمارين

1) هل الجمل الرياضية التالية صحيحة ؟ برهن صحة ما تقول؟

(i) $n^3 - 4n^2 + 5n - 1$ مقدار موجب لكل عدد طبيعي n

(ii) $1+2+3+...........+n = \frac{n(n+1)}{2} + (100-n)(99-n)........(1-n)$

(iii) جميع الأعداد الأولية فردية

(iv) المقدار $n^2 - n + 41$ يعطي عدد أولي لكل عدد طبيعي n

(v) $f(x) = \sqrt{x}$ دالة قابلة للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية

(vi) $\forall x > 0 \quad , \ x^2 - 3x + 2 \geq 0$

2) باستخدام أي طريقة للبرهان تراها مناسبة برهن صحة ما يلي:

(1) لأية متتالية من الأعداد الحقيقية $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ولكل عدد حقيقي m فإن:

$m(x_1 + x_2 + ... + x_k) = mx_1 + mx_2 + ... + mx_k$

(2) لأي عدد طبيعي n يكون $n + 3 < 5n^2$

(3) كثيرة الحدود $x - y$ تقسم كثيرة الحدود $x^n - y^n$ لكل $n \in N$

(4) لكل عدد طبيعي n ، $5^n - 2^n$ يقبل القسمة على 3

(5) لكل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكون $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

(6) لكل عدد صحيح n يكون $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ عدد صحيح

(7) ليكن n عددا صحيحا فإن: $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ عدد صحيح

(8) مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية

(9) ليكن a, b عددين صحيحين وافرض أن a تقسم b فإن $a \leq b$

(10) إذا كان x عدد أولي فإن $x + 7$ عدد غير أولي

(11) ليكن x, y أعداد حقيقية موجبة فإن $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

(12) يوجد عددين صحيحين m, n بحيث أن $2m + 7n = 1$

(13) يوجد عدد طبيعي m بحيث أنه لكل عدد طبيعي $n > m$ يكون $\frac{1}{n} < 0.13$

(14) $\sqrt{3}$ عدد غير قياسي

(15) يوجد لكثيرة الحدود $f(x) = x + 4$ صفر واحد فقط

(16) لا يوجد عددين صحيحين m, n بحيث $2m + 4n = 7$

(17) $n(n+1)(n+2)$ يقبل القسمة على 6

(18) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ يقبل القسمة على 24

(19) $5^n - 3^n$ يقبل القسمة على 2

(20) $3^n - 1$ يقبل القسمة 2

(21) $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ يقبل القسمة على 5

(22) $n^2 < 2^n$ لكل الأعداد الطبيعية $n > 4$

(23) $n^3 < 2^n$ لكل الأعداد الطبيعية $n > 9$

(24) $2^n < n!$ لكل الأعداد الطبيعية $n \geq 4$

(25) $n^3 + 1 > n \ \ + n$ لكل الأعداد الطبيعية $n \geq 2$

(26) ليكن a, b, c أعدادا صحيحة فإذا كان a يقسم b وكان a يقسم c فإن a تقسم $b - c$

(27) ليكن x عددا صحيحا برهن أنه إذا كان x فرديا فإن $x + 1$ عدد زوجي

(28) لكل عدد طبيعي $n \geq 2$ فإن $n^3 + 1 > n \ \ + n$