مسائل محلولة في المتتابعات (المتتاليات) والمتسلسلات

1. بين ما إذا كانت المتتابعة التالية تزايدية أو تناقصية: $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$

الحل

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{3n+4} - \frac{2n}{3n+1} = \frac{(3n+1)(2n+2) - 2n(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)} = \frac{2}{(3n+4)(3n+1)} > 0$$

أي أن $a_{n+1} > a_n \forall n$ وهذا يعني أن المتتابعة تزايدية

2. بين ما إذا كانت المتتابعة $a_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}}$ تزايدية أو تناقصية

الحل

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}} - \frac{n!}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{2^{n+2}} - \frac{n!}{2^{n+1}} = \frac{n!}{2^{n+2}}(n-1) > 0 \quad \forall n > 1$$

وبالتالي فإن المتتابعة تزايدية لكل $n > 1$

3. أثبت أن المتتالية $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^5 + n^2 + 1}}{n^2 + 2}$ متقاربة

الحل

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5 + n^2 + 1}}{n^2 + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$\therefore$ المتتالية متقاربة

فيما يلي بين ما إذا كانت المتتاليات التي حدها العام a_n متقاربة أو متباعدة:

4. $a_n = \tan^{-1} n$

الحل

$\lim_{n\to\infty} \tan^{-1} n = \dfrac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن المتتالية متقاربة

5. $a_n = (-1)^n n^3 3^{-n}$

الحل

$$a_n = (-1)^n \frac{n^3}{3^n} \Rightarrow |a_n| = \frac{n^3}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3^n\ln 3} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n}{3^n(\ln 3)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{3^n(\ln 3)^3} = 0$$

$\therefore$ المتتالية متقاربة

6. اثبت أن المتتالية $a_n = \sqrt[n]{n}$ متقاربة.

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$$

نفرض أن $y = n^{\frac{1}{n}}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين نجد أن $\ln y = \ln n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln = \frac{\ln n}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\ln y = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} y = e^0 = 1$$

إذاً المتتالية متقاربة

ادرس تقارب أوتباعد المتسلسلات التالية باستخدام طريقة المجاميع الجزئية:

7. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

الحل

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}), S_2 = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{5}) \;,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{5}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{7}) \;,\; S_4 = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{7}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{9}),\ldots,$$

$$S_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ المتسلسلة متقاربة

8. $$\frac{1}{4\times 5} + \frac{1}{5\times 6} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

الحل

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{(n+4)}$$

$$S_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \;,\; S_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6},$$

$$S_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\ ,\ S_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8},\ldots\ldots,S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}\right)=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.9 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

الحل

المتسلسلة المعطاة هي: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

$$S_1=\frac{1}{2},S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4},S_3=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{8},S_4=\frac{7}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=1-\frac{1}{16},\ldots\ldots,$$

$$S_n=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

إذاً المتسلسلة متقاربة

.10 $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

الحل

$$S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow S_n=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=1$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.11 $1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n+\ldots\ldots$

الحل

$$S_1=1=\frac{1\times 2}{2},S_2=1+2=\frac{2\times 3}{2},S_3=1+2+3=6=\frac{3\times 4}{2},$$

$$S_4=1+2+3+4=10=\frac{4\times 5}{2},\ldots\ldots\ldots,S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2}=\infty$$

$\therefore$ المتسلسلة متباعدة

ادرس تقارب أوتباعد المتسلسلتين التاليتين باستخدام اختبار الحد العام:

.12 $$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

الحـــل

$$a_n=\frac{n}{n+1},\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ متباعدة

.13 $$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

الحـــل

الحد العام للمتسلسلة هو $a_n=\frac{n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ متباعدة

باستخدام اختبار المقارنة حدد ما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة:

.14 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-1}$$

الحـــل

$$3^n-1>3^{n-1}\quad\forall n\geq 1$$

$$\therefore\frac{1}{3^n-1}<\frac{1}{3^{n-1}}$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{1}{3}$

إذاً المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-1}$ متقاربة أيضاً.

.15 $$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^3+\frac{1}{4}(\frac{1}{4})^4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

الحـــل

الحد العام للمتسلسلة هو $a_n=\frac{1}{n}(\frac{1}{4})^n$

بما أن $\frac{1}{n}(\frac{1}{4})^n \le (\frac{1}{4})^n \quad \forall n \ge 1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{4})^n \le \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n$ وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n$ متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{1}{4}$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{4})^n$ متقاربة أيضا

.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$

الحل

بما أن $\forall n \ge 1 \quad n2^n \ge 2^n \Leftrightarrow \frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n}$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}<1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ متقاربة.

.17 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2$

الحل

بما أن $n^2 \ge n$ لكل $n \ge 1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 \ge \sum_{n=1}^{\infty}n$ وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}n$ متسلسلة متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}n^2$ متباعدة أيضاً.

باستخدام اختبار التكامل حدد ما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة:

.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

الحل

المتسلسلة متقاربة لأن $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left.\frac{-1}{x}\right|_1^t=\lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{t}+1)=1$

.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

الحل

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{t\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{1/(x+1)}{\ln(x+1)}dx=\lim_{t\to\infty}\ln\ln(x+1)\Big|_1^t=\lim_{t\to\infty}\ln(\ln(t+1))-\ln(\ln 2)=\infty$$

إذاً المتسلسلة متباعدة

.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$

الحل

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{3x-2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{3x-2}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{3}\ln(3x-2)\Big|_1^t=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{3}\ln(3t-2)-\frac{1}{3}\ln 1=\infty$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$ متباعدة

.21 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

الحل

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-x^2})\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.22 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^{1/5}$

الحل

$$\int_1^{\infty}(\frac{1}{x})^{1/5}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} x^{-1/5}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{5}{4}x^{4/5}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{5}{4}t^{4/5} - \frac{5}{4} = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^{1/5}$ متباعدة

باستخدام اختبار النسبة حدد ما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة:

.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{8^n}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{8^{n+1}}\cdot\frac{8^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{8n} = \frac{1}{8} < 1$$ المتسلسلة متقاربة لأن

.25 $\frac{1}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

الحل

المتسلسلة متباعدة لأن $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{10} = \infty$

.26 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1$$

∴ اختبار النسبة فشل في تحديد تقارب أو تباعد هذه المتسلسلة (لاحظ أن هذه المتسلسلة قد سبق أن أثبتنا أنها متباعدة في التمرين رقم 20)

.27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4 e^{-(n^2+2n+1)}}{n^4 e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 e^{-2n-1} = 0 < 1$$

إذاً المتسلسلة متقاربة

.28 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n^{99}}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(3(n+1))!}{(n+1)^{99}}\cdot\frac{n^{99}}{(3n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)!\,n^{99}}{(n+1)^{99}(3n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(3n+3)(3n+2)(3n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{99} = \lim_{n\to\infty}(3n+3)(3n+2)(3n+1)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{99} = \infty$$

∴ المتسلسلة متباعدة

.29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^{n-1}}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

∴ المتسلسلة متقاربة

باستخدام اختبار المقارنة بالنهاية حدد ما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة:

.30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n+1}$

الحـل

نفرض أن $a_n=\frac{n^2+1}{n^3+n+1}$ و $b_n=\frac{1}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n+1}.n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n}{n^3+n+1}=1>0$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n+1}$ متباعدة لأن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة

.31 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)^{1/5}}$

الحـل

نفرض أن $a_n=\frac{n}{(n^2+1)^{1/5}}$ و $b_n=n^{3/5}=\frac{1}{n^{-3/5}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n^2+1)^{1/5}}.n^{-3/5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/5}}{(n^2+1)^{1/5}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2}{n^2+1})^{1/5}=(1)^{1/5}=1$$

وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-3/5}}$ متباعدة لأن $P=\frac{-3}{5}<1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)^{1/5}}$ تكون متباعدة

.32 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+n}$

الحـل

نفرض أن $a_n=\frac{5}{n^2+n}$ و $b_n=\frac{1}{n^2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2+n}.n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{n^2+n}=5>0$$

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة لأنها متسلسلة p حيث $p=2>1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+n}$ متقاربة أيضاً

باستخدام اختبار الجذر حدد ما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة:

.33 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$

الحـل

بما أن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{2n+1})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$ فإن المتسلسلة متقاربة

.34 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n}$

الحل

بما أن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{10^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n^{1/n}}=10>1$ فإن المتسلسلة متباعدة

.35 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

الحل

بما أن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$ فإن المتسلسلة متقاربة

.36 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

الحل

بما أن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$ فإن المتسلسلة متقاربة

.37 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{n^n}$

الحل

بما أن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^{n+1}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{1+\frac{1}{n}}}{n}=0<1$ فإن المتسلسلة متقاربة

باستخدام أي اختبار تراه مناسباً حدد ما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة:

.38 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+2}{n^3+2}$

الحل

هذه متسلسلة متناوبة ولكي نطبق عليها اختبار المتسلسلة المتناوبة يجب أن نبين أن:

$a_n \ge a_{n+1}$ لكل n و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

لاحظ أنه لإثبات أن $a_n \ge a_{n+1}$ لكل n يجب أن نبرهن تحقق احدى الحالات الثلاثة التالية:

(i) $a_n - a_{n+1} \ge 0$ (ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$ (iii) $f'(n)<0$

$$f(n)=\frac{n^2+2}{n^3+2}\Rightarrow f'(n)=\frac{(n^3+2)(2n)-(n^2+2)(3n^2)}{(n^3+2)^2}$$

$$= \frac{-n^4 - 6n^2 + 4n}{(n^3+2)^2} = \frac{4n - (n^4 + 6n^2)}{(n^3+2)^2} < 0 \Rightarrow a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^3+2} = 0$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.39 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$

الحـــل

$$n! \leq (n+1)! \ \forall n \quad \Rightarrow \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.40 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

الحـــل

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \quad ، \quad 2n-1 \leq 2n+1 \Rightarrow \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.41 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

الحـــل

$$n \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \quad \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.42 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{5/2}+1}$

الحـــل

$$n^{5/2} \le n^{5/2}+1 \Rightarrow \frac{1}{n^{5/2}} \ge \frac{1}{n^{5/2}+1} \Rightarrow a_n \ge a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{5/2}+1} = 0$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة

.43 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$

الحل

$$f(x)=\frac{1}{x+3} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x+3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x+3} = \lim_{t\to\infty} \ln(x+3)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln(t+3) - \ln 4 = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة متباعدة

.44 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+5}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+1}{k^2+5} = 1 \ne 0$$

$\therefore$ المتسلسلة متباعدة

.45 $\sum_{k=1}^{\infty} [(\frac{1}{2})^k + \frac{k-1}{2k+1}]$

الحل

المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$ متقاربه لأنها متسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}$ والمتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2k+1}$ متباعدة لأن: $\lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{2k+1} = \frac{1}{2} \ne 0$ ولذلك فإن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} [(\frac{1}{2})^k + \frac{k-1}{2k+1}]$ متباعدة

.46 $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2^k})$

الحل

المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ متسلسلة p وهي متقاربة لأن $p=2>1$ والمتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}<1$ ولذلك فإن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2^k})$ متقاربة

.47 $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{1}{k}$

الحل

المتسلسلة متباعدة لأن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} k\sin\frac{1}{k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1 \neq 0$

.48 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2n+3}$

الحل

نفرض $a_n = \frac{n}{n^2+2n+3}$ ، و $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2n+3}.n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+3} = 1$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2n+3}$ متباعدة لأن المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة

.49 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

الحل

نفرض أن $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ ، و $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}.n^{3/2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/2}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{1/2} = 1$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ متقاربة لأن المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة

.50 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

الحل

المتسلسلة المتناوبة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ متقاربة لأن $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, $a_{n+1} \le a_n \ \forall n$

.51 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

الحل

$$f(n) = \frac{n}{n^2+1}\ , f'(n) = \frac{(n^2+1)(1)-n(2n)}{(n^2+1)^2} = \frac{1-n^2}{(n^2+1)^2} < 0\ \forall n > 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \le |a_n|\ \forall n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$ ولذلك فإن المتسلسلة متقاربة

.52 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-3}{4})^n$

الحل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-3}{4})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{3}{4})^n$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n$ متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها r حيث $|r|=\frac{3}{4}<1$ ولذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-3}{4})^n$ متقاربة تقارباً مطلقاً

.53 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{n}{10n+1}$

الحل

$\sum_{n=1}^{\infty}(1-)^{2n}\frac{n}{10n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+1}$ وبما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10n+1}=\frac{1}{10}$ فإن المتسلسلة متباعدة

.54 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$

الحل

المتسلسلة متقاربة شرطاً لأن $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ متقاربة بينما $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ متباعدة . لماذا ؟

.55 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$

الحل

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ وهي متسلسلة متقاربة لأنها متسلسلة P حيث $P=3/2=1.5>1$

.56 $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

الحل

المتسلسلة متباعدة لأن $\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$

يسرني أن أتقدم بجزيل الشكر والتقدير للأستاذ: مصطفى عبد الرحمن العجوري على مجهوده الذي بذله في طباعة هذه المجموعة من التمارين. .... أ.مجيد أحمد محمودة