جبر المجموعات

اتحاد مجموعتين:

تعريف:

إذا كان كلاً من B, A مجموعة فإن اتحاد المجموعتين B, A هي جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو B أو كيلهما ونعبر عن ذلك بالرمز $A \bigcup B$ أي أن: $A \bigcup B = \{x : x \in A \ or \ x \in B\}$

تقاطع مجموعتين:

تعريف:

إذا كان كلاً من B, A مجموعة فإن تقاطع المجموعتين B, A هو جميع العناصر المشتركة بينهما ونرمز لذلك بالرمز $A \bigcap B$ أي أن $A \bigcap B = \{x : x \in A \ and \ x \in B\}$

الفرق بين مجموعتين:

تعريف:

إذا كان B, A مجموعتين فإن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B تسمى بالفرق بين المجموعتين B, A ونرمز لها بالرمز $A - B$ أي أن

$A - B = \{x : x \in A \ and \ x \notin B\}$

مكملة المجموعة:

تعريف:

إذا كانت A مجموعة فإن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة U ولا تنتمي إلى A تسمى بمكملة A ونرمز لها بالرمز A^c أي أن $A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$ أي أن $A^c = \{x : x \notin A\}$

الفرق التماثلي (الفرق التناظري)

تعريف:
إذا كان B,A مجموعتين فإن اتحاد المجموعتين $A-B$ ، $B-A$ يعرف بالفرق التماثلي للمجمـــوعتين A,B ونعبر عن ذلك رمزياً $A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)$

مبرهنة:
إذا كان B,A أي مجموعتين فإن:
1) $B\subseteq A\bigcup B$ 2) $A\subseteq A\bigcup B$ 3) $A\subseteq B\leftrightarrow A\bigcup B=B$

البرهان
1) $x\in B\Rightarrow x\in A\bigcup B\Rightarrow B\subseteq A\bigcup B$
2) $x\in A\Rightarrow x\in A\bigcup B\Rightarrow A\subseteq A\bigcup B$
3) أولاً: نفرض أن $A\subseteq B$ ثم نبرهن أن $A\bigcup B=B$

$$x\in A\bigcup B\Rightarrow x\in A\ or\ x\in B$$
$$\Rightarrow x\in B\ or\ x\in B \quad (\text{لأن } A\subseteq B)$$
$$\Rightarrow x\in B$$
$$\Rightarrow A\bigcup B\subseteq B \ ....(1)$$
$$y\in B\Rightarrow y\in A\bigcup B\Rightarrow B\subseteq A\bigcup B \ ....(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $A\bigcup B=B$
ثانياً: نفرض أن $A\bigcup B=B$ ونبرهن أن $A\subseteq B$

$$x\in A\Rightarrow x\in A\bigcup B\Rightarrow x\in B \ (\text{لأن } A\bigcup B=B)$$
$$\Rightarrow A\subseteq B$$

من أولاً وثانيا نستنتج أن $A\subseteq B\leftrightarrow A\bigcup B=B$

مبرهنة
إذا كان كلاً من B,A مجموعتين فإن:
1) $A\bigcup B=B\bigcup A$ 2) $A\bigcup A=A$ 3) $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$

البرهان

1)

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ or } x \in B$$

$$\Rightarrow x \in B \text{ or } x \in A \Rightarrow x \in B \cup A$$

$$\Rightarrow A \cup B \subseteq B \cup A \text{..................(1)}$$

$$y \in B \cup A \Rightarrow y \in B \text{ or } y \in A$$

$$\Rightarrow y \in A \text{ or } y \in B$$

$$\Rightarrow y \in A \cup B$$

$$\Rightarrow B \cup A \subseteq A \cup B \text{...............(2)}$$

من (1) و (2) نستنتج أن $A \cup B = B \cup A$

2)

$$x \in A \cup A \Rightarrow x \in A \text{ or } x \in A \Rightarrow x \in A$$

$$\Rightarrow A \cup A \subseteq A \text{....................(3)}$$

$$y \in A \Rightarrow y \in A \cup A \Rightarrow A \subseteq A \cup A \text{..................(4)}$$

من (3) و (4) نستنتج أن: $A \cup A = A$

3)

$$x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A \text{ or } x \in B \cup C$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ or } x \in B \text{ or } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B \text{ or } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C \text{.............(5)}$$

$$y \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow y \in A \cup B \text{ or } y \in C$$

$$\Rightarrow y \in A \text{ or } y \in B \text{ or } y \in C$$

$$\Rightarrow y \in A \text{ or } y \in B \cup C$$

$$\Rightarrow y \in A \cup (B \cup C)$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C) \text{.............(6)}$$

من (5) و (6) نستنتج أن: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة ما فإن: 1) $A\cup\phi=A$　　2) $A\cup U=U$

البرهان

1) بما أن $\phi\subseteq A$ ومن مبرهنة سابقة نعلم أنه إذا كان $A\subseteq B$ فإن $A\cup B=B$ ولذلك فإن $\phi\cup A=A$

2) بما أن $A\subseteq U$ ومن مبرهنة سابقة نعلم أنه إذا كان $A\subseteq B$ فإن $A\cup B=B$ ولذلك فإن $A\cup U=U$

مبرهنة:

إذا كان كلاً من B, A مجموعة فإن:

1) $A\cap B\subseteq B$　　2) $A\cap B\subseteq A$　　3) $A\subseteq B\leftrightarrow A\cap B=A$

البرهان

1)، 2)　　$\mathrm{x}\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{x}\in\mathrm{A}\text{ and }\mathrm{x}\in\mathrm{B}$

وهذا يعني أن $A\cap B\subseteq A$ وأيضاً $A\cap B\subseteq B$

3) أولاً: نفرض أن $A\subseteq B$ ونبرهن أن $A\cap B=A$

$\mathrm{x}\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{x}\in\mathrm{A}\text{ and }\mathrm{x}\in\mathrm{B}\ \Rightarrow A\cap B\subseteq A$ ....(1)

$\mathrm{y}\in\mathrm{A}\Rightarrow\mathrm{y}\in\mathrm{B}$ لأن $A\subseteq B$ وبما أن $y\in A$ وأيضاً $y\in B$ فإن $y\in A\cap B$

$A\subseteq A\cap B$..................(2)

من (1) و (2) نستنتج أن $A\cap B=A$

ثانياً: نفرض أن $A\cap B=A$ ونبرهن أن $A\subseteq B$

$\mathrm{x}\in\mathrm{A}\Rightarrow\mathrm{x}\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{x}\in\mathrm{A}\text{ and }\mathrm{x}\in\mathrm{B}$

$x\in B\Rightarrow A\subseteq B$

مبرهنة

إذا كان A,B,C أي مجموعات فإن:

1) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ 2) $A\cap A=A$ 3) $A\cap B=B\cap A$

البرهان:

يترك تمرين للطالب

مبرهنة

إذا كانت A أية مجموعة فإن: 1) $A\cap\phi=\phi$ 2) $A\cap U=A$

البرهان

1) بما أن $\phi\subseteq A$ ومن مبرهنة سابقة نعلم أنه إذا كان $A\subseteq B$ فإن $A\cap B=A$

$\therefore\ \phi\cap A=\phi$

2) بما أن $A\subseteq U$ ومن مبرهنة سابقة نعلم أنه إذا كان $A\subseteq B$ فإن $A\cap B=A$

$\therefore\ A\cap U=A$

مبرهنة:

إذا كان كلاً من A ، B ، C مجموعة فإن:

1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

البرهان:

$$x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A \text{ and } x\in B\cup C \Rightarrow x\in A \text{ and } x\in B \text{ or } x\in A \text{ and } x\in C$$

$$\Rightarrow x\in A\cap B \text{ or } x\in A\cap C\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$\Rightarrow A\cap(B\cup B)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)\ \ ....(1)$$

$$y\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow y\in A\cap B \text{ or } y\in A\cap C$$

$$\Rightarrow y\in A \text{ and } y\in B \text{ or } y\in A \text{ and } y\in c\ \Rightarrow y\in A \text{ and } y\in B \text{ or } y\in C$$

$$\Rightarrow y\in A \text{ and } y\in(B\cup C)\Rightarrow y\in A\cap(B\cup C)$$

$$\Rightarrow(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)........................(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

مبرهنة

إذا كان كلاً من A ، B مجموعة فإذا كان $A \subseteq B$ فإن $B^C \subseteq A^C$

البرهان

$$x \in B^C \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A^C \Rightarrow B^C \subseteq A^C$$

مبرهنة

إذا كانت A مجموعة غير خالية فإن $(A^C)^C = A$

البرهان

$$x \in (A^C)^C \Rightarrow x \notin A^C \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A^C)^C \subseteq A \quad ....(1)$$

$$y \in A \Rightarrow y \notin A^C \Rightarrow y \in (A^C)^C \Rightarrow A \subseteq (A^C)^C \quad ....(2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $(A^C)^C = A$

مبرهنة

إذا كان A ، B أي مجموعتين فإن: $A - B = B^C - A^C$

البرهان

$$x \in A - B \Rightarrow x \in A \text{ and } x \notin B \Rightarrow x \notin A^C \text{ and } x \in B^C \Rightarrow x \in B^C - A^C$$

$$\Rightarrow A - B \subseteq B^C - A^C \quad ....(1)$$

$$y \in B^C - A^C \Rightarrow y \in B^C \text{ and } y \notin A^C \Rightarrow y \notin B \text{ and } y \in A \Rightarrow y \in A - B$$

$$\Rightarrow B^C - A^C \subseteq A - B ....(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $A - B = B^C - A^C$

مبرهنة

إذا كانت A مجموعة ما فإن: 1) $\phi^C = U$ 2) $U^C = \phi$ 3) $A \cap A^C = \phi$

البرهان

1) حسب تعريف المجموعة المتممة $A^C = \{x : x \in U , x \notin A\}$ ولذلك فإن $\phi^C = \{x : x \in U, x \notin \phi\}$
وبما أن المجموعة ϕ لا تحتوي على أي عنصر فإن $\phi^C = U$

2) حسب تعريف المجموعة المتممة $A^C = \{x : x \in U , x \notin A\}$ ولذلك فإن $U^C = \{x : x \in U, x \notin U\}$ وحيث أنه لا يوجد عنصر x ينتمي للمجموعة U ولا ينتمي إلى U فإن
$U^C = \phi$

3) $\because \quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$

$$\therefore A \cap A^C = \{x : x \in A \text{ and } x \in A^C\} = \{x : x \in A \text{ and } x \notin A\}$$

وحيث أنه لا يوجد عنصر ينتمي إلى A وفي نفس الوقت لا ينتمي إلى A فإن $A \cap A^C = \phi$

مبرهنة

إذا كان A ، B أي مجموعتين فإن: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ ، $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

البرهان

$$x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B \Rightarrow x \in A^C \text{ or } x \in B^C$$
$$\Rightarrow x \in (A^C \cup B^C) \Rightarrow (A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$$

$$y \in A^C \cup B^C \Rightarrow y \in A^C \text{ or } y \in B^C \Rightarrow y \notin A \text{ or } y \notin B \Rightarrow y \notin A \cap B$$
$$\Rightarrow y \in (A \cap B)^C \Rightarrow A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C$$

من (1) و (2) نستنتج أن $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

مبرهنة

إذا كان كلاً من A ، B مجموعة فإن: 1) $A \Delta B = \phi \leftrightarrow A = B$ 2) $A \Delta \phi = A$

البرهان

1) أولاً: نفرض أن $A = B$ ونبرهن أن $A \Delta B = \phi$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$$

ثانياً: نفرض أن $A \Delta B = \phi$ ونبرهن أن $A = B$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A - B) \cup (B - A) = \phi$$

$$\Rightarrow A - B = \phi , B - A = \phi \Rightarrow A \subseteq B , B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

2) $A \Delta \phi = \{A - \phi) \cup (\phi - A)\} = A \cup \phi = A$

عائلة المجموعات

تعريف:

المجموعة التي كل عنصر فيها هو بحد ذاته مجموعة تسمى عائلة المجموعات.

مثال:

إذا كانت $A=\{a,b\}$ فإن المجموعات الجزئية من A تؤلف عائلة مجموعات أي أن المجموعة $\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ هي عائلة المجموعات

تعريف: مجموعة الأجزاء

إذا كانت A مجموعة فإن جميع المجموعات الجزئية من المجموعة A تسمى بمجموعة أجزاء A ويرمز لها بالرمز $p(A)$ أي أن: $p(A)=\{X:X\subseteq A\}$

مثال:

لتكن $A=\{1,2,3\}$ فإن $p(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\}\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\{1,2,3\}\}$

مبرهنة

إذا كان كلاً من A ، B مجموعة فإن:

1) $A\subseteq B$ إذا وفقط إذا كان $p(A)\subseteq p(B)$

2) $p(A)\bigcap p(B)=p(A\bigcap B)$

3) $p(A)\bigcup p(B)\subseteq p(A\bigcup B)$

البرهان:

1) أولاً: نفرض أن $A\subseteq B$ ونبرهن أن $p(A)\subseteq p(B)$

$$\{x\}\in p(A)\Rightarrow\{x\}\subseteq A\Rightarrow\{x\}\subseteq B\Rightarrow\{x\}\in p(B)\Rightarrow p(A)\subseteq p(B)$$

ثانياً: نفرض أن $p(A)\subseteq p(B)$ ونبرهن أن $A\subseteq B$

$$y\in A\Rightarrow\{y\}\in P(A)\Rightarrow\{y\}\in P(B)\Rightarrow y\in B\Rightarrow A\subseteq B$$

من أولاً وثانياً نستنتج أن $A\subseteq B$ إذا وفقط إذا كان $p(A)\subseteq p(B)$

2)

$$\{x\}\in P(A)\bigcap P(B)\Leftrightarrow\{x\}\in P(A),\{x\}\in P(B)\Leftrightarrow x\in A,x\in B\Leftrightarrow x\in A\bigcap B$$
$$\Leftrightarrow\{x\}\in P(A\bigcap B)$$

3)

$$\{x\}\in p(A)\cup p(B)\Rightarrow\{x\}\in P(A)\ or\ \{x\}\in P(B)\Rightarrow x\in A\ or\ x\in B$$
$$\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow\{x\}\in p(A\cup B)$$
$$\Rightarrow p(A)\cup p(B)\subseteq p(A\cup B)$$

عائلة المجموعات المفهرسة

تعريف:

لتكن F عائلة مجموعات ولتكن I مجموعة ما فإذا كان لكل عنصر $i\in I$ عنصر وحيد A_i في F فتسمى المجموعة I بالمجموعة الدالة والعنصر i يسمى بالدليل للمجموعة A_i وتسمى F بعائلة المجموعات المرقمة وتكتب $\{A_i\}_{i\in I}$

مثال:

إذا كان $I=\{1,2,3\}$ ، $A_1=\{a,b,c\}$ ، $A_2=\{a,c,d\}$ ، $A_3=\{b,c\}$ فإن $F=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{b,c\}\}=\{A_1,A_2,A_3\}$ عائلة مجموعات مرقمة ويمكن كتابتها على الصورة

$$F=\{A_i\}_{i\in I}$$

تعميم الاتحاد والتقاطع:

إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة مجموعات مرقمة فإن اتحاد A_i هو مجموعة تتكون من جميع العناصر التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعات A_i من عائلة المجموعات وتكتب $\bigcup_{i\in I}A_i$ أي أن:

$$\bigcup_{i\in I}A_i=A_1\cup A_2\cup........\cup A_n$$

أما تقاطع A_i هو مجموعة تتكون من جميع العناصر التي تنتمي لكل المجموعات A_i من عائلة المجموعات وتكتب $\bigcap_{i\in I}A_i$ أي أن $\bigcap_{i\in I}A_i=A_1\cap A_2\cap........\cap A_n$

مبرهنة:

إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة مجموعات مرقمة فإن:

1) $(\bigcup_{i\in I}A_i)^C=\bigcap_{i\in I}A_i^C$ 2) $(\bigcap_{i\in I}A_i)^C=\bigcup_{i\in I}A_i^C$

البرهان:

1)

$$x\in(\bigcup_{i\in I}A_i)^C\Leftrightarrow x\notin\bigcup_{i\in I}A_i\Leftrightarrow x\notin A_i\ \forall i\in I\Leftrightarrow x\in A_i^C\ \forall i\in I\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}A_i^C$$

2)

$$x\in(\bigcap_{i\in I}A_i)^C \Leftrightarrow x\notin\bigcap_{i\in I}A_i \Leftrightarrow \exists h\in I: x\notin A_h \Leftrightarrow \exists h\in I: x\in A_h^C \Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i^C$$

التجزيء "التقسيم"

إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة مجموعات جزئية غير خالية من المجموعة B فإن $\{A_i\}_{i\in I}$ تسمى تجزيء (تقسيم) للمجموعة B إذا كان:

1) $\bigcup_{i\in I}A_i = B$ 2) $A_i\cap A_j=\phi \,, A_i\neq A_j$

مثال:

إذا كان $\aleph=\{1,2,3,4,5,6,7,..........\}$, $E=\{2,4,6,8,10,.......\}$, $O=\{1,3,5,7,9,........\}$ فإن المجموعة $\{O,E\}$ تجزيئ لمجموعة الأعداد الطبيعية $\aleph$ لأن: $O\cap E=\phi$, $O\cup E=\aleph$

مثال:

إذا كان $A=\{1,2,3\}, B=\{4,5,10\}, C=\{7,8,9\}, F=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ فإن المجموعة $\{A,B,C\}$ ليست تجزيء للمجموعة F لأن $A\cup B\cup C\neq F$

الأزواج المرتبة:

الزوج المرتب يتكون من عنصرين a , b حيث يكون أحدهما وليكن a يمثل العنصر الأول والآخر b يمثل العنصر الثاني ويرمز للزوج المرتب كما يلي (a,b)

ضرب المجموعات

إذا كان A,B أي مجموعتين فإن حاضر ضرب المجموعتين A,B يتكون من كل الأزواج المرتبة (a,b) حيث $b\in B$ ، $a\in A$ ويرمز لذلك بالرمز: $A\times B$ أي أن:

$$A\times B=\{(a,b): a\in A \;،\; b\in B\}$$

مثال:

إذا كانت $A=\Re$ حيث $\Re$ هي مجموعة الأعداد الحقيقة، فإن:

$$A\times A=\Re\times\Re=\{(a,b): a,b\in\Re\}$$

أي أن $\Re\times\Re$ هي مجموعة عناصرها جميع نقاط المستوي .

لاحظ أن:

1. إذا كانت المجموعة A تحتوي علي m من العناصر والمجموعة B تحتوي علي n من العناصر فإن المجموعة $A\times B$ تحتوي علي nm من العناصر.
2. إذا كانت المجموعة A أو B مجموعة غير منتهية فإن المجموعة $A\times B$ تكون مجموعة غير منتهية.
3. إذا كانت المجموعة A أو B هي مجموعة خالية ، فإن المجموعة $A\times B$ تكون مجموعة خالية.

مبرهنة:

إذا كان كل من A,B,C,D مجموعة فإن:

1) $$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

2) $$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

3) $$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$$

البرهان:

1)

$$(x\cdot y)\in A\times(B\cap C)\Rightarrow x\in A \text{ and } y\in B\cap C$$
$$\Rightarrow x\in A \text{ and } y\in B \text{ and } y\in C$$
$$\Rightarrow x\in A \text{ and } y\in B \text{ and } x\in A \text{ and } y\in C$$
$$\Rightarrow (x\cdot y)\in A\times B \text{ and } (x\cdot y)\in A\times C$$
$$\Rightarrow (x\cdot y)\in (A\times B)\cap(A\times C)$$
$$\Rightarrow A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)\quad\to(1)$$

$$(a\cdot b)\in (A\times B)\cap(A\times C)$$
$$\Rightarrow (a\cdot b)\in(A\times B) \text{ and } (a\cdot b)\in(A\times C)$$
$$\Rightarrow a\in A \text{ and } b\in B \text{ and } a\in C \text{ and } b\in C$$
$$\Rightarrow (a\cdot b)\in A\times(B\cap C)\Rightarrow a\in A \text{ and } b\in B\cap C$$
$$\Rightarrow (A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)\quad\to(2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن: $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

رقم 2، 3 يترك تمرين للطالب

تمرين:

إذا كانت B مجموعة، $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة مجموعات مفهرسة برهن أن:

$$B\cap(\cup A_i)=\cup(B\cap A_i)$$

البرهان:

$$x\in B\cap(\cup A_i)\Rightarrow x\in B \text{ and } x\in\cup A_i$$
$$\Rightarrow x\in B \text{ and } \exists h\in I: x\in A_h$$
$$\Rightarrow x\in(B\cap A_h)\Rightarrow x\in\cup(B\cap A_i)$$
$$\Rightarrow B\cap(\cup A_i)\subseteq\cup(B\cap A_i)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$x\in\cup(B\cap A_i)\Rightarrow\exists h\in I: x\in B\cap A_h\Rightarrow x\in B \text{ and } x\in A_h$$
$$\Rightarrow x\in B \text{ and } x\in\cup A_i\Rightarrow x\in B\cap(\cup A_i)$$
$$\Rightarrow\cup(B\cap A_i)\subseteq B\cap(\cup A_i)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

من (**1**) ، (**2**) نستنتج أن $B\cap(\cup A_i)=\cup(B\cap A_i)$

تمارين

1) أكتب أحد الرموز $\{\in ، \subseteq ، \not\subset ، \not\in\}$ في الفراغات التالية بحيث تصبح الجملة صحيحة:

أ) $\{\phi\}\ldots\ldots\ldots\{\phi,\{\phi\}\}$ ب) $\{\phi\}\ldots\ldots\ldots\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$ ج) $\{\{\phi\}\}\ldots\ldots\ldots\{\phi,\{\phi\}\}$

د) $\{\{\phi\}\}\ldots\ldots\ldots\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$ هـ) $\{\{\phi\}\}\ldots\ldots\ldots\{\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\}$

2) **أكمل ما يأتي:**

أ) $\ldots\ldots\ldots=\{x:x\in A, x\in B\}$ ب) $\ldots\ldots\ldots=\{x:x\in A \text{ or } x\in B\}$

ج) $\ldots\ldots\ldots=\{x:x\neq x\}$ د) $\ldots\ldots\ldots=\{X:X\subseteq A\}$

3) إذا كانت المجموعة $A=\{\phi,\{\phi\},\{1,2\},3\}$ بين أياً من الجمل الآتية صحيح وأياً منها خطأ:

$\{1,2\}\subseteq A$ $\phi\in A$ $\phi\subseteq A$ $2\in A$

$\{1,2\}\in A$ $\{\{\phi\}\}\in A$ $\{\phi\}\in A$ $\{\phi\}\subseteq A$

4) إذا كان A ، B ، C مجموعات غير خالية برهن أن:

1. $A\Delta A=\phi$ 2. $A\Delta B=B\Delta A$ 3. $A\Delta\phi=A$

4. $A\Delta B=\phi$ إذا و إذا كان فقط $A=B$

5. $A\subseteq B'$ إذا و إذا كان فقط $A\bigcap B=\phi$

6. إذا كان $C\subseteq A$ ، $C\subseteq B$ فإن $C\subseteq A\bigcap B$

7. $(A-B)\bigcap B=\phi$

8. $A\bigcap C=\phi \quad \Rightarrow A\bigcap(B\bigcup C)=A\bigcap B$

9. $(B-A)\subset A^{c}$

10. $(A\bigcap B)-C=(A-C)\bigcap(B-C)$

11. $A\bigcap(A^{c}\bigcup B)=A\bigcap B$

12. $A\bigcup(A\bigcup B^{c})^{c}=A\bigcup B$

13. $A=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B^{c})$

14. $A\bigcap(A^{c}\bigcup B)=A\bigcap B$

15. $A=B$ إذا و إذا كان فقط $P(A)=P(B)$

16. $A\bigcap B=\phi$ إذا و إذا كان فقط $P(A)\bigcap P(B)=\{\phi\}$

17. $A\subseteq B$ إذا و إذا كان فقط $A\bigcap B^{c}=\phi$

18. $(A\bigcap B)\bigcup C=A\bigcap(B\bigcup C)$ إذا و إذا كان فقط $C\subseteq A$

19. $A\subseteq B$ إذا و إذا كان فقط $A^{c}\bigcup B=U$

20. $A\bigcup C=B\bigcup C$ إذا و إذا كان فقط $A\Delta B\subseteq C$

21. إذا كان $A\bigcap B=\phi$ فإن $A\bigcup B^{c}=B^{c}$

22. إذا كان $A\subset B$ فإن $A\bigcup(B-A)=B$

23. $(A_1\bigcup A_2\bigcup\dots\dots\dots\bigcup A_n)^{c}=A_1^{c}\bigcap A_2^{c}\bigcap\dots\dots\dots\bigcap A_n^{c}$

24. $A\bigcap B=A\bigcup B\leftrightarrow A=B$

25. $(A_1\bigcap A_2\bigcap\dots\dots\dots\bigcap A_n)^{c}=A_1^{c}\bigcup A_2^{c}\bigcup\dots\dots\dots\bigcup A_n^{c}$

26. $A-(B\bigcap C)=(A-B)\bigcup(A-C)$

27. إذا كان $A\bigcap C=\phi$ فإن $A\bigcap(B\bigcup C)=A\bigcap B$

28. إذا كان $A\bigcap B=\phi$ فإن $A-B=A$

29. إذا كان $A\bigcap B=\varphi$ ، $A\bigcup B=C$ فإن $A=C-B$

30. $A\bigcap(B-C)=(A\bigcap B)-C$

31. $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

32. $(A\bigcup B)-C=(A-C)\bigcup(B-C)$

5) أعط مثالاً لمجموعات A ، B ، C حيث $A\bigcup B=A\bigcup C$ ولكن $B\neq C$

6) أوجد: 1. $\phi\bigcap\{\phi\}$ 2. $\{\phi\}\bigcap\{\phi\}$ 3. $\{\phi\ ,\{\phi\}\}-\phi$

7) ضع علامة √ أمام العبارة الصحيحة وعلامة × أمام العبارة الخاطئة:

1. إذا كان $A\bigcup B\subset A\bigcup C$ فإن $B\subseteq C$
2. إذا كان $A\bigcap B\subset A\bigcap C$ فإن $B\subseteq C$
3. إذا كان $A\bigcup B=A\bigcup C$ فإن $B=C$
4. إذا كان $A\bigcap B=A\bigcap C$ فإن $B=C$
5. إذا كان $A\subset B$ فإن $(C-A)\subset(C-B)$
6. $A-(B-C)=(A-B)-C$

8) إذا كان A,B,C,D **مجموعات ،برهن أن:**

1. إذا كان $A\subseteq B$ ، $C\subseteq D$ فإن $A\bigcup C\subseteq B\bigcup D$
2. إذا كان $A\subseteq B$ ، $B\subseteq C$ فإن $A\subseteq C$
3. $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$
4. $(A\bigcup B)' = A'\bigcap B'$
5. إذا كان $A\subseteq B$ ، $C=B-A$ فإن $A=B-C$
6. $A\subseteq B$ إذا وإذا فقط $P(A)\subseteq P(B)$
7. $P(A)\bigcap P(B)=P(A\bigcap B)$
8. $P(A)\bigcup P(B)\subseteq P(A\bigcup B)$

9) إذا كان $A=[0,3)$ ، $B=(-1,1)$ أوجد $A\bigcap B$ ، $A\bigcup B$

10) إذا كانت $A=\{x:x^2\geq 5x\}$ ، $B=\{x:|x-2|\geq 3\}$ فأوجد $A\bigcap B$ ، B^C ، $A-B$

11) إذا كانت A مجموعة ما ، U هي المجموعة الشاملة، ϕ هي المجموعة الخالية.برهن أن:

(1) $U^c=\phi$ (2) $\phi^c=U$ (3) $A\bigcap A^c=\phi$ (4) $A\bigcup A^c=U$

12) إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة مجموعات مفهرسة.برهن أن:

(1) $(\bigcup A_i)^c=\bigcap A_i^c$ (2) $(\bigcap A_i)^c=\bigcup A_i^c$

13) إذا كانت B مجموعة، $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة مجموعات مفهرسة.برهن أن:

(1) $B\bigcap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(B\bigcap A_i)$ (2) $B\bigcup(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(B\bigcup A_i)$

(3) إذا كان $\forall i\in I$ $A_i\subseteq B$ فإن $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq B$ (4) إذا كان $\forall i\in I$ $B\subseteq A_i$ فإن $B\subseteq\bigcap_{i\in i}A_i$

15) إذا كان كل من $\{A_i\}_{i\in I}$ ، $\{B_j\}_{j\in J}$ عائلة مجموعات مفهرسة.برهن أن:

(1) $(\bigcup_{i\in I}A_i)\bigcap(\bigcup_{j\in J}B_j)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\bigcap B_j)$ (2) $(\bigcap_{i\in I}A_i)\bigcup(\bigcap_{j\in J}B_j)=\bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\bigcup B_j)$

(3) $(\bigcup_i A_i)-(\bigcup_j B_j)=\bigcup_i(\bigcap_j[A_i-B_j])$ (4) $(\bigcap_i A_i)-(\bigcap_j B_j)=\bigcap_i(\bigcup_j[A_i-B_j])$

16) يقال بأن المجموعة المفهرسة $\{B_i\}_{i\in I}$ هي غطاء للمجموعة A إذا كان $A\subseteq\bigcup_{i\in I}B_i$.

برهن أنه إذا كان $\{B_i\}_{i\in I}$ ، $\{C_j\}_{j\in J}$ غطائين مختلفين للمجموعة A فإن المجموعة $\{B_i\bigcap C_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ تكون غطاء للمجموعة A .