العلاقات

تعريف

لتكن كل من A,B مجموعة غير خالية.

أي مجموعة R جزئية من $A\times B$ تسمى علاقة ويرمز لعناصر العلاقة بالأزواج المرتبة (a,b) حيث:

$$R=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$$

مثال:

لتكن $B=\{x,y,z\}$, $A=\{a,b,c\}$ فإن:

$R=\{(a,x),(b,y),(c,z)\}$ علاقة من A إلى B

$Q=\{(a,x),(a,y),(b,z)\}$ علاقة من A إلى B

$H=\{(x,a,(x,b),(z,a)\}$ علاقة من B إلى A

تعريف : النطاق والمدى للعلاقة:

لتكن R علاقة من المجموعة A إلي المجموعة B.

تسمى مجموعة العناصر الأولى من الأزواج المرتبة في R بنطاق العلاقة R ويرمز لها بالرمز $dom\ R$ أي أن:

$$dom\ R=\{x:\exists y\in B:(x,y)\in R\}$$

تسمى مجموعة العناصر الثانية من الأزواج المرتبة في R بمدى العلاقة R ويرمز لها بالرمز $ran\ R$ أي أن:

$ran\ R=\{y:\exists x\in A:(x,y)\in R\}$ ونلاحظ أن: $ran\ R\subseteq B$, $dom\ R\subseteq A$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{a,b\}$ و $R=\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ علاقة من A إلى B فإن

$dom\ R=\{1,2,3\}$ ، $ran\ R=\{a,b\}$

مثال:

إذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$ ومعرفة كالآتي: $R=\{(x,y)\in\Re^2:y=x\}$

فإن: $ran\ R=\Re$, $dom\ R=\Re$

تعريف العلاقة العكسية:

إذا كانت R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإن العلاقة: $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$

من المجموعة B إلى المجموعة A تسمى العلاقة العكسية للعلاقة R

مبرهنة:

إذا كانت R علاقة من المجموعة A إلي المجموعة B فإن:

1- $dom\ R = ran\ R^{-1}$ 2- $ran\ R = dom\ R^{-1}$

البرهان:

-1

$$x \in dom\ R \Rightarrow \exists y \in B : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R^{-1} \Rightarrow x \in ran\ R^{-1}$$

$$\Rightarrow dom\ R \subseteq ran\ R^{-1} \ ....(1)$$

$$b \in ran\ R^{-1} \Rightarrow \exists a \in A : (a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R \Rightarrow b \in dom\ R$$

$$\Rightarrow ran\ R^{-1} \subseteq dom\ R \ ....(2)$$

من (1) و(2) نجد أن: $dom\ R = ran\ R^{-1}$

رقم (2) يترك تمرين للطالب

العلاقة الذاتية:(المحايدة)

لتكن A مجموعة ما فإن المجموعة التي عناصرها جميع الأزواج المرتبة (x,y) في $A \times A$ حيث $x = y$

تسمى بالعلاقة الذاتية "المحايدة" على A ويرمز لها بالرمز I_A أي أن: $I_A = \{(x,y) \in A \times A : x = y\}$

مثال:

إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ فإن $I_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

مثال

إذا كانت A مجموعة الأعداد الطبيعية فإن: $I_{\aleph} = \{(x,y) \in \aleph \times \aleph : x = y\} = \{(1,1),(2,2),.........\}$

تركيب العلاقات:

إذا كانت R علاقة من A إلى B و Q علاقة من B إلى C فإن: $Q \circ R$ تركيب العلاقة R مع Q

تعرف كما يلي: $Q \circ R = \{(a,b) \in A \times C : \exists b \in B : (a,b) \in R, (b,c) \in Q\}$

لاحظ أن تركيب العلاقة R مع Q هي علاقة من A إلي C.

مثال

لتكن $A = \{a,b,c\}$ ، $B = \{x,y,z\}$ ، $C = \{1,2,3\}$ ، حيث $R = \{(a,x),(a,y),(b,z),(c,x)\}$

علاقة من A إلى B ، و $Q = \{(x,1),(y,3),(z,4),(x,2)\}$ علاقة من B إلى C

فإن: $Q \circ R = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,4),(c,1),(c,2)\}$

مبرهنة:

لتكن R علاقة على المجموعة A فإن: $I_A \circ R = R \circ I_A = R$

البرهان:

أولاً: سنبرهن أن: $I_A \circ R = R$

$$(x,z) \in I_A \circ R \Rightarrow \exists y \in A : (x,y) \in R, (y,z) \in I_A$$
$$(y,z) \in I_A \Rightarrow y = z \Rightarrow (x,z) \in R$$
$$\Rightarrow I_A \circ R \subseteq R \text{ ....(1)}$$
$$(a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R, (b,b) \in I_A \Rightarrow (a,b) \in I_A \circ R$$
$$\Rightarrow R \subseteq I_A \circ R \text{ ....(2)}$$

من (1)و(2) نستنتج أن: $I_A \circ R = R$

ثانياً: سنبرهن أن $R \circ I_A = R$

$$(x,z) \in R \circ I_A \Rightarrow \exists y \in A : (x,y) \in I_A, (y,z) \in R$$
$$(x,y) \in I_A \Rightarrow x = y \Rightarrow (x,z) \in R$$
$$\Rightarrow R \circ I_A \subseteq R \text{ ....(3)}$$
$$(a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R, (a,a) \in I_A \Rightarrow (a,b) \in R \circ I_A$$
$$\Rightarrow R \subseteq R \circ I_A \text{ ....(4)}$$

من (3)و(4) نستنتج أن: $R \circ I_A = R$

من أولاً وثانياً نستنتج: $I_A \circ R = R \circ I_A = R$

مبرهنة:

لتكن H, Q, R علاقات على المجموعة A فإن:

1. $(H \circ Q) \circ R = H \circ (Q \circ R)$
2. $(R^{-1})^{-1} = R$
3. $(Q \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ Q^{-1}$

البرهان:

.1

$$(a,d) \in (H \circ Q) \circ R \Rightarrow \exists b \in A : (a,b) \in R, (b,d) \in H \circ Q$$
$$\Rightarrow (a,b) \in R, \exists c \in A : (b,c) \in Q, (c,d) \in H \Rightarrow (a,c) \in Q \circ R, (c,d) \in H$$
$$\Rightarrow (a,d) \in H \circ (Q \circ R)$$
$$\Rightarrow (H \circ Q) \circ R \subseteq H \circ (Q \circ R) \text{ ....(1)}$$

$(a,d)\in H\circ(Q\circ R)\Rightarrow \exists c\in A:(a,c)\in Q\circ R,(c,d)\in H$

$\Rightarrow \exists b\in A:(a,b)\in R,(b,c)\in Q,(c,d)\in H\Rightarrow (a,b)\in R,(b,d)\in H\circ Q$

$\Rightarrow (a,d)\in (H\circ Q)\circ R$

$\Rightarrow H\circ(Q\circ R)\subseteq (H\circ Q)\circ R$ ....(2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $(H\circ Q)\circ R = H\circ(Q\circ R)$

.2

$(x,y)\in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y,x)\in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y)\in R$

أي أن $(R^{-1})^{-1}\subseteq R$ وكذلك $R\subseteq (R^{-1})^{-1}$ وهذا يبرهن أن $(R^{-1})^{-1}=R$

.3

$(x,z)\in (Q\circ R)^{-1}\Rightarrow (z,x)\in Q\circ R\Rightarrow \exists y\in A:(z,y)\in R,(y,x)\in Q$

$\Rightarrow (y,z)\in R^{-1},(x,y)\in Q^{-1}\Rightarrow (x,z)\in R^{-1}\circ Q^{-1}$

$\Rightarrow (Q\circ R)^{-1}\subseteq R^{-1}\circ Q^{-1}$ ....(1)

$(a,c)\in R^{-1}\circ Q^{-1}\Rightarrow \exists b\in A:(a,b)\in Q^{-1},(b,c)\in R^{-1}\Rightarrow (b,a)\in Q,(c,b)\in R$

$\Rightarrow (c,a)\in Q\circ R\Rightarrow (a,c)\in (Q\circ R)^{-1}$

$\Rightarrow R^{-1}\circ Q^{-1}\subseteq (Q\circ R)^{-1}$ ....(2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $(Q\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ Q^{-1}$

مبرهنة:

إذا كانت R، Q علاقتين من A إلى B فإن:

.1 $(R\cap Q)^{-1}=R^{-1}\cap Q^{-1}$ .2 $(R\cup Q)^{-1}=R^{-1}\cup Q^{-1}$

البرهان:

.1

$(x,y)\in (R\cap Q)^{-1}\Rightarrow (y,x)\in R\cap Q\Rightarrow (y,x)\in R,(y,x)\in Q$

$\Rightarrow (x,y)\in R^{-1},(x,y)\in Q^{-1}\Rightarrow (x,y)\in R^{-1}\cap Q^{-1}$

$\Rightarrow (R\cap Q)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap Q^{-1}$ ....(1)

$(x,y)\in R^{-1}\cap Q^{-1}\Rightarrow (x,y)\in R^{-1},(x,y)\in Q^{-1}\Rightarrow (y,x)\in R,(y,x)\in Q$

$\Rightarrow (y,x)\in R\cap Q\Rightarrow (x,y)\in (R\cap Q)^{-1}$

$\Rightarrow R^{-1}\cap Q^{-1}\subseteq (R\cap Q)^{-1}$ ....(2)

من (1) و(2) نجد أن: $(R\cap Q)^{-1}=R^{-1}\cap Q^{-1}$

رقم (2) يترك تمرين للطالب

مبرهنة:

إذا كانت Q علاقة من A إلى B، وR علاقة من B إلى C فإن:

.1 $dom(R\circ Q)\subseteq dom\ Q$ .2 $ran(R\circ Q)\subseteq ran\ R$

.3 إذا كان $ran\ Q\subseteq dom\ R$ فإن $dom(R\circ Q)=dom\ Q$

البرهان:

.1

$$x\in dom(R\circ Q)\Rightarrow \exists z\in C:(x,z)\in R\circ Q\Rightarrow \exists y\in B:(x,y)\in Q,(y,z)\in R$$

$$x\in dom\ Q\Rightarrow dom\ (R\circ Q)\subseteq dom\ Q$$

.2

$$c\in ran(R\circ Q)\Rightarrow \exists a\in A:(a,c)\in R\circ Q\Rightarrow \exists b\in B:(a,b)\in Q,(b,c)\in R$$
$$\Rightarrow c\in ran\ R\Rightarrow ran(R\circ Q)\subseteq ran\ R$$

.3

$$x\in dom(R\circ Q)\Rightarrow \exists z\in C:(x,z)\in R\circ Q\Rightarrow \exists y\in B:(x,y)\in Q,(y,z)\in R$$

$$\Rightarrow x\in dom\ Q$$

$$\Rightarrow dom\ (R\circ Q)\subseteq dom\ Q\ \ ....(1)$$

$$x\in dom\ Q\Rightarrow \exists y\in B:(x,y)\in Q\Rightarrow y\in ran\ Q$$

وبما أن $ran\ Q\subseteq dom\ R$ فإن $y\in dom\ R$ وهذا يعني أنه يوجد $z\in C$ بحيث $(y,z)\in R$

$$(x,y)\in Q,(y,z)\in R\Rightarrow (x,z)\in R\circ Q\Rightarrow x\in dom\ R\circ Q$$
$$\Rightarrow dom\ Q\subseteq dom(R\circ Q)\ \ ....(2)$$

من (1) ، (2) نستنتج أنه إذا كان $ran\ Q\subseteq dom\ R$ فإن $dom(R\circ Q)=dom\ Q$

تمارين

1. إذا كانت $\{R_i\}_{i\in I}$ عائلة علاقات برهن أن:

$dom\,(\bigcup R_i)=\bigcup(dom\,R_i)$ ، $ran\,(\bigcup R_i)=\bigcup(ran\,R_i)$

2. ليكن كل من R,Q علاقة، وليكن A,B,C مجموعات برهن أن:

(أ) $R\subseteq Q$ إذا وإذا فقط $R^{-1}\subseteq Q^{-1}$ (ب) إذا كان $R\subseteq A\times B$ فإن $R^{-1}\subseteq B\times A$

(ج) إذا كان $R\subseteq A\times B$ و $Q\subseteq B\times C$ فإن $Q\circ R\subseteq A\times C$

(د) $dom\,R-dom\,Q\subseteq dom\,(R-Q)$ (هـ) $ran\,R-ran\,Q\subseteq ran\,(R-Q)$

3. ليكن كل من A,B,C مجموعة برهن أن:

(أ) إذا كان $A\bigcap B\neq\phi$ فإن $(A\times B)\circ(A\times B)=A\times B$

(ب) إذا كان $A\bigcap B=\phi$ فإن $(A\times B)\circ(A\times B)=\phi$

(ت) إذا كان $B\neq\phi$ فإن $(B\times C)\circ(A\times B)=A\times C$

(ث) $(A\times B)^{-1}=B\times A$

4. إذا كان R ، Q علاقتين على المجموعة غير الخالية A برهن أن:

1. $dom(R\bigcup Q)=(dom\,R)\bigcup(dom\,Q)$ 2. $ran(R\bigcup Q)=(ran\,R)\bigcup(ran\,Q)$

5. لتكن T,S,R علاقات على المجموعة A برهن أن:

(i) $(S\bigcup T)\circ R=(S\circ R)\bigcup(T\circ R)$ (ii) $(S\bigcap T)\circ R\subseteq(S\circ R)\bigcap(T\circ R)$

(iii) إذا كان $R\subseteq S$ فإن $R\circ T\subseteq S\circ T$ ، $T\circ R\subseteq T\circ S$

6. لتكن P,Q,R,S علاقات على المجموعة A برهن أن:

(i) إذا كان $P\subseteq Q$ ، $R\subseteq S$ فإن $P\circ R\subseteq Q\circ S$ (ii) $P\subseteq Q$ إذا كان وإذا كان فقط $P^{-1}\subseteq Q^{-1}$

7. ليكن J,G,H علاقات على المجموعة A برهن أن:

(i) $(G-H)^{-1}=G^{-1}-H^{-1}$ (ii) $(G\bigcap H)^{-1}=G^{-1}\bigcap H^{-1}$

(iii) $(G\bigcup H)^{-1}=G^{-1}\bigcup H^{-1}$ (iv) $(G\circ H)-(G\circ J)\subseteq G\circ(H-J)$

أنواع العلاقات

1 -العلاقة العاكسة: reflexive relation

لتكن R علاقة على المجموعة A.

R تسمى علاقة عاكسة إذا وإذا كان فقط لكل $a \in A$ فإن $(a,a) \in R$

2 -العلاقة المتناظرة " المتماثلة": symmetric relation

تسمى R علاقة متماثلة على المجموعة A إذا وإذا كان فقط لكل $a,b \in A$ إذا كان $(a,b) \in R$ فإن $(b,a) \in R$

3 -العلاقة المتعدية " الناقلة": transitive relation

تسمى R علاقة ناقلة على المجموعة A إذا وإذا كان فقط لكل $a,b,c \in A$ إذا كانت $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ فإن $(a,c) \in R$.

4 -العلاقة ضد متماثلة (ضد متناظرة) " متخالفة": anti-symmetric relation

R تسمى علاقة ضد متماثلة على المجموعة A إذا وإذا كان فقط لكل $a,b \in A$ إذا كان $(a,b) \in R, (b,a) \in R$ فإن $a = b$

ومن أمثلة العلاقات المتخالفة علاقة المجموعة الجزئية المعرفة على المجموعات وعلاقة $\leq$ المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

ملاحظة:

العبارة العلاقة R ليست علاقة متناظرة لا تعني أن R علاقة ضد متناظرة.

5 -العلاقة اللاانعكاسية ir-reflexive relation

لتكن R علاقة علي المجموعة A.

R تسمى علاقة لا انعكاسية إذا وإذا كان فقط لكل $a \in A$ فإن $(a,a) \notin R$

تعريف:

لتكن R علاقة على A .

تسمى R علاقة تكافؤ إذا وإذا كان فقط R عاكسة ومتماثلة ومتعدية.

مثال:

بفرض أن $A = \{1,2,3\}$ فإن: $A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

العلاقة $R=\{(1,1),(1,3),(2,2)\}$ المعرفة على المجموعة A ليست عاكسة وليست متماثلة(non-symmetric) ولكنها ناقلة ومتخالفة

العلاقة $Q=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ المعرفة على المجموعة A متماثلة وليست ناقلة ،وليست متخالفة ،ليست عاكسة

العلاقة $H=\{(1,3),(1,2),(2,1)\}$ المعرفة على المجموعة A متماثلة وليست ناقلة (non-transitive) ،وليست متخالفة ،ليست عاكسة(non-reflexive) ،لا انعكاسية

مثال:

إذا كانت $\aleph$ مجموعة الأعداد الطبيعية و R هي العلاقة $\leq$ على $\aleph$ فإن:

R علاقة متخالفة لأنه إذا كان $(x,y)\in R,(y,x)\in R$ فإن $x=y$ أي أن $x\leq y, y\leq x \Rightarrow x=y$

أيضاً العلاقة R عاكسة لأنه لكل $a\in\aleph$ فإن $(a,a)\in R$ حيث كل عدد طبيعي يساوي نفسه.

العلاقة R ليست متماثلة لأن $(1,2)\in R$ بينما $(2,1)\notin R$

العلاقة R علاقة ناقلة وذلك لأنه لأي ثلاثة أعداد طبيعية x,y,z إذا كان $x\leq y$ ، $y\leq z$ فإن $x\leq z$

أي أن: $(x,y)\in R,(y,z)\in R\Rightarrow (x,z)\in R$

مثال:

ليكن كل من R_1 ، R_2 ، R_3 علاقة معرفة على $\aleph$ كالتالي:

$$R_1=\{(x,y)\in\aleph\times\aleph : y|x\}$$

$$R_2=\{(x,y)\in\aleph\times\aleph : x+y=5\}$$

$$R_3=\{(x,y)\in\aleph\times\aleph : x+2y=14\}$$

أولاً: بالنسبة للعلاقة R_1

R_1 علاقة عاكسة وذلك لأن كل عنصر من عناصر $\aleph$ يقبل القسمة علي نفسه أي أن:

$$(x,x)\in R_1 \quad \forall x\in\aleph$$

R_1 ليست متماثلة وذلك لأنه على سبيل المثال إذا كان: $(12,6)\in R_1$ فإن $(6,12)\notin R_1$ حيث 12 تقبل القسمة على 6 ولكن 6 لا تقبل القسمة على 12.

ثانياً: بالنسبة للعلاقة R_2

R_2 ليست عاكسة لأنه يوجد $x\in\aleph$ بحيث $x+x\neq 5$ أي أن: $(x,x)\notin R_2$

R_2 علاقة متماثلة وذلك لأنه إذا كان $x+y=5$ فإن $y+x=5$ أي أنه لكل $x,y\in R_2$ إذا كان $(x,y)\in R_2$ فإن $(y,x)\in R_2$

R_2 ليست ناقلة لأنه على سبيل المثال: $(3,2),(2,3)\in R_2$ بينما $(3,3)\notin R_2$ حيث:

$2+3=5\ ,\ 3+2=5$ بينما $3+3\neq 5$

ثالثاً:بالنسبة للعلاقة R_3

R_3 ليست عاكسة لأنه يوجد $x\in\aleph$ بحيث $x+2x\neq 14$ أي أن: $(x,x)\notin R_3$ مثلاً:

$2+2(2)\neq 14$ أي أن $(2,2)\notin R_3$

R_3 ليست متماثلة لأنه يوجد $x,y\in\aleph$ بحيث $(x,y)\in R_3 \nRightarrow (y,x)\in R_3$ مثلاً: $(4,5)\in R_3$ لأن

$4+2(5)=14$ بينما $(5,4)\notin R_3$ لأن $5+2(4)\neq 14$

R_3 ليست ناقلة لأنه على سبيل المثال: $(6,4)\in R_3\ ,\ (4,5)\in R_3$ ولكن $(6,5)\notin R_3$

مثال

إذا كانت $R=\left\{(a,b)\in Z\times Z:\dfrac{a+b}{2}\in Z\right\}$ علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z فإن R علاقة تكافؤ على المجموعة Z

البرهان:

العلاقة R عاكسة لأن: $\dfrac{a+a}{2}=a\in Z\ \ \forall a\in Z\Rightarrow (a,a)\in R\,\forall a\in Z$

نفرض أن $(a,b)\in R$ وهذا يعني أن $\dfrac{a+b}{2}\in Z$ ولكن هذا يؤدي إلى أن $\dfrac{b+a}{2}\in Z$ وبالتالي فإن $(b,a)\in R$ وهذا يبرهن أن R علاقة متماثلة

نفرض أن $(b,c)\in R$ ، $(a,b)\in R$ وهذا يعني أن $\dfrac{b+c}{2}=k\in Z$ ، $\dfrac{a+b}{2}=h\in Z$ ولذلك

$\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b+c}{2}=(h+k)\in Z\Rightarrow\dfrac{a+c}{2}=(h+k-b)\in Z\Rightarrow (a,c)\in R$ أي أن R علاقة ناقلة

مما سبق نستنتج أن R علاقة تكافؤ

مبرهنة:

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة A فإن R علاقة متماثلة على A إذا كان وإذا كان فقط $R=R^{-1}$

البرهان:

أولاً:نفرض أن R علاقة متماثلة ونبرهن أن $R=R^{-1}$

$(x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R$ (لأن R متماثلة)

$\Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$

$\Rightarrow R\subseteq R^{-1}$ ....(1)

$(a,b)\in R^{-1}\Rightarrow (b,a)\in R\Rightarrow (a,b)\in R$ (لأن R متماثلة)

$\Rightarrow R^{-1}\subseteq R$ ....(2)

من (1) و(2) نستنتج أن $R=R^{-1}$

ثانياً: نفرض أن $R=R^{-1}$ ونبرهن أن R علاقة متماثلة

$(x,y)\in R\Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$ (لأن $R=R^{-1}$ من الفرض)

$\Rightarrow (y,x)\in R$

$\Rightarrow$ R علاقة متماثلة

مبرهنة:

إذا كان كل من $R\,,Q$ علاقة متماثلة على مجموعة ما فإن $R\cap Q$ هي علاقة متماثلة على هذه المجموعة.

البرهان:

$(x,y)\in R\cap Q\Rightarrow (x,y)\in R\,,(x,y)\in Q\Rightarrow (y,x)\in R\,,(y,x)\in Q$

$\Rightarrow (y,x)\in R\cap Q$

إذاً $R\cap Q$ علاقة متماثلة

مبرهنة:

إذا كانت R علاقة عاكسة، Q أي علاقة حيث العلاقتين R,Q معرفتين على المجموعة A فإن $R\cup Q$ علاقة عاكسة.

البرهان

بما أن R علاقة عاكسة فإن $(x,x)\in R\ \forall x\in A$ ولذلك فإن $(x,x)\in R\cup Q$

إذاً $R\cup Q$ علاقة عاكسة

مثال:

بين ما إذا كان كل من R ، Q علاقة تكافؤ أم لا على المجموعة $\Re$ ؟

$$R=\{(x,y)\in \Re\times\Re : x=y\}\quad ,\quad Q=\{(x,y)\in \Re\times\Re : x<y\}$$

الحـل:

أولاً: بالنسبة العلاقة R.

Rعلاقة عاكسة لأن $x=x$ لكل $x\in\Re$ أي أن $(x,x)\in R\ \forall x\in\Re$

Rعلاقة متماثلة لأنه إذا كان $x=y$ فإن $y=x$ وبالتالي: $(x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R$ لكل $x\in\Re$

R علاقة ناقلة لأنه إذا كان $x=y$ ، $y=z$ فإن $x=z$ أي أنه إذا كان $(x,y)\in R,(y,z)\in R$ فإن $(x,z)\in R$

إذاً R علاقة تكافؤ على المجموعة $\Re$

ثانياً: بالنسبة للعلاقة Q .

Q ليست عاكسة لأن العنصر لا يكون أقل من نفسه

$\therefore$ Q ليست علاقة تكافؤ

لاحظ أن: Q ليست متماثلة لأنه إذا كان $(x,y)\in Q$ فإن $(y,x)\notin Q$ حيث $x<y\not\Rightarrow y<x$ لكل $x,y\in\Re$ وكذلك Q لا انعكاسية لأن $(x,x)\notin Q$ لكل $x\in\Re$

مبرهنة:

العلاقة R المعرفة على المجموعة A تكون متخالفة إذا وإذا كان فقط $R\bigcap R^{-1}\subseteq I_A$

البرهان:

أولاً: نفرض أن R علاقة متخالفة ونبرهن أن $R\bigcap R^{-1}\subseteq I_A$

$$(x,y)\in R\bigcap R^{-1}\Rightarrow(x,y)\in R,(x,y)\in R^{-1}\Rightarrow(x,y)\in R,(y,x)\in R$$
$$\Rightarrow x=y\ \Rightarrow(x,y)\in I_A$$
$$\Rightarrow R\bigcap R^{-1}\subseteq I_A$$

ثانياً: نفرض أن $R\bigcap R^{-1}\subseteq I_A$ ونبرهن أن R علاقة متخالفة

$$(x,y)\in R,(y,x)\in R\Rightarrow(x,y)\in R,(x,y)\in R^{-1}\Rightarrow(x,y)\in R\bigcap R^{-1}$$
$$\Rightarrow(x,y)\in R\bigcap R^{-1}\Rightarrow(x,y)\in I_A\Rightarrow x=y$$

$\therefore$ R علاقة متخالفة

من أولاً وثانياً نستنتج أن R متخالفة إذا وإذا كان فقط $R\bigcap R^{-1}\subseteq I_A$.

مبرهنة:

إذا كانت R علاقة على المجموعة A فإن: R علاقة ناقلة إذا وإذا كان فقط $R\circ R\subseteq R$

البرهان:

أولاً: نفرض أن R علاقة ناقلة ونبرهن أن $R\circ R\subseteq R$

$$(x,z)\in RoR\Rightarrow\exists y\in A:(x,y)\in R,(y,z)\in R$$

بما أن R علاقة نافلة فإن $(x,z)\in R$ ولذلك فإن $RoR\subseteq R$

ثانياً: نفرض أن $R\circ R\subseteq R$ ونبرهن أن Rعلاقة ناقلة

$$(x,y)\in R\,,(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in RoR\Rightarrow(x,z)\in R$$

أي أن Rعلاقة نافلة

تمارين

1) أدرس أنواع العلاقات المعطاة فيما يلي من حيث الانعكاس والتماثل والتعدي

(i) لتكن A مجموعة سكان مدينة زليتن ولتكن R العلاقة المعرفة على A كما يلي:

$$R=\{(x,y): y \text{ أخ } x\}$$

(ii) العلاقة > على مجموعة الأعداد الحقيقية. (iii) علاقة التساوي على مجموعة الأعداد الحقيقية.

(iv) A = مجموعة المثلثات في المستوى ، R هي علاقة التطابق على A .

2) فيما يلي بين ما إذا كانت العلاقات المعطاة علاقات تكافؤ أم لا ؟

(i) $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$ المعرفة على المجموعة $\{1,2,3,4\}$

(ii) R={((e,d , (e,b), (d,e), (d,b), (b,e), (b,d), (c,a), (a,c), (e,e), (d,d), (c,c), (b,b), (a,a}

المعرفة على المجموعة { a,b,c,d,e }

3) ليكن L مجموعة جميع المستقيمات في مستو ولتكن R,Q علاقتين معرفتين كما يلي:

$R=\{(l_1,l_2)\in L \ni l_1$ موازي لـ $l_2\}$ ، $Q=\{(l_1,l_2)\in L \ni l_1$ عمودي على $l_2\}$

برهن أن:

(i) R علاقة تكافؤ على L (افرض أن المستقيم يوازي نفسه) (ii) $Q\circ R=Q$ ، $R\circ Q=Q$ (iii) هل Q علاقة تكافؤ

4) في التمارين التالية كون علاقة لها الخواص المذكورة:

(i) ليست عاكسة (ii) عاكسة فقط (iii) متماثلة فقط (iv) متعدية فقط (v) عاكسة ومتعدية فقط (vi) عاكسة ومتماثلة فقط (vii) متناظرة ومتعدية فقط (viii) علاقة تكافؤ

5) لتكن R علاقة على المجموعة A برهن أنه إذا كانت R علاقة متعدية وعاكسة فإن $R\circ R=R$ ثم وضح ما إذا كان العكس صحيح أم لا؟

6) لتكن R علاقة عاكسة على المجموعة A برهن أن لكل علاقة Q على A فإن $Q\subseteq R\circ Q$ ، $Q\subseteq Q\circ R$

7) لتكن كل من R,Q علاقة على المجموعة A وبفرض أن R علاقة عاكسة، Q علاقة عاكسة ومتعدية.
برهن أن: $R\subseteq Q$ إذا وإذا كان فقط $R\circ Q=Q$

8) لتكن كل من R,Q علاقة تكافؤ على المجموعة A برهن أن $R\circ Q$ علاقة تكافؤ على A إذا وإذا كان فقط

$$R\circ Q=Q\circ R$$

9) لتكن كل من R,Q علاقة تكافؤ على المجموعة A برهن أن $R\cup Q$ علاقة تكافؤ على A إذا وإذا كان فقط $R\circ Q\subseteq R\cup Q$ ، $Q\circ R\subseteq R\cup Q$

10) لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ولتكن Q,T علاقتين على A برهن أن $R\subseteq Q\circ T$ إذا كانت $R\subseteq Q$ ، $R\subseteq T$

11) إذا كان R علاقة تكافؤ على مجموعة A برهن أن $R\circ R=R$

12) لتكن كل من R,Q ، $R\circ Q$ علاقة تكافؤ على المجموعة A برهن أن $R\circ Q=Q\circ R$

13) لتكن S كل الدول في قارة أفريقيا ،عرفت العلاقة R على S كالتالي: $R=\{(A,B):\ B$ تحد بـ $A\}$
هل R علاقة متخالفة؟

14) ليكن $R=\{(a,b)\in\aleph\times\aleph:\ b$ يقسم $a\}$ برهن أن R علاقة عاكسة ومتخالفة.

15) برهن أن المعادلة $(A\cap X)\cup(B\cap X^c)=\phi$ لها حل إذا وإذا كان فقط $B\subseteq A^c$ وأن أي مجموعة X تحقق العلاقة $B\subseteq X\subseteq A^c$ تكون حلاً للمعادلة ،برهن أنه من الممكن التعبير عن X كما يلي: $X=(B\cup T)\cap A^c$ حيث T أية مجموعة

16) أذكر أمثلة لعلاقات R ، Q ، T معرفة على المجموعة Z بحيث تكون R انعكاسية ومتماثلة وليست متعدية ، Q انعكاسية ومتعدية وليست متماثلة ،بينما T متماثلة ومتعدية وليست انعكاسية.

17) ليكن T ، A مجموعتين بحيث $A \subseteq T$ ، $S = P(T)$ فإذا كانت R علاقة معرفة على S كالتالي:
$R = \{(X,Y) : X \cap A = Y \cap A\}$ أثبت أن R علاقة تكافؤ.

18) ليكن $R = \{(x,y) \in \aleph \times \aleph : \exists n \in Z \ni x = 2^n y\}$ برهن أن R علاقة تكافؤ.(حيث $\aleph$ مجموعة الأعداد الطبيعية ، Z مجموعة الأعداد الصحيحة)

19) ليكن R علاقة عاكسة ومتعدية على المجموعة S وليكن
$T = \{(a,b) \in S \times S : (a,b),(b,a) \in R\}$ برهن أن T علاقة تكافؤ.

20) هل علاقة تشابه المثلثات في المستوى تكون علاقة تكافؤ؟ برهن صحة ما تقول ؟

21) برهن أن R علاقة متماثلة إذا وإذا كان فقط $R^{-1} \subseteq R$

22) برهن أن R علاقة متماثلة ومتعدية إذا وإذا كان فقط $R = R^{-1} \circ R$

23) إذا كانت A عائلة من المجموعات ، R علاقة على A معرفة بالجملة المفتوحة (X منفصلة عن Y).
حدد ما إذا كانت R : عاكسة – متماثلة – متخالفة – متعدية – لا انعكاسية – لا متماثلة – لا متعدية

24) برهن أن: $R = \left\{(a,b) \in Z \times Z : \dfrac{a^2 - b^2}{5} \in Z\right\}$ علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة Z

25) برهن أن: $R = \left\{(a,b) \in Z \times Z : \dfrac{a + 2b}{3} \in Z\right\}$ علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة Z

26) ليكن R علاقة متماثلة ومتعدية على المجموعة A وليكن لكل $a \in A$ يوجد $b \in A$ بحيث $(a,b) \in R$ برهن أن R علاقة تكافؤ.

27) ليكن R علاقة متعدية ولا انعكاسية على المجموعة غير الخالية A ،برهن أن R ليست دالة.

28) ليكن A أي مجموعة. أ) هل يوجد أي علاقة عاكسة في A إذا كانت هذه العلاقة تمثل دالة؟
ب) هل يوجد أكثر من علاقة عاكسة في A إذا كانت هذه العلاقة تمثل دالة؟

29) لتكن R علاقة عاكسة على المجموعة B برهن أن R علاقة تكافؤ إذا وإذا كان فقط $(a,b),(a,c) \in R$ يؤدي إلى أن $(b,c) \in R$

30) ليكن Z^+ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وليكن $A = Z^+ \times Z^+$ ،عرفت العلاقة R على A كالتالي: $R = \{((a,b),(c,d)) : ad = bc\}$ برهن أن R علاقة تكافؤ على المجموعة A

تقييد العلاقة

لتكن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ولتكن $C \subseteq A$, $D \subseteq B$.

المجموعة $R \cap (C \times D)$ تسمى بقيد العلاقة R من C إلى D

ملاحظة:

إذا كانت $A = B$, $C = D$ و R علاقة على A فإن $R \cap (C \times C)$ تسمى بقيد العلاقة R على C ونرمز لها بالرمز R/C .

مثال:

لتكن $A = \{x \in \aleph : x$ عدد زوجي$\}$ ، $B = \{x \in \aleph : x$ عدد فردي$\}$ ولتكن $C = \{2,4,6\}$ ، $D = \{1,3,5\}$ فإذا كانت R علاقة من A إلى B معرفة كالآتي:

$R = \{(x,y) \in A \times B : y$ يقبل القسمة على $x\}$ فإن قيد العلاقة R من C إلى D هو المجموعة

$$R \cap (C \times D) = \{(2,1),(4,1),(6,1),(6,3)\}$$

مثال

لتكن $B = \{x \in \aleph : x \leq 16\}$, $A = \{x \in Z : -16 \leq x \leq 16\}$ فإذا كانت R علاقة معرفة على A كالتالي: $R = \{(x,y) \in A \times A : y = x^2 + 1\}$ فإن $R/B = \{(1,2),(2,5),(3,10)\}$

صفوف التكافؤ

لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A وليكن a عنصراً ما في A ،تسمى المجموعة التي عناصرها جميع العناصر في A والتي ترتبط مع العنصر a بالعلاقة R بصف التكافؤ المحتوي على a ويرمز لها بالرمز $[a]$ أو A_a أي أن:

$$A_a = [a] = \{x \in A, (x,a) \in R\}$$
$$= \{y \in A : (a.y) \in R\}$$

مثال:

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ وأن R علاقة معرفة على A كالآتي:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$$

واضح أن R علاقة تكافؤ على A وبهذا تكون صفوف التكافؤ هي:

$[4] = \{4\}$, $[3] = \{1,3\}$ ، $[2] = \{2\}$, $[1] = \{1,3\}$

لاحظ أن: $[1] = [3]$ $\therefore$ صفوف التكافؤ المختلفة هي: $[1],[2],[4]$

مثال:

إذا كانت R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z كالتالي $R=\left\{(x,y):\dfrac{x-y}{4}\in Z\right\}$

فإن R علاقة تكافؤ على Z لأن:

1. $\forall x\in Z,\dfrac{x-x}{4}=0\in Z\Rightarrow (x,x)\in R\,\forall x\in Z$ أي أن R علاقة عاكسه

2. $(x,y)\in R\Rightarrow \dfrac{x-y}{4}=k\in Z\Rightarrow \dfrac{y-x}{4}=-k\in Z\Rightarrow (y,x)\in R$ أي أن R علاقة متماثلة

3.

$$(x,y)\in R,(y,z)\in R\Rightarrow \frac{x-y}{4}=h\in Z\ ,\ \frac{y-z}{4}=k\in Z\Rightarrow \frac{x-y}{4}+\frac{y-z}{4}=h+k\in Z$$
$$\Rightarrow \frac{x-z}{4}=h+k\in Z\Rightarrow (x,z)\in R$$

أي أن R علاقة ناقلة

صفوف التكافؤ هي

$$[0]=\{\ldots\ldots,-8,-4,0,4,8,12,\ldots\ldots\}\ ,\ [1]=\{\ldots\ldots,-7,-3,1,5,9,13,\ldots\ldots\}$$
$$[2]=\{\ldots\ldots,-6,-2,2,6,10,14,\ldots\ldots\}\ ,\ [3]=\{\ldots\ldots,-9,-5,-1,3,7,11,15,\ldots\}$$
$$[4]=\{\ldots\ldots,-8,-4,0,4,8,12,\ldots\ldots\}$$

لاحظ أن: $[0]=[4]$

خواص صفوف التكافؤ

مبرهنة:

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة غير الخالية A وليكن a,b أي عنصرين في المجموعة A

i) $a\in[a]$

ii) إذا كان $b\in[a]\ldots$ فإن $[a]=[b]$

iii) $[a]=[b]$ إذا وإذا كان فقط $(a,b)\in R$

iv) إذا كان $[a]\cap[b]\neq\phi$ فإن $[a]=[b]$

البرهان:

i. من تعريف صف التكافؤ $[a]=\{x\in A:(x,a)\in R\}$ وبما أن R علاقة عاكسة فإن $(a,a)\in R\ \forall a\in A$ وهذا يعني أن $a\in[a]$

ii. $x\in[a]\Rightarrow(x,a)\in R$ وبما أن $b\in[a]$ فإن $(b,a)\in R$ وبما أن R علاقة ناقلة

فإن $(x,b)\in R$

أي أن $x\in[b]$

$$\Rightarrow[a]\subseteq[b]..........(1)$$

$y\in[b]\Rightarrow(b,y)\in R$ وبما أن $b\in[a]$ فإن $(a,b)\in R$ وبما أن R علاقة ناقلة فإن $(a,y)\in R$

أي أن $y\in[a]$

$$\Rightarrow[b]\subseteq[a]..........(2)$$

من (1) (2) نستنتج أنه إذا كان $b\in[a]$ فإن $[a]=[b]$

iii. أولاً: نفرض أن $[a]=[b]$ ونبرهن أن $(a,b)\in R$

من (i) نعلم أن $a\in[a]$ ومن الفرض $[a]=[b]$ ولذلك فإن $a\in[b]$ أي أن $(a,b)\in R$

ثانياً: نفرض أن $(a,b)\in R$ ونبرهن أن $[a]=[b]$

$x\in[a]\Rightarrow(x,a)\in R$ وبما أن $(a,b)\in R$ وكذلك R علاقة ناقلة فإن $(x,b)\in R$

$$\Rightarrow x\in[b]$$
$$\Rightarrow[a]\subseteq[b]....................(1)$$

$$y\in[b]\Rightarrow(b,y)\in R$$
$$(a,b)\in R,(b,y)\in R\Rightarrow(a,y)\in R\Rightarrow y\in[a]$$
$$\Rightarrow[b]\subseteq[a]......................(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $[a]=[b]$

iv) نفرض أن $[a]\cap[b]\neq\phi$ ونبرهن أن $[a]=[b]$

$$x\in[a]\cap[b]\Rightarrow x\in[a],\ x\in[b]\Rightarrow(x,a)\in R\ ,\ (x,b)\in R$$
$$\Rightarrow(a,x)\in R\ ,\ (x,b)\in R\Rightarrow(a,b)\in R$$

من الخاصية iii) نعلم أن $[a]=[b]$ إذا وإذا كان فقط $(a,b)\in R$ ولذلك نستنتج أن $[a]=[b]$

تمارين

1) ليكن $X=\{1,2,3,4,5\}$ ، $Y=\{3,4\}$ ليكن، R علاقة معرفة على $P(X)$ كالتالي:

$$R=\{(A,B):A\cup Y=B\cup Y\}$$

(i) أثبت أن R علاقة تكافؤ　　　(ii) أوجد صفوف التكافؤ لـ $\{1,2\}$

2) لتكن $\Re$ مجموعة الأعداد الحقيقية ،برهن أن كلاً من H,J,K علاقة تكافؤ على المجموعة $\Re\times\Re$

حيث: $H=\{((a,b),(c,d)):b-a=d-c\}$ ، $J=\{((a,b),(c,d)):a+b=c+d\}$

، $K=\{((a,b),(c,d)):a^2+b^2=c^2+d^2\}$ ثم أجب عما يأتي:

(i) أوجد التجزئة المقابلة لكل من H,J

(ii) استعن بالأشكال الهندسية لرسم بعض عناصر كل من التجزئتين

(iii) بين أن $H\cap J$ علاقة التكافؤ وما هي صفوف تكافؤ $H\cap J$ ؟

(iv) برهن أن $H\circ J=J\circ H$ واستنتج أن $H\circ J$ علاقة تكافؤ، وما هي صفوف تكافؤ $H\circ J$ ؟

3) لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A ولتكن $\{A_a\}_{a\in A}$ عائلة جميع صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R برهن أن $\{A_a\}_{a\in A}$ تجزئة للمجموعة A .

4) برهن أنه إذا كانت A مجموعة غير خالية وكانت $\{A_i\}_{i\in I}$ تجزئة للمجموعة A فإنه توجد علاقة تكافؤ على A بحيث أن صفوف التكافؤ بالنسبة إلى هذه العلاقة هي $\{A_i\}_{i\in I}$ نفسها.

5) ليكن $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re:[x]=[y]\}$ برهن أن R علاقة تكافؤ على المجموعة $\Re$ وأن لكل $n\in Z$ يكون فصل تكافؤ n بالنسبة إلى R هو الفترة $[n,n+1)$.

علاقة الترتيب الحدي: Strict order relation

إذا كانت Rعلاقة على المجموعة A فإن R تسمى علاقة ترتيب حدي إذا وإذا كان فقط:

1) R علاقة لا انعكاسية (Irreflexive relation)

2) R علاقة ضد متماثلة (متخالفة)

3) R علاقة متعدية (ناقلة).

مثال:

العلاقة $H=\{(a,b):a<b\}$ المعرفة على المجموعة Z تكون علاقة ترتيب حدي.

علاقة الترتيب الجزئي Partial Order Relation

إذا كانت Rعلاقة على المجموعة A فإن R تسمى علاقة ترتيب جزئي على A إذا كانت:

1. R علاقة عاكسة.
2. R علاقة ضد متماثلة (متخالفة)
3. R علاقة ناقلة.

لاحظ أننا سنستعمل الرمز $\prec$ ليدل على علاقة الترتيب الجزئي على A وكل زوج مرتب (x,y) في العلاقة يكتب بالصورة $x \prec y$ ويقرأ x يسبق y أو y يلي x .

مثال:

ليكن كلا من R_1 ، R_2 علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$R_1 = \{(x,y) \in Z \times Z : x \le y\}$ ، و $R_2 = \{(x,y) \in Z \times Z : 3|(x-y)\}$

واضح أن R_1 علاقة ترتيب جزئي وذلك لأنها علاقة عاكسة ومتخالفة وناقلة.

بينما R_2 ليست علاقة ترتيب جزئي لأنها ليست متخالفة.

مثال:

لتكن X مجموعة غير سالبة ولتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأجزاء $P(X)$ كالتالي:

$$R = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) : A \subseteq B\}$$

واضح أن هذه العلاقة علاقة ترتيب جزئي لأنها علاقة عاكسة وضد متماثلة وناقلة

مبرهنة:

إذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A فإن R^{-1} تكون أيضاً علاقة ترتيب جزئي على A .

البرهان:

نفرض أن R علاقة ترتيب جزئي ونبرهن أن R^{-1} تكون علاقة ترتيب جزئي أي سنبرهن أن R^{-1} علاقة عاكسة ومتخالفة وناقلة

نفرض أن $x \in A$ ،وبما أن R علاقة عاكسة فإن $(x,x) \in R$ ولذلك فإن $(x,x) \in R^{-1}$

$$(x,y) \in R^{-1}, (y,x) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R, (x,y) \in R$$

وبما أن R ضد متماثلة فإن $x = y$ وبهذا نستنتج أن R^{-1} ضد متماثلة

$$(x,y) \in R^{-1} \ ,(y,z) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R, (z,y) \in R$$
$$\Rightarrow (z,x) \in R \Rightarrow (x,z) \in R^{-1}$$

إذاً R^{-1} علاقة ناقلة

$\therefore$ R^{-1} علاقة ترتيب جزئي .

مبرهنة:

لتكن R علاقة على المجموعه غير الخالية A .

R علاقة ترتيب جزئي على A إذا كان فقط $R \circ R = R$ ، $R \cap R^{-1} = I_A$

البرهان:

أولاً: نفرض أن R علاقة ترتيب جزئي على A ونبرهن أن $R\circ R=R$, $R\cap R^{-1}=I_A$

$(x,y)\in R\cap R^{-1}\Rightarrow(x,y)\in R \;\; and \;\; (x,y)\in R^{-1}$

$\Rightarrow(x,y)\in R \;\; and \;\; (y,x)\in R$

بما أن R علاقة متخالفة فإن $x=y$ ولذلك $(x,y)\in I_A$ وبالتالي:

$$R\cap R^{-1}\subseteq I_A \;\;..................(1)$$

بما أن R علاقة عاكسة فإن $(x,x)\in R$ لكل $x\in A$

$\Rightarrow(x,x)\in R\Rightarrow(x,x)\in R^{-1}\Rightarrow(x,x)\in R\cap R^{-1}$

$$\Rightarrow I_A\subseteq R\cap R^{-1} \;\;................(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $R\cap R^{-1}=I_A$

$(x,z)\in R\circ R\Rightarrow\exists y\in A:(x,y)\in R,(y,z)\in R$

بما أن R علاقة ناقلة فإن $(x,z)\in R$ وبالتالي:

$$R\circ R\subseteq R \;\;.........................(3)$$

نفرض أن $(x,y)\in R$ وبما أن R علاقة عاكسة فإن $(x,x)\in R$

$$\Rightarrow(x,y)\in R,(x,x)\in R\Rightarrow(x,y)\in R\circ R$$

$$\Rightarrow R\subseteq R\circ R \;\;...............(4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن: $R\circ R=R$

ثانياً: نفرض أن $R\circ R=R$ و $R\cap R^{-1}=I_A$ ونبرهن أن R علاقة ترتيب جزئي .

$$\forall x\in A,(x,x)\in I_A\Rightarrow(x,x)\in R\cap R^{-1}\Rightarrow(x,x)\in R$$

وهذا يبرهن أن R علاقة عاكسة

$(x,y)\in R,(y,x)\in R\Rightarrow(x,y)\in R,(x,y)\in R^{-1}\Rightarrow(x,y)\in R\cap R^{-1}$

$$\Rightarrow(x,y)\in I_A\Rightarrow x=y$$

أي أن R علاقة متخالفة

$(x,y)\in R,(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R\circ R\Rightarrow(x,z)\in R$

إذاً R علاقة ناقلة

مما سبق نستنتج أن R علاقة ترتيب جزئي

من أولاً وثانياً نستنتج أن: R علاقة ترتيب جزئي على A إذا كان فقط

$$R\cap R^{-1}=I_A \quad , \quad R\circ R=R$$

المجموعات المرتبة جزئياً

لتكن A مجموعة غير خالية ولتكن R علاقة على المجموعة A.

الثنائي (A,R) يسمى مجموعة مرتبة جزئياً إذا كان R علاقة ترتيب جزئي على A .

مثال:

مجموعة الأعداد الصحيحة Z تكون مرتبة جزئياً بالعلاقة $\leq$ وأيضاً مجموعة الأجزاء $P(X)$ تكون مرتبة جزئياً بالعلاقة $\subseteq$ أي أن $(Z,\leq)$, $(P(X),\subseteq)$ هي مجموعات مرتبة جزئياً.

مخطط هاس Hasse diagram

لتكن A مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً بالعلاقة R، وليكن $a,b\in A$ بحيث $(a,b)\in R$ فإننا نمثل ذلك كالتالي:

$a\longrightarrow b$ حيث نمثل a,b بنقطتين ونرسم سهماً يبدأ من a وينتهي في b .

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,4,6\}$ و $R=\{(x,y)\in A\times A: x\leq y\}$ فإن مخطط هاس للمجموعة (A,R) هو

$$1\longrightarrow 2\longrightarrow 4\longrightarrow 6$$

القطعة البدائية (الابتدائية): Initial segment

تعريف

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة $\leq$ وليكن $a\in A$.

القطعة البدائية من A والمحدودة بـــ a هي المجموعة الجزئية $S_a=\{x\in A: x<a\}$

ملاحظة:

لتكن (A,R) مجموعة مرتبة جزئياً.

إذا كانت S قطعة إبتدائية من A و T قطعة إبتدائية من S فإن T قطعة ابتدائية من A .

أصغر عنصر Least element

تعريف:

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة R. يسمى العنصر b في المجموعة A بأصغر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R إذا وإذا فقط كان $(b,x)\in R\ \forall x\in A$.

مثال:

لتكن $A=\{2,4,6,8,10\}$ وليكن كل من R_3,R_1,R_1 علاقة معرفة على A كالتالي:

$R_1=\{(x,y)\in A\times A: x\le y\}$ ، $R_2=\{(x,y)\in A\times A: x\ge y\}$ ،

$R_3=\{(x,y)\in A\times A:$ x يقبل القسمة على $y\}$

فتكون كلاً من R_3,R_2,R_1 علاقة ترتيب جزئي على A ويكون العدد 2 أصغر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لأن $2\le x,\forall x\in A$ أي أن: $(2,x)\in R_1,\forall x\in A$

والعدد 10 هو أصغر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R_2 وذلك لأن: $10\ge x,\forall x\in A$ أي أن:

$(10,x)\in R_2\ \ \forall x\in A$

وكذلك العدد 2 أصغر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R_3 وذلك لأن كل عنصر في A يقبل القسمة على 2 أي أن: $(2,x)\in R_3\ \forall x\in A$

مثال:

لتكن A مجموعة الأعداد الطبيعية $\aleph$ ولتكن R علاقة معرفة على A كالتالي:

$R=\{(x,y)\in\aleph\times\aleph: x\le y\}$

واضح أن R علاقة ترتيب جزئي على A والعدد 1 هو أصغر عنصر في $\aleph$ بالنسبة للعلاقة R وذلك لأن:

$1\le a\ \forall a\in\aleph$ أي أن $(1,a)\in R\ \forall a\in\aleph$

مثال:

لتكن X مجموعة ولتكن R علاقة معرفة على $P(X)$ كالتالي:

$R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X): A\subseteq B\}$

المجموعة الخالية هي أصغر عنصر بالنسبة للعلاقة R لأن $\forall A\in P(X),\phi\subseteq A$

مثال

لتكن $R=\{(x,y)\in\aleph\times\aleph : x|y\}$

العدد 1 هو أصغر عنصر في المجموعة $\aleph$ لأن كل الأعداد الطبيعية تقبل القسمة على العدد 1 أي أن

$(1,x)\in R\ \ \forall x\in\aleph$

مبرهنة

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة R .

إذا احتوت المجموعة A على أصغر عنصر فإن هذا العنصر يكون وحيداً .

البرهان

نفرض أن كلا من x,y عنصر أصغر في المجموعة A .

من تعريف العنصر الأصغر يكون $(x,y)\in R,(y,x)\in R$

بما أن R علاقة متخالفة فإن $x=y$ ولذلك نستنتج أن العنصر الأصغر وحيد .

أكبر عنصر greatest element

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة R.

يسمى العنصر a في المجموعة A بالعنصر الأكبر إذا وإذا كان فقط $(x,a)\in R\ \ \forall x\in A$

مثال

لتكن $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ وليكن كل من R_1,R_2,R_3 علاقة معرفة على A كالتالي:

$R_1=\{(x,y)\in A\times A : x\le y\},\ \ R_2=\{(x,y)\in A\times A : x\ge y\}$

$R_3=\{(x,y)\in A\times A : x|y\}$

واضح أن كلاً من R_1,R_2,R_3 تكون علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A ويكون 10 أكبر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لأن $x\le 10,\forall x\in A$ أي أن $(x,10)\in R_1,\forall x\in A$ ويكون 2 أكبر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R_2 وذلك لأن $x\ge 2,\forall x\in A$ أي أن $(x,2)\in R_2,\forall x\in A$

أما بالنسبة للعلاقة R_3 فإنه لا يوجد عنصر أكبر لأنه لا يوجد عنصر في A يقبل القسمة على جميع عناصرها

مبرهنة

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة R .

إذا احتوت المجموعة A على أكبر عنصر فإن هذا العنصر يكون وحيداً .

البرهان: يترك تمرين للطالب

العنصر الأعظمي maximal element

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة R، يسمى العنصر m في المجموعة A بالعنصر الأعظمي في المجموعة A بالنسبة للعلاقة R إذا كان لا يوجد أي عنصر x في A بحيث $m \neq x\ ,\ (m,x) \in R$

يرمز للعنصر الأعظمي في المجموعة A بالرمز $\max A$.

مثال:

ليكن $A=\{3,6,8,7,12,13,18\}$ وليكن كلاً من R_1، R_2، R_3 علاقات معرفة على A كالآتي:

$$R_1=\{(x,y)\in A\times A : x \geq y\}\ \ ,\ \ R_2=\{(x,y)\in A\times A : x \leq y\}$$

$$\mathrm{R}_3=\{(x,y)\in A\times A : x \text{ يقبل القسمة على } y\}$$

واضح أن كلا من R_3,R_2,R_1 تكون علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A .

العدد 3 هو عنصر أعظمي في A بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لأنه لا يوجد أي عنصر x في A بحيث $x \neq 3$ ، $3 \geq x$.

والعدد 18 هو عنصر أعظمي في A بالنسبة للعلاقة R_2 وذلك لأنه لا يوجد أي عنصر x في A بحيث $18 \neq x$ ، $18 \leq x$.

بالنسبة للعلاقة R_3 العدد 7 يكون عنصراً أعظيماً في A لأنه لا يوجد أي عنصر x يقبل القسمة على 7 وفي الوقت نفسه $7 \neq x$ ولنفس السبب يكون كلاً من الأعداد 8,12,13,18 عنصراً أعظمياً في A بالنسبة للعلاقة R_3 .

ملاحظة:

كل عنصر أكبر هو عنصر أعظمي ولكن العكس غير صحيح .

العنصر الأصغري minimal element

تعريف:

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة R، يسمى العنصر n في المجموعة A عنصراً أصغرياً في المجموعة A بالنسبة للعلاقة R إذا كان لا يوجد أي عنصر x في A بحيث $x \neq n\ ,(x,n) \in R$

يرمز للعنصر الأصغري في المجموعة A بالرمز $\min A$.

مثال:

ليكن $A=\{3,5,9\}$ وأن كلاً من R_1 ، R_2 ، R_3 علاقة معرفة على المجموعة A حيث:

$$R_1=\{(x,y)\in A\times A: x\leq y\},\ R_2=\{(x,y)\in A\times A: x\geq y\},\ R_3=\{(x,y)\in A\times A: x|y\}$$

فإن كلاً من R_1 ، R_2 ، R_3 علاقة ترتيب جزئي على A ،وأن العدد 3 عنصراً أصغرياً بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لأنه لا يوجد x في A بحيث $x\leq 3$, $x\neq 3$

والعدد 9 عنصر أصغري بالنسبة للعلاقة R_2 وذلك لأنه لا يوجد أي عنصر x في A بحيث $x\geq 9$ ، $x\neq 9$

والعدد 3 عنصرا أصغري بالنسبة للعلاقة R_3 وذلك لأنه لا يوجد عنصر x في A بحيث 3 يقبل القسمة على x ،و $x\neq 3$ وكذلك يكون العدد 5 عنصراً أصغرياً في A بالنسبة لـ R_3 أي أن كلاً من العددين 3,5 عنصراً أصغرياً بالنسبة لـ R_3 .

ملاحظات:

- أصغر عنصر في المجموعة هو عنصر أصغري ولكن العكس غير صحيح .
- كل مجموعة منتهية مرتبة جزئياً لها عل الأقل عنصر أعظمي وعلى الأقل عنصر أصغري.
- إذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A فإن في المجموعة (A,R) يكون $x\prec y$ إذا وإذا كان فقط في المجموعة (A,R^{-1}) يكون $y\prec x$ وعليه فإن $a\in A$ عنصراً أصغرياً في (A,R) إذا وإذا كان فقط a عنصراً أعظمياً في (A,R^{-1}) وأيضاً يكون b أكبر عنصر في (A,R) إذا وإذا كان فقط b أصغر عنصر في (A,R^{-1}).

تعريف:

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن B مجموعة جزئية من المجموعة A . يسمى عنصر a في المجموعة A :

1 - حداً أعلى للمجموعة B في A إذا حقق الشرط: لكل x في B يكون $(x,a)\in R$ وفي هذه الحالة نقول أن B محدودة من أعلى.

2 - حداً أدنى للمجموعة B في A إذا حقق الشرط: لكل $x\in B$ يكون $(a,x)\in R$ وفي هذه الحالة نقول أن B محدودة من أسفل.

المجموعة المحدودة

تعريف:

نقول عن مجموعة A أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل

مثال:

لتكن $\Re$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re : x\leq y\}$ وليكن $B=\{2,3\}$

واضح أن $5\in\Re$ حداً أعلى للمجموعة B ، و $1\in\Re$ حداً أدنى للمجموعة B

مثال:

إذا كانت X مجموعة و R علاقة معرفة على $P(X)$ كالتالي:

$R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X): A\subseteq B\}$ فإن المجموعة الخالية هي أصغر عنصر في $P(X)$ بالنسبة للعلاقة

R

مثال:

إذا كانت $A=\{3، 5، 10، 12، 30\}$ ، و $R=\{(x,y)\in A\times A: x|y\}$ ، و $B=\{5، 10\}$ فإن $30\in A$

حد أعلى للمجموعة B ، $5\in A$ حد أدنى للمجموعة B .

مثال:

المجموعة $\aleph\subseteq\Re$ لها حد أدنى مثلاً 0 أو 1 فهي بالتالي محدودة من الأسفل ويوجد لها عنصر أصغري هو

1

ولكننا لا نستطيع إيجاد عدد حقيقي أكبر من كل عناصر $\aleph$ وبالتالي فإن $\aleph$ ليست محدودة من الأعلى.

أصغر حد علوي supermum

تعريف:

لتكن B جزئية من A ، يسمي العنصر x في A أصغر حد أعلى للمجموعة B في A إذا كان:

1- x هو حد أعلى للمجموعة B .

2- أن يكون x هو أصغر الحدود العليا للمجموعة B

يرمز لأصغر حد علوي للمجموعة B بالرمز $\sup B$ أو $\text{lub}\, B$

أكبر حد سفلي infemum

تعريف:

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن B مجموعة جزئية من A يسمى العنصر x أكبر حد أدنى للمجموعة B في A إذا كان:

1- x هو حد أدنى للمجموعة B.

2- أن يكون x هو أكبر الحدود العليا للمجموعة B

يرمز لأكبر حد أدنى للمجموعة B بالرمز $\inf B$ أو $\operatorname{glb} B$

ملاحظة:

لاحظ الاختلاف بين $\sup B$ ، $\max B$ وكذلك بين $\inf B$ ، $\min B$ ففي حالة العنصر الأعظمي $\max B$ والعنصر الأصغري $\min B$ فهما عنصران في المجموعة B ولكن $\inf B$, $\sup B$ ليس بالضرورة أن يكونا عنصرين في المجموعة B، والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال:

لأي عددين a,b في $\Re$ حيث $a<b$ لاحظ أن:

$b=\sup[a,b]=\sup(a,b)=\sup(a,b]$ وكذلك: $b=\max(a,b]=\max[a,b]$

بينما $\max(a,b)$ غير موجود وأن $b=\sup(a,b)$ ليس عنصراً في (a,b)

لاحظ أن: $0=\inf[0,1]=\inf(0,1)=\inf[0,1)$ وكذلك: $0=\inf[0,1]=\min[0,1]$

بينما $\min(0,1)$ غير موجود وأن $\inf(0,1)$ لا تنتمي للفترة $(0,1)$.

لاحظ أيضاً: $\inf \aleph=1$ ولكن $\sup\aleph$ غير موجود لأن المجموعة $\aleph$ ليست محدودة من أعلى وكذلك المجموعات $Z,Q,\Re$ ليس لها أكبر حد أدنى ولا أصغر حد أعلى .

مثال:

إذا كان E مجموعة جزئية من $\Re$ معرفة كما يلي: $E=\{x\in Q:0\le x<\sqrt{3}\}$

فإن $\sup E=\sqrt{3}$ ، $\inf E=0$

لاحظ أن: $\sup E\notin E$ ، $\inf E\in E$

لاحظ كذلك أن $\sup E=\sqrt{3}$ له صيغة مختلفة فهو عدد غير قياسي بينما عناصر E كلها أعداد قياسية.

ملاحظات:

ليكن A مجموعة مرتبة جزئياً وليكن $B \subseteq A$.

i. إذا كان $\sup E$ موجود فإنه يكون وحيد ،و كذلك إذا كان $\inf B$ موجود فهو وحيد.

ii. b يكون حد أعلى للمجموعة B في $(A، \prec)$ إذا وإذا كان فقط b حد أدنى للمجموعة B في $(A، \succ)$.

iii. $b = \sup B$ في $(A، \prec)$ إذا وفقط إذا كان $b = \inf B$ في $(A، \succ)$.

تعريف:

لتكن (A, R) مجموعة مرتبة جزئياً يقال بأن (A, R) مكتمل إذا وفقط إذا كان كل مجموعة جزئية B محدودة من أعلى لها أصغر حد علوي. أي أن $\sup B$ موجود.

مثال:

ليكن $\Re$ مجموعة الأعداد الحقيقية فإن $(\Re, \leq)$ مكتمل

المجموعات المرتبة كلياً

تعريف:

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً فيقال عن العنصرين x, y في A أنهما قابلين للمقارنة إذا كان $x \prec y$ أو $y \prec x$ ، وماعدا ذلك فإنهما يسميان غير قابلين للمقارنة.

مثال:

لتكن $R = \{(x, y) \in Z \times Z : x|y\}$ فإنه ليس كل عنصرين في Z يكونان قابلين للمقارنة فمثلاً:

العددين 2,7 غير قابلين للمقارنة حيث: 2 لا يقبل القسمة على 7 وكذلك 7 لا تقبل القسمة على 2

مثال:

إعتبر المجموعة المرتبة جزئياً $(Z, \leq)$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

لآحظ أن كل عنصرين في Z يكونان قابلين للمقارنة وذلك لأن $x \leq y$ أو $y \leq x$.

تعريف:

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن B مجموعة جزئية من A ،فإذا كان كل عنصرين في B قابلين للمقارنة فتسمى B مجموعة جزئية مرتبة كلياً. وإذا كان كل عنصرين في A قابلين للمقارنة فتسمى A مجموعة مرتبة كلياً

مثال:

$(Z,\le)$ مجموعة مرتبة كلياً لأنها تحقق مايلي:

1 - $(Z,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

2 - كل عنصرين في Z قابلين للمقارنة.

مثال:

ليكن $B=\{2,4,8\}$, $A=\{1,2,3,4,5,6,8\}$ ولتكن $R=\{(x,y)\in A\times A : x|y\}$

لاحظ أنه ليس كل عنصرين في A قابلين للمقارنة بينما كل عنصرين في B قابلين للمقارنة.

إذاً (A,R) غير مرتبة كلياً بينما (B,R) مجموعة مرتبة كلياً

ملاحظة:

كل مجموعة جزئية من مجموعة مرتبة كلياً تكون أيضاً مرتبة كلياً.

المجموعات المرتبة ترتيباً حسناً

تعريف

لتكن R علاقة ترتيب جزئي علي المجموعة A.

يقال بأن A مرتبة ترتيباً حسناً إذا وإذا كان فقط لكل مجموعة جزئية غير خالية من A أصغر عنصر .

مبرهنة:

تكون كل مجموعة مرتبة ترتيباً حسناً مرتبة ترتيباً كلياً

البرهان: يترك تمرين للطالب

مثال:

إذا كان $A=\{2,3,4,5,6\}$، $R=\{(x,y)\in A\times A : x\le y\}$ فإن المجموعة A مرتبة ترتيباً حسناً.

مثال:

إذا كان $\aleph=\{1,2,3,.........\}$ ، $R=\{(x,y)\in \aleph\times\aleph : x\le y\}$ فإن المجموعة $\aleph$ مرتبة ترتيباً حسناً.

مثال:

لا تكون مجموعة الأعداد الصحيحة Z مرتبة ترتيباً حسناً لأنه ليس لكل مجموعة جزئية من Z أصغر عنصر

مثلاً: $Z \supseteq A=\{.....,-3,-2,-1,0,1\}$ ليس لها أصغر عنصر .

مبرهنة:

كل مجموعة مرتبة ترتيباً حسناً مرتبة ترتيباً كلياً

البرهان

لتكن A مجموعة مرتبة ترتيباً حسناً وليكن $x, y \in \mathrm{A}$ وليكن $B = \{x, y\} \subseteq A$

إذاً للمجموعة B أصغر عنصر والذي هو إما x أو y لذلك فيكون كل عنصرين في A قابلين للمقارنة ولذلك فإن A مرتبة ترتيباً كلياً.

تمارين

1- بين ما إذا كان كل من العلاقات الآتية على Z تكون علاقة تكافؤ أو علاقة ترتيب جزئي أو علاقة ترتيب كلي أو علاقة ترتيب حدي أو لا تكون أي نوع من الأنواع المذكورة:

1. $R = \{(x, y) : x + y \in \mathbb{R}\}$
2. $R = \{(x, y) : xy > 0\}$
3. $R = \{(x, y) : x + y < 2\}$
4. $R = \{(x, y) : x = y\}$
5. $R = \{(x, y) : x < y\}$
6. $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

2- بين ما إذا كان كل من العلاقات الآتية في Z علاقة تكافؤ أو علاقة ترتيب جزئي أو علاقة ترتيب كلي أو علاقة ترتيب حدي أو خلاف ذلك:

1. $R = \{(x, y) : x - y$ عدد زوجي$\}$
2. $R = \{(x, y) : xy \geq 0\}$
3. $R = \{(x, y) : x < y\}$
4. $R = \{(x, y) : x \leq y\}$
5. $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$
6. $R = \{(x, y) : 2x + y = 10\}$