المتجهات

المتجه:

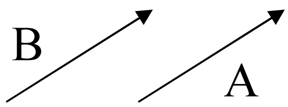
هو كمية لها مقدار واتجاه مثل الإزاحة والسرعة والقوة والعجلة ويرمز له بالرمز $\left|\vec{A}\right|$ أو A .

الكميه العدديه :

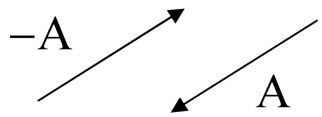
هي كميه لها مقدار وليس لها اتجاه مثل الكتلة والطول والزمن ودرجة الحرارة والأعداد .

ملاحظات :

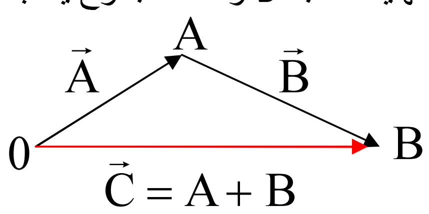
1- المتجهان A,B يتساويان إذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه بغض النظر عن موضع نقطة البداية ، وبذلك يكون A=B .



2- المتجه الذي له اتجاه عكس المتجه A وله نفس المقدار يرمز له بالرمز ‎–A .



3- مجموع أو محصلة متجهين A,B هي المتجه C المتكون بوضع نقطة البداية للمتجه B على نقطة النهاية للمتجه A ثم توصل نقطة البداية للمتجه A بنقطة النهاية للمتجه B وهذا المجموع يكتب كالآتي : C=A+B



4- الفرق بين متجهين A,B يعبر عنه بالرمز A-B وهو عبارة عن المتجه C مضافا إليه المتجه B لينتج لنا المتجه A . والمتجه A-B يكافئ جمع A+(-B) .

حاله خاصه : إذا كان A=B حينئذ A-B يساوي صفرا ويعرف بالمتجه الصفري أي أن مقداره يساوي صفر وليس له اتجاه محدد .

5- ضرب المتجه A بكمية عددية m هو متجه mA الذي قيمته |m| مضروباً في مقدار A وله نفس الإتجاه مثل المتجه A أو عكسه تبعاً لقيمة m موجبه كانت أو سالبة . إذا كانت m=0 يصبح المتجه mA متجه صفري .

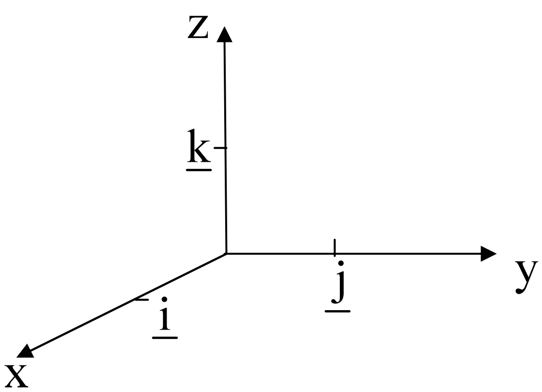
متجه الوحده :

هو متجه طوله يساوي الواحد.

في الحالة العامة إذا كان $\vec{A}$ أي متجه فإن متجه الوحدة في اتجاهه يكون على الصورة :

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$$

متجهات الوحدة المتعامدة :



$\underline{i}$: وحدة متجه في إتجاه x .

$\underline{j}$: وحدة متجه في إتجاه y .

$\underline{k}$: وحدة متجه في إتجاه z .

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$

المتجه $\underline{a}$ في الفراغ مركباته في اتجاهات x,y,z هي a_x, a_y, a_z .

تعريف :

إذا كان

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$

فإن طول المتجه a أو مقداره هو

$$|\underline{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

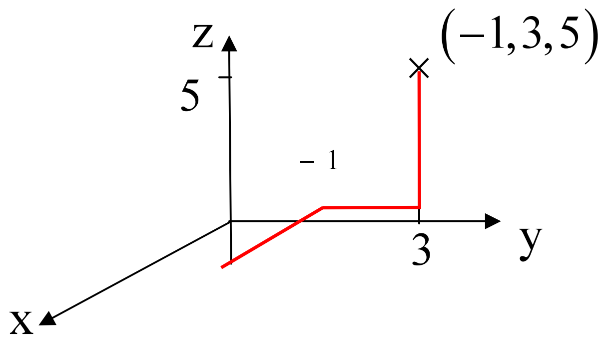
ووحدة متجه في اتجاه a هي

$$\underline{\hat{a}} = \frac{\underline{a}}{a} = \frac{a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

تمثيل النقط في الفراغ :

<u>مثال :</u>

<u>مثل النقطة (-1,3,5) في الفراغ ؟</u>

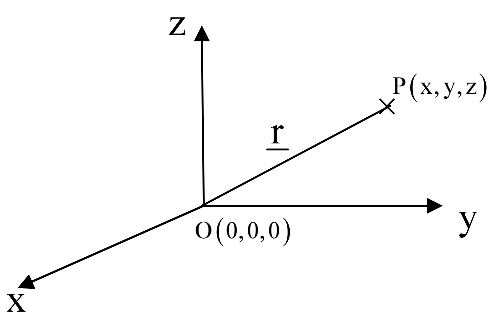


توضيح لطريقة التمثيل :

(نتحرك على إمتداد x بمقدار 1 لأن العدد سالب ثم نتحرك بشكل موازي لمحور y إلى الوحده 3 ثم أخيرا نتحرك إلى الأعلى بشكل موازي لمحور z إلى الوحده 5 وعندها تكون هذه هي النقطة المطلوبه) .

تعريف (متجه الموضع):

إذا كانت P(x,y,z) أي نقطة في الفراغ فإن متجه الموضع النقطة P هو المتجه الواصل بين نقطة الأصل إلى النقطة P ويرمز له بالرمز : $\overrightarrow{op} = \underline{r}$.



$$\overrightarrow{op} = (x-0)\underline{i} + (y-0)\underline{j} + (z-0)\underline{k}$$
$$= x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

مثال :

اوجد متجه الوحدة الموازي لمحصلة متجهين :

$$\underline{r_1} = 2\underline{i} + 4\underline{j} - 5\underline{k} \quad , \quad \underline{r_2} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$$

الحل

$$\underline{r} = \underline{r_1} + \underline{r_2} = 3\underline{i} + 6\underline{j} - 2\underline{k}$$
$$|\underline{r}| = r = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$
$$\therefore \underline{\hat{r}} = \frac{\underline{r}}{r} = \frac{3\underline{i} + 6\underline{j} - 2\underline{k}}{7} = \frac{3}{7}\underline{i} + \frac{6}{7}\underline{j} - \frac{2}{7}\underline{k}$$

تعريف حاصل الضرب القياسي لمتجهين :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |A||B|\cos\theta$$

ومنه فإن :

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = |\underline{i}||\underline{j}|\cos 90 = 1 \times 1 \times 0 = 0$$

ونلاحظ أن :

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = 0$$

أيضاً

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = |\underline{i}||\underline{i}|\cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

ونلاحظ أن :

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$$

و من خلال تعريف الضرب القياسي :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \rightarrow \underline{A} \perp \underline{B} \quad \vee \quad \underline{A} = 0 \quad \vee \quad \underline{B} = 0$$

ايضاً إذا كان :

$$\begin{aligned} \underline{A} &= A_1\underline{i} + A_2\underline{j} + A_3\underline{k} \\ \underline{B} &= B_1\underline{i} + B_2\underline{j} + B_3\underline{k} \end{aligned}$$

فإن حاصل الضرب القياسي هو :

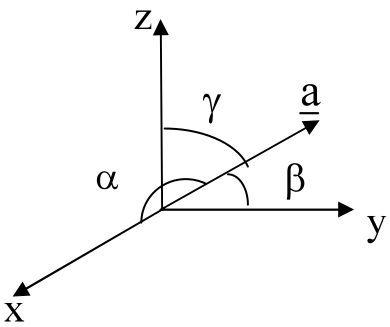
$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

تعريف جيوب تمام اتجاه متجه :

إذا كان لدينا متجه

$$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} = (a_1, a_2, a_3)$$

يصنع مع الإتجاهات الموجبة للمحاور x,y,z الزوايا α, β, γ بالترتيب :



$$\underline{a}\cdot\underline{i}=\left(a_1\underline{i}+a_2\underline{j}+a_3\underline{k}\right)\cdot\underline{i}$$
$$=|\underline{a}||\underline{i}|\cos\alpha=a\cos\alpha$$
$$\therefore a_1=a\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=\frac{a_1}{a}\qquad\ldots(*)$$
$$\underline{a}\cdot\underline{j}=\left(a_1\underline{i}+a_2\underline{j}+a_3\underline{k}\right)\cdot\underline{j}$$
$$=|\underline{a}||\underline{j}|\cos\beta=a\cos\beta$$

$$\therefore a_2=a\cos\beta\rightarrow\cos\beta=\frac{a_2}{a}\qquad\ldots(**)$$
$$\underline{a}\cdot\underline{k}=\left(a_1\underline{i}+a_2\underline{j}+a_3\underline{k}\right)\cdot\underline{k}$$
$$=|\underline{a}||\underline{k}|\cos\gamma=a\cos\gamma$$
$$\therefore a_3=a\cos\gamma\rightarrow\cos\gamma=\frac{a_3}{a}\qquad\ldots(***)$$

تسمى $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ ***جيوب تمام في إتجاه المتجه*** $\underline{a}$.

لاحظ أن :

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_1^2}{a^2}+\frac{a_2^2}{a^2}+\frac{a_3^2}{a^2}$$
$$=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

تطبيقات الضرب القياسي :

1- ايجاد طول متجه .

2- ايجاد مسقط متجه على متجه .

- مسقط $\underline{A}$ على $\underline{B}$:

$$\underline{A}\cdot\hat{\underline{B}}$$

- مسقط $\underline{B}$ على $\underline{A}$

$$\hat{\underline{A}}\cdot\underline{B}$$

3- حساب الشغل المبذول .

مثال :

إذا كان :

$$\underline{A} = 3\underline{i} + 4\underline{j} \quad , \ \underline{B} = \ 4\underline{i} + 5\underline{j}$$

اوجد :

مسقط $\underline{A}$ على $\underline{B}$ – مسقط $\underline{B}$ على $\underline{A}$ – الزاوية بين متجهين .

الحل :

حيث أن :

$$\underline{\hat{A}} = \frac{\underline{A}}{|\underline{A}|} = \frac{3\underline{i} + 4\underline{j}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}$$

$$\underline{\hat{B}} = \frac{\underline{B}}{|\underline{B}|} = \frac{4\underline{i} + 5\underline{j}}{\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}}\underline{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\underline{j}$$

بالتالي فإن مسقط $\underline{A}$ على $\underline{B}$:

$$\underline{A} \cdot \underline{\hat{B}} = \left(3\underline{i} + 4\underline{j}\right) \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{41}}\underline{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\underline{j}\right)$$

$$= \frac{12}{\sqrt{41}} + \frac{20}{\sqrt{41}} = \frac{32}{\sqrt{41}}$$

و مسقط $\underline{B}$ على $\underline{A}$:

$$\underline{\hat{A}} \cdot \underline{B} = \left(\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}\right) \cdot \left(4\underline{i} + 5\underline{j}\right)$$

$$= \frac{12}{5} + \frac{20}{5} = \frac{32}{5}$$

وبما أن :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |A||B|\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{|A||B|}$$

$$= \frac{\left(3\underline{i} + 4\underline{j}\right) \cdot \left(4\underline{i} + 5\underline{j}\right)}{5\sqrt{41}} = \frac{32}{5\sqrt{41}}$$

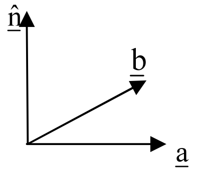
إذن الزاوية بين المتجهين :

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{32}{5\sqrt{41}}\right)$$

الضرب الإتجاهي لمتجهين :

تعريف :

حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين $\underline{a}, \underline{b}$ يعطى بالعلاقة :



$$\underline{a} \wedge \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\sin\theta \ . \ \hat{\underline{n}}$$

حيث $\hat{\underline{n}}$ وحدة متجه عموديه على كل من $\underline{a}, \underline{b}$.

بحيث تشكل المتجهات الثلاثة مجموعة يمينية عند النقطة P

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = -\underline{b} \wedge \underline{a}$$

ومنه فإن :

$$\underline{i} \wedge \underline{j} = |\underline{i}||\underline{j}|\sin 90 \ \hat{\underline{k}} = 1\times1\times1\times\hat{\underline{k}} = \hat{\underline{k}}$$

$$\text{but} \ \ \underline{j} \wedge \underline{i} = |\underline{j}||\underline{i}|\sin 90 \ \left(-\hat{\underline{k}}\right) = 1\times1\times1\times-\hat{\underline{k}} = -\hat{\underline{k}}$$

و بالمثل :

$$\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i} \quad \text{but} \quad \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$$

$$\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j} \quad \text{but} \quad \underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j}$$

أيضاً

$$\underline{i} \wedge \underline{i} = \underline{j} \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{k} = 0$$

ايضاً يتم حساب الضرب الاتجاهي على الصورة:

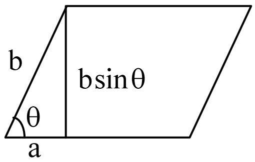
$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

المعنى الهندسي لـ $|\underline{a} \wedge \underline{b}|$:

$$|\underline{a} \wedge \underline{b}| = |ab\sin\theta \ . \ \underline{\hat{n}}| = ab\sin\theta$$

مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\underline{a}, \underline{b}$ ضلعان غير متوازيان .

مساحة المثلث: $\frac{1}{2}|\underline{a} \wedge \underline{b}|$



الضرب الثلاثي القياسي :

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

إذا كان $\underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) = 0$ فإن المتجهات الثلاثة تقع في مستوى واحد .

الضرب الثلاثي الاتجاهي:

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$$

لاحظ أن :

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) \neq (\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c}$$

مثال:

اوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط التالية :

$$A(1,3,2) \quad , \quad B(2,-1,1) \quad , \quad C(-1,2,3)$$

الحل:

نكون متجهين:

$$\underline{AB} = \underline{i} + (-1-3)\,\underline{j} + (1-2)\,\underline{k}$$
$$= \underline{i} - 4\,\underline{j} - \underline{k}$$
$$\underline{AC} = (-1-1)\,\underline{i} + (2-3)\,\underline{j} + (3-2)\,\underline{k}$$
$$= -2\,\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$$
$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\underline{AB} \wedge \underline{AC}\right|$$

وبما أن :

$$\underline{AB} \wedge \underline{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5\,\underline{i} + \underline{j} - 9\underline{k}$$
$$\therefore \left|\underline{AB} \wedge \underline{AC}\right| = \sqrt{25+1+81} = \sqrt{107}$$

وبالتالي فإن مساحة المثلث هي :

$$\frac{1}{2}\left|\underline{AB} \wedge \underline{AC}\right| = \frac{\sqrt{107}}{2}$$

مثال :

اوجد وحدة المتجه العمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين

$$\underline{a} = 2\,\underline{i} - 6\,\underline{j} - 3\underline{k}$$
$$\underline{b} = 4\,\underline{i} + 3\,\underline{j} - \underline{k}$$

الحل :

بما أن $\underline{a} \wedge \underline{b}$ عمودي على كل من $\underline{a}, \underline{b}$ بالتالي فإنه عمودي على مستواهم:

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\,\underline{i} - 10\,\underline{j} + 30\underline{k}$$

بالتالي فإن متجه الوحده العمودي على المستوى هو:

$$\frac{15\underline{i}-10\underline{j}+30\underline{k}}{\sqrt{225+100+900}}=\frac{3}{7}\underline{i}-\frac{2}{7}\underline{j}+\frac{6}{7}\underline{k}$$

معادلات الخط المستقيم في الفراغ :

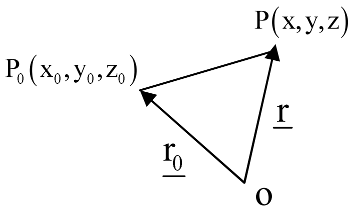
المستقيم في الفراغ الذي يمر بنقطة معلومة P_0 هو المحل الهندسي لنقطة P بحيث $\overrightarrow{P_0P}$ موازياً اتجاه ثابت وليكن :

$$\underline{a}=L\underline{i}+m\underline{j}+n\underline{k}$$

لإيجاد معادلة الخط المستقيم نفرض أن :

$\underline{r}$ هو متجه الموضع لنقطة P

$\underline{r_0}$ هو متجه الموضع للنقطة المعلومه P_0 .



إذن و من الرسم :

$$\underline{r}=\underline{r_0}+\underline{P_0P}\quad\rightarrow\quad\underline{P_0P}=\underline{r}-\underline{r_0}$$

من تعريف المستقيم $\underline{a}\,//\,\underline{P_0P}$:

$$\underline{A},\underline{B}\quad\rightarrow\quad\underline{A}=\lambda\underline{B}$$

$$\underline{a}\,//\,\underline{P_0P}\rightarrow\underline{P_0P}=t\ \underline{a}$$

$$\underline{r}-\underline{r_0}=t\ \underline{a}\quad,\quad -\infty<t<\infty$$

$$\underline{r}=\underline{r_0}+t\ \underline{a}\qquad\ldots(*)$$

<u>و هي المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم</u> بدلالة متجه الموضع لنقطة معلومه واتجاه ثابت يوازي الخط المستقيم .

بالتعويض في المعادلة (*) عن مركبات المتجهات نحصل على :

$$x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}=x_0\underline{i}+y_0\underline{j}+z_0\underline{k}+t\left(L\underline{i}+m\underline{j}+n\underline{k}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+t\ L\\y&=y_0+t\ m\\z&=z_0+t\ n\end{aligned}\right\}\qquad\ldots.(**)$$

المعادلة (**) *<u>تمثل المعادلات البارامتريه للخط المستقيم</u>* .

بحذف البارامتر t من المعادلات (**) نحصل على :

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad ....(***)$$

المعادلات (***) هي *المعادلات الكارتيزية للخط المستقيم* .

لإيجاد معادلة الخط المستقيم في الفراغ لابد من توفر :

1- نقطة معلومة على الخط المستقيم .
2- اتجاه ثابت يوازي الخط المستقيم.

مثال :

اوجد المعادلات الاتجاهية والبارامترية والكارتيزيه للخط المار بالنقطتين :

$$A(2,1,-3) \quad , \quad B(-1,2,3)$$

الحل :

$$\underline{AB}=-3\underline{i}+\underline{j}+6\underline{k}=(-3,1,6)=(L,m,n)$$

نقطة معلومه $P_0(2,1,-3)$

$$\therefore \underline{r_0}=2\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k}$$

المعادلة الإتجاهية :

$$\underline{r}=\underline{r_0}+t\underline{a}=(2,1,-3)+t(-3,1,6)$$

المعادلات البارامتريه :

$$x=2-3t$$
$$y=1+t$$
$$z=-3+6t$$

المعادلات الكارتيزية :

بحذف البارامتر t من المعادلات البارمترية نحصل على :

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{6}$$

مثال :

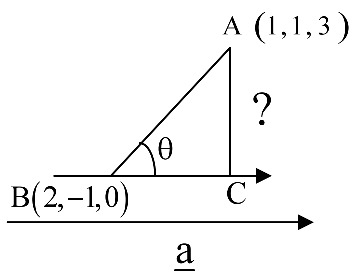
اوجد بعد النقطة (A(1,1,3 عن الخط المستقيم :

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$$

الحل :

من معادلات الخط المستقيم نجد أن النقطة (B(2,-1,0 تقع على الخط كما أن المتجه $\underline{a}=(L,m,n)=(2,3,2)$.

وهو متجه ثابت يوازي الخط المستقيم .



نلاحظ أن

$$\overrightarrow{BA}\cdot\widehat{BC}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|BC|}=\frac{BA\cdot BC\cos\theta}{BC}=BA\cos\theta=\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BA}=-\underline{i}+2\underline{j}+3\underline{k}$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

متجه الوحده في اتجاه BC هو نفسه متجه الوحده في اتجاه ثابت $\underline{a}$.

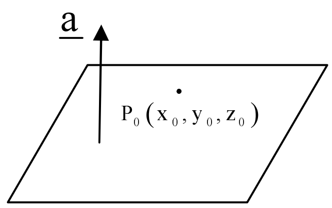
$$\widehat{BC}=\frac{2}{\sqrt{17}}\underline{i}+\frac{3}{\sqrt{17}}\underline{j}+\frac{2}{\sqrt{17}}\underline{k}=\frac{1}{\sqrt{17}}\left(2\underline{i}+3\underline{j}+2\underline{k}\right)$$

$$\therefore BC=\widehat{BC}\cdot BA=\frac{10}{\sqrt{17}}$$

$$\rightarrow \overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=14-\frac{100}{17}=\frac{138}{17}$$

معادلة المستوى في الفراغ :

المستوى في الفراغ المار بالنقطة المعلومه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ هو المحل الهندسي لجميع المستقيمات الماره بالنقطة P_0 والعمودية على اتجاه ثابت .

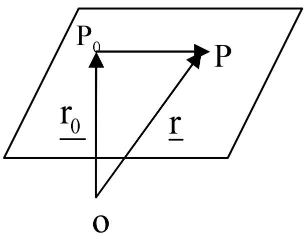


$$\underline{a} = L\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}$$

لإيجاد معادلة المستوى:

نفرض احداثيات نقطة عامه P(x,y,z) في المستوى

بالتالي من تعريف المستوى نجد أن $\overrightarrow{P_0P}$ يقع في المستوى وبالتالي عمودي على $\underline{a}$.



$$\therefore \overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{a} = 0$$

من الشكل :

$$\underline{P_0P} = \underline{r} - \underline{r_0}$$

إذن *المعادلة الإتجاهيه للمستوى* هي:

$$(\underline{r} - \underline{r_0}) \cdot \underline{a} = 0 \qquad ....(1)$$

بالتعويض في (1) عن المتجهات الثلاثة نحصل على :

$$\left[(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}) - (x_0\underline{i} + y_0\underline{j} + z_0\underline{k})\right] \cdot (L\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}) = 0$$

$$((x - x_0)\underline{i} + (y - y_0)\underline{j} + (z - z_0)\underline{k}) \cdot (L\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}) = 0$$

$$(x - x_0)L + (y - y_0)m + (z - z_0)n = 0 \qquad ....(2)$$

وهي *المعادلة الكارتيزية للمستوى* والتي بالإمكان كتابتها على الصورة :

$$xL + ym + zn = x_0L + y_0m + z_0n$$
$$\text{let} \quad x_0L + y_0m + z_0n = d$$
$$\rightarrow xL + ym + zn = d$$

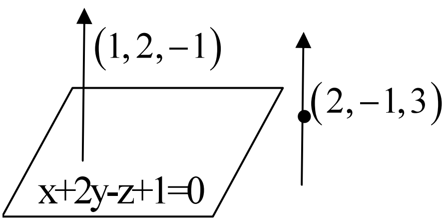
لايجاد معادلة مستوى لابد من توفر :

1- نقطة تقع في المستوى .
2- اتجاه عمودي على المستوى.

مثال :

اوجد المعادلات الكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطة (2,-1,3) ويكون عموديا على المستوى x+2y-z+1=0 .

الحل :



المتجه الثابت الموازي للخط هو نفسه العمودي على المستوى أي هو المتجه

$$\underline{a}=(L,m,n)=(1,2,-1)$$

إذن المعادلات الكارتيزية للمستقيم هي :

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

مثال :

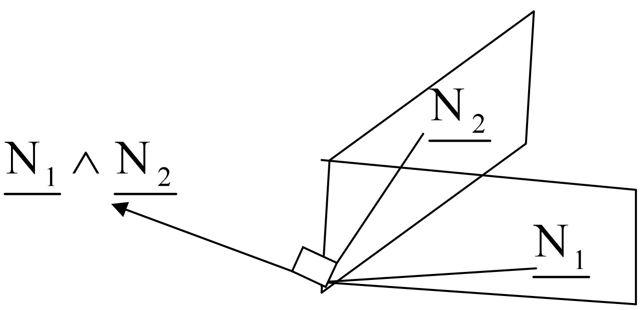
اوجد جيوب تمام اتجاه خط تقاطع المستويين :

$$x+4y-2z=6 \qquad , \qquad 2x-3y+z=4$$

الحل :

أولاً نوجد متجه يوازي خط تقاطع المستويين :

$$N_1=(1,4,-2) \qquad , \qquad N_2=(2,-3,1)$$



نلاحظ أن خط التقاطع عمودي على $\underline{N_1}$ و على $\underline{N_2}$

حيث أن $\underline{N_1}\wedge\underline{N_2}$ عمودي على كل من $\underline{N_1}$ و $\underline{N_2}$

إذن لابد أن $\underline{N}_2 \wedge \underline{N}_1$ يوازي خط التقاطع .

نحسب الآن $\underline{N}_1 \wedge \underline{N}_2$:

$$\underline{N}_1 \wedge \underline{N}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\underline{i} - 5\underline{j} - 11\underline{k} = -\left(2\underline{i} + 5\underline{j} + 11\underline{k}\right)$$

إذن نسب اتجاه الموازي لخط التقاطع هي $(2,5,11)$

وبالتالي فإن جيوب تمام اتجاه خط التقاطع هي:

$$\frac{2\underline{i} + 5\underline{j} + 11\underline{k}}{\sqrt{4+25+121}} = \frac{2\underline{i} + 5\underline{j} + 11\underline{k}}{5\sqrt{6}} = \left(\frac{2}{5\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{11}{5\sqrt{6}}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{5\sqrt{6}} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5\sqrt{6}}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{5\sqrt{6}} \rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5\sqrt{6}}\right)$$

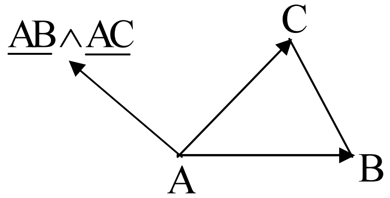
$$\cos\gamma = \frac{11}{5\sqrt{6}} \rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{11}{5\sqrt{6}}\right)$$

مثال :

اوجد معادلة المستوى المحدد بالنقاط :

$$A(2,-1,1) \quad , \quad B(3,2,-1) \quad , \quad C(-1,3,2)$$

الحل :



$$\underline{AB} = \underline{i} + 3\underline{j} - 2\underline{k}$$

$$\underline{AC} = -3\underline{i} + 4\underline{j} + \underline{k}$$

$$\underline{AB} \wedge \underline{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 11\underline{i} + 5\underline{j} + 13\underline{k}$$

إذن العمودي على المستوى هو :

$$(L, m, n) = (11, 5, 13)$$

وبالتالي فإن معادلة المستوى هي :

$$11(x-2) + 5(y+1) + 13(z-1) = 0$$

$$11x - 22 + 5y + 5 + 13z - 13 = 0$$

$$11x + 5y + 13z = 30$$

طريقة أخرى للحل :

نفرض ان احداثيات نقطة عامة P(x,y,z) في المستوى

إذن المتجهات الثلاثة $\underline{CA}$, $\underline{BA}$, $\underline{AB}$ تقع في مستوى واحد :

$$\therefore \underline{PA} \cdot (\underline{BA} \wedge \underline{CA}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow 11(x-2) + 5(y+1) + 13(z-1) = 0$$

$$\rightarrow 11x + 5y + 13z = 30$$

الزاوية بين مستويين :

إذا كانت معادلة المستوى الأول هي : $L_1x + m_1y + n_1z + d_1 = 0$

ومعادلة المستوى الثاني : $L_2x + m_2y + n_2z + d_2 = 0$

فإن :

$$\underline{N_1} = (L_1, m_1, n_1)$$
$$\underline{N_2} = (L_2, m_2, n_2)$$

إذن ***الزاوية بين مستويين*** هي الزاوية بين $\underline{N_1}, \underline{N_2}$:

$$\cos\theta = \frac{\underline{N_1} \cdot \underline{N_2}}{|\underline{N_1}| \cdot |\underline{N_2}|} = \frac{L_1L_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{L_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{L_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

شرط تعامد مستويين هو

$$L_1L_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

معادلات المستويات الماره بخط تقاطع المستويين :

$$L_1x + m_1y + n_1z + d_1 = 0$$
$$L_2x + m_2y + n_2z + d_2 = 0$$

لإيجاد المعادلة المطلوبة نعتبر المعادلة الآتية :

$$L_1x + m_1y + n_1z + d_1 + \lambda(L_2x + m_2y + n_2z + d_2) = 0$$

هذه المعادلة من الدرجة الأولى في x,y,z فهي تمثل معادلة مستوى كما أن أي نقطة على خط التقاطع تحقق هذه المعادلة .

إذن هذه المعادلة تمثل ***معادلة المستويات الماره بخط تقاطع المستويين المعلومين*** .

مثال :

اثبت أن :

$$x - 2y + 4z + 1 = 0 \qquad , \qquad 2x + 3y + z - 3 = 0$$

متعامدان . ثم اوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطعهم ويمر بالنقطة (1,-2,-1) .

الحل :

شرط التعامد هو :

$$L_1L_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$
$$(L_1, m_1, n_1) = (1, -2, 4) \quad , \; (L_2, m_2, n_2) = (2, 3, 1)$$
$$\therefore L_1L_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 2 - 6 + 4 = 0$$

معادلة المستويات الماره بخط تقاطع المستويين :

$$\left(x-2y+4z+1\right)+\lambda\left(2x+3y+z-3\right)=0$$

بالتعويض عن النقطة (1,-2,-1) نحصل على :

$$\left(1+4-4+1\right)+\lambda\left(2-6-1-3\right)=0 \quad \rightarrow \lambda=\frac{1}{4}$$

بالتعويض عن $\lambda=\frac{1}{4}$ نحصل على معادلة المستوى المطلوبة :

$$\left(x-2y+4z+1\right)+\frac{1}{4}\left(2x+3y+z-3\right)=0$$
$$\rightarrow 4x-8y+16z+4+2x+3y+z-3=0$$
$$\rightarrow 6x-5y+17z+1=0$$

معادلات السطوح

معادلة السطح في الصورة الكارتيزيه هي معادله على الصورة :

$$F\left(x,y,z\right)=0$$

إذا كانت u,v بارامترات وكانت

$$x=f_1\left(u,v\right)\quad,\quad y=f_2\left(u,v\right)\quad,\quad z=f_3\left(u,v\right)\qquad.....(1)$$

هذه المعادلات هي ***المعادلات البارامترية للسطح***.

بوضع $u=u_0$ في المعادلات(1) نحصل على منحنى على السطح في v معادلاته البارامتريه هي :

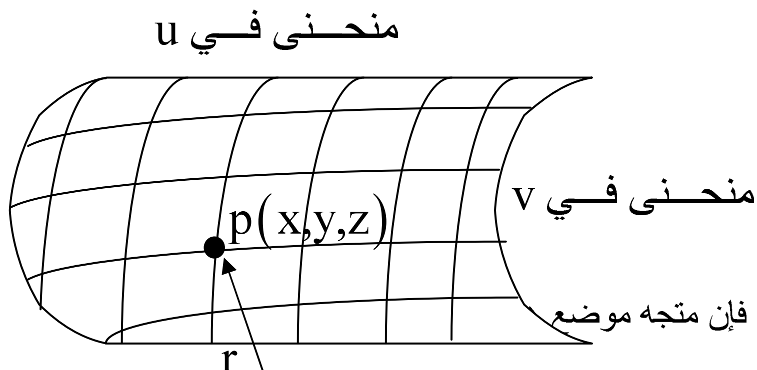
$$x=f_1\left(u_0,v\right)\quad,\quad y=f_2\left(u_0,v\right)\quad,\quad z=f_3\left(u_0,v\right)\qquad.....(2)$$

بوضع $v=v_0$ في المعادلات (1) نحصل على المعادلات البارامترية لمنحنى على السطح في u وتصبح المعادلات :

$$x=f_1\left(u,v_0\right)\quad,\quad y=f_2\left(u,v_0\right)\quad,\quad z=f_3\left(u,v_0\right)\qquad.....(3)$$

المنحنيات يتقاطعان في نقطة على السطح نحصل عليها من (1)

بوضع $u=u_0\quad,v=v_0$



إذا كانت P(x,y,z) هي نقطة على السطح فإن متجه موضع

$$\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$$
$$=f_1\left(u,v\right)\underline{i}+f_2\left(u,v\right)\underline{j}+f_3\left(u,v\right)\underline{k}$$

إذا فرضنا أن P هي نقطة تقاطع المنحنيين (2) و(3) عندئذ فإن متجه المماس للمنحنى v عند النقطة P هو :

$$\frac{\partial\underline{r}}{\partial v}=\frac{\partial f_1}{\partial v}\left(u_0,v\right)\underline{i}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\left(u_0,v\right)\underline{j}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\left(u_0,v\right)\underline{k}$$

ومتجه المماس للمنحنى u عند P هو :

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}=\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v_0)\,\underline{i}+\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v_0)\,\underline{j}+\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v_0)\,\underline{k}$$

ويحدد المماسان مستويا ماسا للسطح عند نقطة P ويكون العمودي على هذا المستوى المماس هو المتجه :

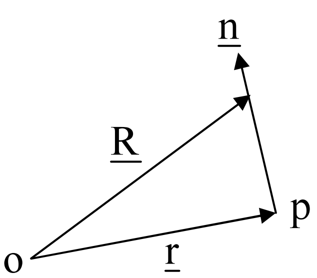
$$\underline{n}=\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$$

إذن متجه الوحده العمودي على السطح عند النقطة P هو :

$$\underline{\hat{n}}=\frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|}$$

لايجاد المعادلة الإتجاهية للمستقيم العمودي :

نفرض أن احداثيات نقطة عامه على هذا الخط متجه الموضع لها هو $\underline{R}$.



$$\therefore \underline{R}-\underline{r}\ //\ \underline{n}$$

$$\rightarrow \underline{R}-\underline{r}=k\ \underline{n}$$

$$\rightarrow \underline{R}-\underline{r}=k\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)$$

هذه هي المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم العمودي على السطح

لايجاد المعادلة الإتجاهية للمستوى المماس للسطح :

إذا كانت $\underline{R}$ متجه موضع لنقطة عامة في المستوى المماس للسطح فإن المتجه $\underline{R}-\underline{r}$ يقع في المستوى المماس للسطح

$$\therefore \underline{R}-\underline{r}\ \perp\ \underline{n}$$

$$\rightarrow \underline{R}-\underline{r}\ \cdot\ \underline{n}=0$$

$$\rightarrow (\underline{R}-\underline{r})\cdot\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)=0$$

وهي المعادلة الإتجاهية للمستوى المماس للسطح .

مثال :

اوجد معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودي على السطح الذي معادلاته البارامتريه هي :

x=2(u+v) , y=3(u-v) , z=uv

عند النقطة P(u=2,v=1) .

الحل :

متجه موضع أي نقطة P على السطح هو :

$$\underline{r} = 2(u+v)\underline{i} + 3(u-v)\underline{j} + uv\underline{k}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + v\underline{k}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + u\underline{k}$$

إذن عند النقطة P يكون :

$$\underline{r} = 6\underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{k}$$

$$\underline{n} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 9\underline{i} - 2\underline{j} - 12\underline{k}$$

نسبة اتجاه العمودي على السطح عند النقطة P : $(9,-2,-12)$.

المعادلة الاتجاهيه للعمودي على السطح عند النقطة P هي :

$$\left(\underline{R}-\underline{r}\right)=k\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)$$

$$x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}-\left(6\underline{i}+3\underline{j}+2\underline{k}\right)=k\left(9\underline{i}-2\underline{j}-12\underline{k}\right)$$

$$(x-6)\underline{i}+(y-3)\underline{j}+(z-2)\underline{k}=k\left(9\underline{i}-2\underline{j}-12\underline{k}\right)$$

$x-6=9k$

$y-3=-2k$

$z-2=-12k$

$$\therefore \frac{x-6}{9}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-12}$$

ايجاد معادلة المستوى المماس للسطح عند P :

$$\left(\underline{R}-\underline{r}\right)\cdot\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)=0$$

$$\rightarrow\left[(x-6)\underline{i}+(y-3)\underline{j}+(z-2)\underline{k}\right]\cdot\left(9\underline{i}-2\underline{j}-12\underline{k}\right)=0$$

$$\rightarrow\left[9(x-6)-2(y-3)-12(z-2)\right]=0$$

$$\rightarrow 9x-2y-12z-24=0$$

السطوح الدورانيه

السطح الدوراني هو السطح الناتج من دوران منحنى مرسوم في مستوى معلوم حول مستقيم ثابت في هذا المستوى يسمى محور الدوران .

(عادة نأخذ محور الدوران هو أحد محاور الاحداثيات x,y,z) حتى يسهل علينا كتابة معادلة السطح الدوراني

لإيجاد معادلة السطح الدوراني :

1- إذا كان المنحنى المرسوم في المستوى ZX ويدور حول محور Z فإننا نستبدل x^2 في معادلة المنحنى بـ $\left(x^2+y^2\right)$ نحصل على معادلة السطح الدوراني الناتج .

2- إذا كان المنحنى المرسوم في المستوى YZ ويدور حول محور Y فإننا نستبدل z^2 في معادلة المنحنى بـ $\left(x^2+z^2\right)$

نحصل على معادلة السطح الدوراني المطلوب.

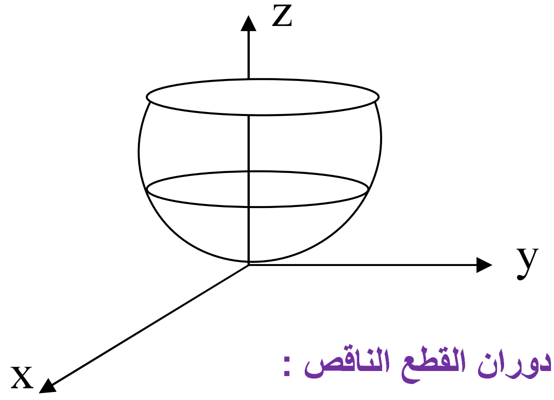
مثال :

اوجد معادلة السطح الدوراني (مع الرسم) الناشئ من دوران المنحنى $y^2=4z$ المرسوم في المستوى YZ حول محور Z .

الحل :

نستبدل y^2 بـ $\left(x^2+y^2\right)$ نحصل على معادلة السطح الدوراني :

$$x^2+y^2=4z$$



مثال :

اوجد مع الرسم معادلة السطح الناتج من دوران القطع الناقص :

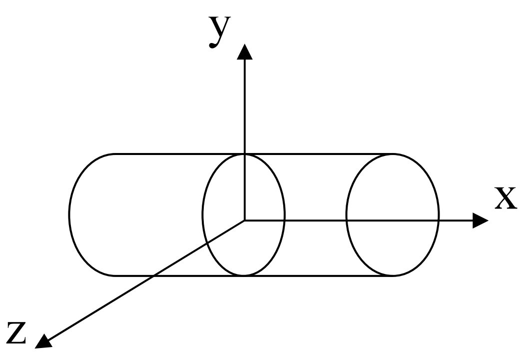
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

المرسوم في المستوى XY حول محور X .

الحل :

نستبدل y^2 بـ $\left(y^2+z^2\right)$ إذن معادلة السطح الدوراني

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2+z^2}{4}=1$$

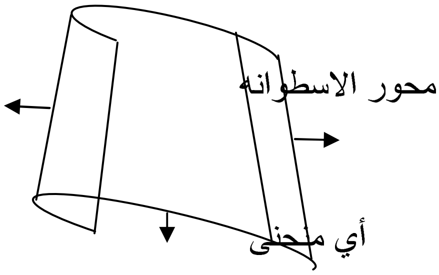


السطح الأسطواني

السطح الأسطواني هو السطح الذي يرسمه مستقيم يتحرك في الفراغ موازيا اتجاه ثابت بحيث أن المستقيم دائما يمر بمنحنى مرسوم في مستوى معلوم .

- إذا كان المستقيم المتحرك عمودي على مستوى المنحنى فإن الاسطوانه تكون قائمة والاتجاه الثابت يسمى محور الاسطوانة .

راسم الاسطوانه



قاعدة :

- أي معادلة على الصورة $f(x,y)=0$ تمثل في الفراغ سطح اسطوانه قائمة محورها محور z ومنحنى القاعده لها تمثله المعادلتان :

$$Z=0 \quad , \quad f(x,y)=0$$

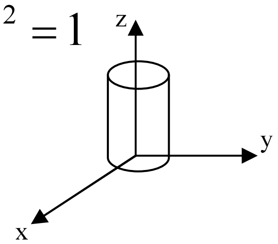
- بالمثل المعادلة $f(x,z)=0$ تمثل اسطوانه قائمة محورها محور y ومنحنى القاعدة تمثله المعادلتين :

$$Y=0 \quad , \quad f(x,z)=0$$

مثال :

المعادلة $x^2 + y^2 = 1$ تمثل في الفراغ سطح اسطوانة قائمة محورها هو محور z ومنحنى القاعده لها تمثله المعادلتان :

$$z = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = 1$$



تفاضل المتجهات

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

حيث: $h=\Delta x$

تعريف :

إذا كان $\underline{R}(u)$ متجه في المتغير u فإن :

$$\frac{d\underline{R}}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\underline{R}(u+\Delta u)-\underline{R}(u)}{\Delta u}$$

فإذا كانت $\underline{r}(u)$ هو متجه الموضع أي نقطة (x,y,z) فإن :

$$\underline{r}(u)=x(u)\underline{i}+y(u)\underline{j}+z(u)\underline{k}$$

$$\frac{d\underline{r}}{du}=\frac{dx}{du}\underline{i}+\frac{dy}{du}\underline{j}+\frac{dz}{du}\underline{k}$$

ويمثل اتجاه المماس لمنحنى في الفراغ عند النقطة (x,y,z) .

تعريف الدالة المتجهة :

$$\underline{R}(u)=\underline{R}_1(u)\underline{i}+\underline{R}_2(u)\underline{j}+\underline{R}_3(u)\underline{k}$$

تكون متصلة عند u إذا كانت الدوال الثلاثة

$$\underline{R}_1(u),\underline{R}_2(u),\underline{R}_3(u)$$

متصلة عند u .

تعريف :

إذا كانت $\underline{A}$,$\underline{B}$,$\underline{C}$ دوال متجهه قابلة للتفاضل بالنسبه إلى u وإذا كانت ϕ دالة غير متجهه قابله للتفاضل بالنسبه إلى u فإن :

$$(1)\quad \frac{d}{du}(\underline{A}+\underline{B})=\frac{d\underline{A}}{du}+\frac{d\underline{B}}{du}$$

$$(2)\quad \frac{d}{du}(\underline{A}\,.\,\underline{B})=\underline{A}\,.\,\frac{d\underline{B}}{du}+\underline{B}\,.\,\frac{d\underline{A}}{du}$$

$$(3)\quad \frac{d}{du}(\phi\underline{A})=\phi\frac{d\underline{A}}{du}+\underline{A}\frac{d\phi}{du}$$

$$(4)\quad \frac{d}{du}(\underline{A}\,.(\underline{B}\wedge\underline{C}))=\underline{A}\,.\left(\underline{B}\wedge\frac{d\underline{C}}{du}\right)+\underline{A}\,.\left(\frac{d\underline{B}}{du}\wedge\underline{C}\right)+\frac{d\underline{A}}{du}\,.\,(\underline{B}\wedge\underline{C})$$

$$(5)\quad \frac{d}{du}(\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C}))=\underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\frac{d\underline{C}}{du}\right)+\underline{A}\wedge\left(\frac{d\underline{B}}{du}\wedge\underline{C}\right)+\frac{d\underline{A}}{du}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})$$

مثال :

إذا كان

$$\underline{R}=\sin t\ \underline{i}+\cos t\ \underline{j}+t\ \underline{k}$$

أوجد :

$$\frac{d\underline{R}}{dt}\ ,\ \frac{d^2\underline{R}}{dt^2},\ \left|\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\right|$$

الحل :

$$\frac{d\underline{R}}{dt}=\cos t\ \underline{i}-\sin t\ \underline{j}+\underline{k}$$

$$\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}=-\sin t\ \underline{i}-\cos t\ \underline{j}$$

$$\left|\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\right|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$$

مؤثر تفاضلي $\underline{\nabla}$:

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

إذا اثرت هذا المؤثر على دالة قياسيه ϕ يسمى *الإنحدار* :

$$\text{grad } \phi = \nabla\phi$$

إذا كان الضرب بين المؤثر التفاضلي ضربا قياسيا والداله الاتجاهيه يسمى *التباعد*:

$$\text{div } \underline{A} = \underline{\nabla} \cdot \underline{A}$$

إذا كان الضرب اتجاهيا بين المؤثر والدالة المتجهه يسمى *الدوران* :

$$\text{curl } \underline{A} = \underline{\nabla} \wedge \underline{A}$$

بعض خواص المؤثر التفاضلي $\underline{\nabla}$:

$$(1)\ \underline{\nabla}(\phi+\psi) = \underline{\nabla}\,\phi + \underline{\nabla}\,\psi$$

$$(2)\ \underline{\nabla} \cdot (\underline{A}+\underline{B}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \underline{\nabla} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{\nabla} \otimes (\underline{A}+\underline{B}) = \underline{\nabla} \otimes \underline{A} + \underline{\nabla} \otimes \underline{B}$$

$$(3)\ \underline{\nabla} \cdot (\phi\,\underline{A}) = (\underline{\nabla}\,\phi) \cdot \underline{A} + \phi(\underline{\nabla} \cdot \underline{A})$$

$$\underline{\nabla} \otimes (\phi\,\underline{A}) = (\underline{\nabla}\,\phi) \otimes \underline{A} + \phi(\underline{\nabla} \otimes \underline{A})$$

$$(4)\ \underline{\nabla} \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B}) = \underline{B}.(\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) - \underline{A}.(\underline{\nabla} \wedge \underline{B})$$

$$(5)\ \underline{\nabla} \wedge (\underline{A} \wedge \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \underline{\nabla})\underline{A} - \underline{B}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) - (\underline{A} \cdot \underline{\nabla})\underline{B} + \underline{A}(\underline{\nabla} \cdot \underline{B})$$

$$(6)\ \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\,\phi) = \underline{\nabla}(\text{grad } \phi) = \text{div}(\text{grad } \phi) = \underline{\nabla}^2\phi = \Delta\phi$$

حيث:

$$\underline{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

يسمى بموؤثر لابلاس.

تنويه :

إذا كانت $\underline{\nabla}^2\phi = 0$ فإن الدالة تسمى بالدالة الهرمونيه .

$$(7)\ \underline{\nabla} \wedge (\underline{\nabla}\ \phi) = 0$$

$$\text{curl}(\text{grad } \phi) = 0$$

$$(8)\ \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) = 0$$

$$\text{div}(\text{curl } \underline{A}) = 0$$

$$(9)\ \underline{\nabla} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) = \underline{\nabla}\ (\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) - \underline{\nabla}^2 \underline{A}$$

مثال :

اثبت أن $\underline{\nabla}\ \phi$ هي متجه عمودي على السطح $\phi(x,y,z) = c$؟

الحل :

نفرض أن المتجه $\underline{r}$ هو متجه الموضع للنقطة P على هذا السطح

$$\underline{r} = x\ \underline{i} + y\ \underline{j} + z\ \underline{k}$$

$$d\underline{r} = dx\ \underline{i} + dy\ \underline{j} + dz\ \underline{k}$$

يقع في المستوى المماس للسطح عند النقطة P

$$\phi(x,y,z) = c$$

$$d\phi = 0$$

$$\therefore \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\ dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}\ dz=0$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\ \underline{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\ \underline{k}\right).(dx\ \underline{i} + dy\ \underline{j} + dz\ \underline{k}) = 0$$

$$\therefore \underline{\nabla}\ \phi\ .\ d\underline{r} = 0$$

$$\underline{\nabla}\ \phi\ \perp\ d\underline{r}$$

إذن $\underline{\nabla}\ \phi$ عمودي على السطح $\phi(x,y,z) = c$.

مثال :

اوجد متجه الوحدة العمودي للسطح

$$x^2y+2xz=4$$

عند النقطة (2,-2,3) ؟

الحل :

$$x^2y+2xz=4$$
$$\phi(x,y,z)=c$$

إذن $\underline{\nabla}\ \phi$ متجه عمودي على السطح عند النقطة :

$$\underline{\nabla}\ \phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\ \underline{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\ \underline{k}$$
$$=(2xy+2z)\underline{i}+x^2\ \underline{j}+2x\ \underline{k}$$
$$\underline{\nabla}\ \phi\Big|_{(2,-2,3)}=\left[2.2.(-2)+2(3)\right]\underline{i}+4\ \underline{j}+4\ \underline{k}$$
$$=-2\underline{i}+4\ \underline{j}+4\ \underline{k}$$

إذن متجه الوحده العمودي على السطح عند النقطة (2,-2,3) هو :

$$\frac{-2\underline{i}+4\ \underline{j}+4\ \underline{k}}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{-1}{3}\underline{i}+\frac{2}{3}\ \underline{j}+\frac{2}{3}\ \underline{k}$$

مثال:

اوجد معادلة المستوى المماس للسطح :

$$2xz^2-3xy-4x=7$$

عند النقطة (1,-1,2) ؟

الحل :

$$\underline{\nabla}\ \phi=(2z^2-3y-4)\underline{i}-3x\ \underline{j}+4xz\ \underline{k}$$
$$\underline{\nabla}\ \phi\Big|_{(1,-1,2)}=7\underline{i}-3\ \underline{j}+8\ \underline{k}$$

إذن العمودي على المستوى المماس هو :

$$(L,m,n)=(7,-3,8)$$
$$7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0$$
$$7x-3y+8z-26=0$$

مثال :

أوجد $\underline{\nabla}\wedge\underline{A}$ إذا كان

$$\underline{A}=xz^3\underline{i}-2x^2yz\underline{j}+2yz^4\underline{k}$$ **؟**

الحل :

$$\underline{\nabla}\wedge\underline{A}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}$$
$$=\left(2z^4+2x^2y\right)\underline{i}+\left(3xz^2\right)\underline{j}-(4xyz)\underline{k}$$

مثال :

اثبت أن :

$$\underline{\nabla}\wedge\left(\underline{\nabla}\,\phi\right)=0 \quad \text{or} \quad \text{Curl}\left(\text{grad}\,\phi\right)=0$$

الحل :

$$\underline{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\underline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$
$$\underline{\nabla}\,\phi=\text{grad}\,\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{k}$$

$$\underline{\nabla} \wedge \left(\underline{\nabla}\ \phi\right) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}\right)\underline{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right)\underline{k}$$

ϕ قابلة للاشتقاق إذن ϕدالة متصلة

وهذا يؤدي إلى :

$$\phi_{xy} = \phi_{yx} \quad , \quad \phi_{xz} = \phi_{zx} \quad , \quad \phi_{yz} = \phi_{zy}$$

$$\therefore \underline{\nabla} \wedge \left(\underline{\nabla}\ \phi\right) = (0)\,\underline{i} + (0)\,\underline{j} + (0)\,\underline{k} = \underline{0}$$

مثال :

اثبت أن :

$$\underline{\nabla} \cdot \left(\underline{\nabla} \wedge \underline{A}\right) = 0 \quad \text{or} \quad \operatorname{div}\left(\operatorname{curl}\ \underline{A}\right) = 0$$

الحل :

$$\underline{A} = \underline{A}(x,y,z)$$
$$= A_1\underline{i} + A_2\underline{j} + A_3\underline{k}$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}) = \underline{\nabla}\cdot\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\underline{j}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\underline{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y} = 0$$

مثال :

اثبت أن :

$$\underline{\nabla}\wedge\left[\underline{r}\, f(r)\right] = 0$$

حيث $f(r)$ دالة قابله للتفاضل و $\underline{r}$ متجه الموضع .

$$\underline{r} = \underline{r}(x,y,z) \quad , \quad r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

الحل :

$$\underline{r}\, f(r) = x\, f(r)\underline{i} + y\, f(r)\underline{j} + z\, f(r)\underline{k}$$

$$\underline{\nabla} \wedge \left[\underline{r}\, f(r)\right] = \underline{\nabla} \wedge \left[x\, f(r)\underline{i} + y\, f(r)\underline{j} + z\, f(r)\underline{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x\, f(r) & y\, f(r) & z\, f(r) \end{vmatrix}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(zf(r)\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(yf(r)\right)\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(xf(r)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(zf(r)\right)\right)\underline{j}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(yf(r)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xf(r)\right)\right)\underline{k}\right]$$

$$= \left(z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\underline{k} \quad ...(1)$$

وحيث أن :

$$f(r)\ ,\ r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

إذن من قاعدة السلسلة نجد أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{z}{r}$$

توضيح :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y \rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial z} = 2z \rightarrow \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على :

$$\underline{\nabla} \wedge \left[\underline{r}\, f(r)\right] = \left(\frac{zy}{r}\frac{df}{dr} - \frac{yz}{r}\frac{df}{dr}\right)\underline{i} + \left(\frac{xz}{r}\frac{df}{dr} - \frac{zx}{r}\frac{df}{dr}\right)\underline{j}$$
$$+ \left(\frac{yx}{r}\frac{df}{dr} - \frac{xy}{r}\frac{df}{dr}\right)\underline{k} = \underline{0}$$

مثال :

إذا كان : $\underline{v} = \underline{w} \wedge \underline{r}$

اثبت أن :

$$\underline{w} = \frac{1}{2}\mathrm{curl}\ \underline{v}$$

حيث $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ متجه ثابت .

الحل :

$$\text{curl } \underline{v} = \underline{\nabla} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{r})$$

$$= \underline{\nabla} \wedge \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\nabla} \wedge \left[(w_2 z - w_3 y)\underline{i} + (w_3 x - w_1 z)\underline{j} + (w_1 y - w_2 x)\underline{k} \right]$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_2 z - w_3 y & w_3 x - w_1 z & w_1 y - w_2 x \end{vmatrix}$$

$$= 2w_1\underline{i} + 2w_2\underline{j} + 2w_3\underline{k}$$

$$= 2(w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}) = 2\underline{w}$$

$$\therefore \underline{w} = \frac{1}{2}\text{curl } \underline{v}$$

مثال :

إذا كان :

$$\underline{A} = 2yz\underline{i} - x^2y\underline{j} + xz^2\underline{k}$$

$$\phi(x,y,z) = 2x^2yz^3$$

اثبت أن :

$$\underline{A} \cdot \underline{\nabla}\, \phi = (\underline{A} \cdot \underline{\nabla})\phi$$

الحل :

$$\text{L.H.S} = \underline{A}\cdot\underline{\nabla}\ \phi = \underline{A}\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{k}\right)$$

$$= \left(2yz\underline{i} - x^2y\underline{j} + xz^2\underline{k}\right)\cdot\left(4xyz^3\,\underline{i} + 2x^2z^3\,\underline{j} + 6x^2yz^2\underline{k}\right)$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4y^3z^3 + 6x^3yz^4$$

$$\text{R.H.S} = \left(\underline{A}\cdot\underline{\nabla}\right)\ \phi$$

$$= \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$= 2yz\frac{\partial\phi}{\partial x} - x^2y\frac{\partial\phi}{\partial y} + xz^2\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4y^3z^3 + 6x^3yz^4$$

$$\therefore\ \underline{A}\cdot\underline{\nabla}\ \phi = \left(\underline{A}\cdot\underline{\nabla}\right)\phi$$

التفاضل الجزئى للمتجهات :

إذا كان $\underline{A}$ دالة متجهه تعتمد على أكثر من متغير وليكن تعتمد على x, y, z أي أن : $\underline{A} = \underline{A}(x, y, z)$

فإن :

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\underline{A}(x+\Delta x, y, z) - \underline{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

و هكذا يكون التفاضل الجزئي لكل من y, z :

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\underline{A}(x, y+\Delta y, z) - \underline{A}(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\underline{A}(x, y, z+\Delta z) - \underline{A}(x, y, z)}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial y}\right)$$

إذا كان المتجه $\underline{A}$ متصل فإن :

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y \partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial x}\right)$$

مثال :

إذا كان $\underline{A}$ متجه ثابت (له مقدار ثابت) اثبت أن

$\underline{A}$, $\frac{d\underline{A}}{dt}$ متعامدان .

الحل:

$$\because \underline{A} \cdot \underline{A} = C$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(\underline{A} \cdot \underline{A}) = \frac{d}{dt}(C)$$

$$\rightarrow \underline{A} \cdot \frac{d\underline{A}}{dt} + \underline{A} \cdot \frac{d\underline{A}}{dt} = 0$$

$$\therefore \underline{A} \cdot \frac{d\underline{A}}{dt} = 0 \rightarrow \underline{A} \perp \frac{d\underline{A}}{dt}$$

مثال :

إذا كان :

$$\underline{A} = xz\underline{i} - xy^2\underline{j} + yz^2\underline{k}$$

$$\phi(x,y,z) = xy^2z$$

اوجد $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi\ \underline{A})$ عند النقطة $(2,-1,1)$.

الحل :

$$\phi\ \underline{A} = x^2y^2z^2\underline{i} - x^2y^4z\ \underline{j} + xy^3z^3\underline{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi\ \underline{A}) = 2x^2y^2z\underline{i} - x^2y^4\ \underline{j} + 3xy^3z^2\underline{k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(\phi\ \underline{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(\phi\ \underline{A})}{\partial z}\right]$$

$$= 4xy^2z\underline{i} - 2xy^4\ \underline{j} + 3y^3z^2\underline{k}$$

$$\frac{\partial^3(\phi\ \underline{A})}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2(\phi\ \underline{A})}{\partial x \partial z}\right]$$

$$= 4y^2z\underline{i} - 2y^4\ \underline{j}$$

$$\left.\frac{\partial^3(\phi\ \underline{A})}{\partial x^2 \partial z}\right|_{(2,-1,1)} = 4\underline{i} - 2\ \underline{j}$$

مثال :

إذا كان

$$\underline{A} = \left(2x^2y - x^4\right)\underline{i} + \left(e^{xy} - y\sin x\right)\underline{j} + \left(x^2\cos y\right)\underline{k}$$

اوجد

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial \underline{A}}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y^2}\ ,\ \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x \partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y \partial x}$$

الحل :

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial x}=\left(4xy-4x^3\right)\underline{i}+\left(ye^{xy}-y\cos x\right)\underline{j}+\left(2x\ \cos y\right)\underline{k}$$

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial y}=\left(2x^2\right)\underline{i}+\left(xe^{xy}-\sin x\right)\underline{j}-\left(x^2\sin y\right)\underline{k}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x^2}=\left(4y-12x^2\right)\underline{i}+\left(y^2e^{xy}+y\sin x\right)\underline{j}+\left(2\cos y\right)\underline{k}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y^2}=\left(x^2e^{xy}\right)\underline{j}-\left(x^2\cos y\right)\underline{k}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y\partial x}=\left(4x\right)\underline{i}+\left(yxe^{xy}+e^{xy}-\cos x\right)\underline{j}-\left(2x\ \sin y\right)\underline{k}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x\partial y}=\left(4x\right)\underline{i}+\left(xye^{xy}+e^{xy}-\cos x\right)\underline{j}-\left(2x\sin y\right)\underline{k}$$

تكامل المتجهات :

المعطيات :

$$\underline{R}(u)=R_1(u)\underline{i}+R_2(u)\underline{j}+R_3(u)\underline{k}$$

حيث $R_1(u),R_2(u),R_3(u)$ دوال متصلة في منطقة ما معينة عندئذ

$$\int\underline{R}(u)\ du=\underline{i}\int R_1(u)\ du+\underline{j}\int R_2(u)\ du+\underline{k}\int R_3(u)\ du$$

تعريف :

إذا وجدت دالة متجه $\underline{S}(u)$ بحيث $\underline{R}(u)=\frac{d\underline{S}}{dx}$ فإن

$$\int\underline{R}(u)\ du=\underline{S}(u)+\underline{C}$$

ويكون

$$\int_a^b \underline{R}(u)\ du = S(b) - S(a)$$

مثال :

إذا كان :

$$\underline{R}(u) = \left(u - u^2\right)\underline{i} + 2u^3\,\underline{j} - 3\underline{k}$$

أوجد

$$(i)\ \int \underline{R}(u)\ du$$

$$(ii)\ \int_1^2 \underline{R}(u)\ du$$

الحل :

$$(i)\ \int \underline{R}(u)\ du = \underline{i}\int\left(u - u^2\right)\ du + \underline{j}\int 2u^3\ du + \underline{k}\int(-3)\ du$$

$$= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\underline{i} + \left(\frac{u^4}{2}\right)\underline{j} - 3u\underline{k} + \underline{C}$$

$$(ii)\ \int_1^2 \underline{R}(u)\ du = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_1^2 \underline{i} + \left[\frac{u^4}{2}\right]_1^2 \underline{j} - [3u]_1^2\,\underline{k}$$

$$= \frac{-5}{6}\underline{i} + \frac{15}{2}\underline{j} - 3\underline{k}$$

مثال :

احسب :

$$\int\left(\underline{A} \wedge \frac{d^2\underline{A}}{dt^2}\right) dt$$

الحل :

$$\because \frac{d}{dt}\left(\underline{A}\wedge\frac{d\underline{A}}{dt}\right)=\frac{d\underline{A}}{dt}\wedge\frac{d\underline{A}}{dt}+\underline{A}\wedge\frac{d^2\underline{A}}{dt^2}$$

$$\therefore \int\left(\underline{A}\wedge\frac{d^2\underline{A}}{dt^2}\right)dt=\int\frac{d}{dt}\left(\underline{A}\wedge\frac{d\underline{A}}{dt}\right)dt$$

$$=\underline{A}\wedge\frac{d\underline{A}}{dt}+\underline{C}$$

التكامل الخطي :

هو تكامل يراد به حسابه على طول منحنى .

فإذا كان c هو منحنى يصل بين النقطتين P_1 ,P_2 فإن :

$$\int_{P_1}^{P_2}\underline{A}\cdot d\underline{r}=\int_C\underline{A}\cdot d\underline{r}$$

$$=\int_C\left(A_1dx+A_2dy+A_3dz\right)$$

ملاحظة :

إذا كان c منحنى مغلق فإننا نرمز للتكامل على هذا المنحنى بالرمز $\oint_C\underline{A}\cdot d\underline{r}$.

لحساب هذا التكامل $\int_C f\left(x,y\right)$:

نحوله إلى تكامل في دالة ذات متغير واحد أي أننا نوجد y بدلالة x أو x بدلالة y أو نوجد متغير بدلالة كل من y و x ويسمى بارامتر t . وهكذا في حالة دالة في ثلاث متغيرات $\int_C f\left(x,y,z\right)$.

مثال :

احسب $\int_C\underline{A}\cdot d\underline{r}$ **حيث**

$$\underline{A}=\left(3x^2+6y\right)\underline{i}-14yz\,\underline{j}+20xz^2\underline{k}$$

و c هو المنحنى المعطى بالعلاقة $x=t\ ,\ y=t^2\ ,\ z=t^3$ **من النقطة** $\left(0,0,0\right)$ **إلى النقطة** $\left(1,1,1\right)$.

الحل :

$$\int_C \underline{A}\cdot d\underline{r} = \int_C \left(A_1dx + A_2dy + A_3dz\right)$$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \left[\left(3x^2+6y\right)dx - 14yz\ dy + 20xz^2dz\right]$$

$$x = t \rightarrow dx = dt \qquad , \ t:0\rightarrow 1$$

$$y = t^2 \rightarrow dy = 2t\ dt \quad , \ t:0\rightarrow 1$$

$$z = t^3 \rightarrow dz = 3t^2\ dt \quad , \ t:0\rightarrow 1$$

$$\int_C \underline{A}\cdot d\underline{r} = \int_0^1 \left[\left(3t^2+6t^2\right)dt - 14t^5\left(2t\right)\ dt + 20tt^6\left(3t^2\right)dt\right]$$

$$= \int_0^1 \left[9t^2dt - 28t^6\ dt + 60t^9dt\right]$$

$$= \left[3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\right]_0^1 = 5$$

مثال :

احسب : $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$

حيث :

$$\underline{F} = 3xy\underline{i} - y^2\underline{j}$$

و C هو منحنى القطع المكافئ

$y = 2x^2$ **من** $\left(0,0\right)$ **إلى** $\left(1,2\right)$ **.**

الحل :

$$\underline{F}\cdot d\underline{r} = 3xy\ dx - y^2 dy$$

$$\because y = 2x^2 \rightarrow dy = 4x dx \quad ; \quad x: 0 \rightarrow 1$$

$$\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_0^1 \left(6x^3 - 16x^5\right)dx$$

$$= \left[\frac{6x^4}{4} - \frac{16x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{6}{4} - \frac{16}{6} = \frac{-7}{6}$$

ملاحظة :

يمكن تكوين علاقة بين y و x والبارامتر t كما يلي :

$$\because y = 2x^2$$

و بوضع

$x = t \rightarrow dx = dt$ فإن $y = 2t^2 \quad \rightarrow dy = 4t\ dt$

وبما أن $x: 0 \rightarrow 1$ إذن $t: 0 \rightarrow 1$

نظرية :

إذا كانت $\underline{A} = \underline{\nabla}\ \phi$ في أي منطقة R في الفراغ حيث :

$$R: \begin{cases} a_1 \le x \le a_2 \\ b_1 \le y \le b_2 \\ c_1 \le z \le c_2 \end{cases}$$

و ϕ دالة وحيدة القيمة ولها مشتقات متصلة على المنطقة R حينئذ فإن :

(1) التكامل $\int_{P_1}^{P_2} \underline{A}\cdot d\underline{r}$ لا يعتمد على المسار C في المنطقة R الواصل بين P_1, P_2.

(2) $\oint_C \underline{A}\cdot d\underline{r}$ حول أي مسار مغلق C في المنطقة R ، في هذه الحالة $\underline{A}$ يسمى مجال محافظ والدالة ϕ تسمى بالجهد العددي $\underline{A} = \underline{\nabla}\ \phi$.

تعريف :

مجال A يكون محافظ إذا كان : $\underline{\nabla} \wedge \underline{A} = 0$.

$$\operatorname{curl}(\text{grad } \phi) = 0$$

$$\underline{\nabla} \wedge (\underline{\nabla} \phi) = 0$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{A} = 0$$

لأن $\underline{A} = \underline{\nabla} \phi$

مثال :

بين أن

$$\underline{F} = (2xy + z^3)\underline{i} + x^2 \underline{j} + 3xz^2 \underline{k}$$

يكون مجال محافظ ثم أوجد دالة الجهد .

الحل :

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = 0$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0)\underline{i} + (3z^2 - 3z^2)\underline{j} + (2x - 2x)\underline{k} = \underline{0}$$

إذن F مجال محافظ له دالة الجهد

لإيجاد دالة الجهد $\underline{F} = \underline{\nabla} \phi$

$$\left(2xy+z^3\right)\underline{i}+x^2\underline{j}+3xz^2\underline{k}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{k}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy+z^3 \quad \rightarrow \phi=x^2y+z^3x+f(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2 \quad \rightarrow \phi=x^2y+g(x,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=3xz^2 \quad \rightarrow \phi=xz^3+h(x,y)$$

$$\text{let }: f(y,z)=0 \quad , \quad g(x,z)=z^3x \quad , \quad g(x,y)=x^2y$$

$$\Rightarrow \phi=x^2y+z^3x$$

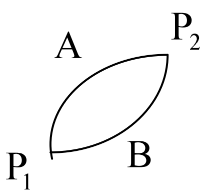
مثال :

اثبت أن الشرط الضروري والكافي لكي لا يعتمد التكامل $\int_{P_1}^{P_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$ على المسار الذي يربط بين النقطتين P_1,P_2 في منطقة معلومة هو أن $\oint \underline{F}\cdot d\underline{r}=0$ لكل المسارت في المنطقه الماره بين النقطتين .

الحل :

(i) نفرض $\int_{P_1}^{P_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$ لا يعتمد على المسار بين النقطتين

ليكن $P_1AP_2BP_1$ منحنى مغلق مار بالنقطتين P_1,P_2



$$\therefore \oint \underline{F}\cdot d\underline{r}=\int_{P_1AP_2BP_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}$$

$$=\int_{P_1AP_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\int_{P_2BP_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}$$

$$=\int_{P_1AP_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}-\int_{P_1BP_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}=0$$

(ii) نفرض أن $\oint \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$ لأي منحنى مغلق مار بالنقطتين P_1, P_2

$$\because \oint \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$$

$$\therefore \int_{P_1AP_2BP_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$$

$$\rightarrow \int_{P_1AP_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{P_2BP_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$$

$$\rightarrow \int_{P_1AP_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} - \int_{P_1BP_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$$

$$\rightarrow \int_{P_1AP_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{P_1BP_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}$$

نلاحظ أن المسارات مختلفة والتكاملين متساويين إذن التكامل لا يعتمد على المسار بين النقطتين .

نظرية :

الشرط الضروري والكافي لكي يكون

$$F_1\ dx + F_2\ dy + F_3\ dz$$

تفاضله تامه لداله ϕ هو أن يكون :

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = 0 \quad \text{or} \quad \underline{\nabla} \wedge \left(\underline{\nabla}\ \phi\right) = 0$$

مثال :

اثبت أن $\underline{F} = \left(y^2z^3\cos x - 4x^3z\right)dx + \left(2z^3y\sin x\right)dy + \left(3y^2z^2\sin x - x^4\right)dz$ **تفاضله تامه لداله** ϕ **ثم اوجد هذه الدالة ؟**

الحل :

المطلوب : إثبات أن $(\text{curl}\ \underline{F} = 0)$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = 0$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3\cos x - 4x^3z & 2z^3y\sin x & 3y^2z^2\sin x - x^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(6yz^2\sin x - 6z^2y\sin x\right)\underline{i}$$

$$+ \left(3y^2z^2\cos x - 4x^3 - 3y^2z^2\cos x + 4x^3\right)\underline{j}$$

$$+ \left(2z^3y\cos x - 2yz^3\cos x\right)\underline{k}$$

$$= (0)\underline{i} + (0)\underline{j} + (0)\underline{k} = \underline{0}$$

$$\therefore F_1\ dx + F_2\ dy + F_3\ dz = d\phi(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 = y^2z^3\cos x - 4x^3z \rightarrow \phi = y^2z^3\sin x - x^4z + f(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 = 2z^3y\sin x \rightarrow \phi = z^3y^2\sin x + g(x,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 = 3y^2z^2\sin x - x^4 \rightarrow \phi = y^2z^3\sin x - x^4z + h(x,y)$$

$$\text{let}\ : f(y,z) = 0\quad ,\ g(x,z) = -x^4z\quad ,\ h(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \phi = y^2z^3\sin x - x^4z$$

حل آخر :

يمكن ايجاد الدالة ϕ من التكامل $\int F_1\ dx + \int F_2\ dy + \int F_3\ dz$ وتكون الدالة ϕ هي نتيجة هذا التكامل مع ملاحظة كتابة الحدود المتكررة مره واحدة فقط .

مثال : إذا كانت $\underline{F} = xy\underline{i} - z\underline{j} + x^2\underline{k}\quad ,\ \phi(x,y,z) = 2xyz^2$

احسب $(i)\ \int_C \phi \cdot d\underline{r}\quad ,\ (ii)\ \int_C \underline{F} \wedge d\underline{r}$

حيث C هو المنحنى $x = t^2\ , y = 2t\ , z = t^3$ **من** $t = 0$ **إلى** $t = 1$.

الحل :

$$(i)\ \int_C \phi\, d\underline{r} = \int_C \phi \cdot \left(dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k} \right)$$

$$dx = 2t\ dt \quad , \quad dy = 2\ dt \quad , \quad dz = 3t^2\ dt$$

$$\phi(x,y,z) = 2xyz^2 = 2.\left(t^2\right).(2t).\left(t^6\right) = 4t^9 = \phi(t)$$

$$\therefore \int_C \phi\, d\underline{r} = \int_0^1 \left(4t^9\right)\cdot(2t\ dt)\underline{i} + \int_0^1 \left(4t^9\right)\cdot(2\ dt)\underline{j} + \int_0^1 \left(4t^9\right)\cdot\left(3t^2\ dt\right)\underline{k}$$

$$= \frac{8}{11} t^{11}\Big|_0^1 \underline{i} + \frac{8}{10} t^{10}\Big|_0^1 \underline{j} + \frac{12}{12} t^{12}\Big|_0^1 \underline{k}$$

$$= \frac{8}{11}\underline{i} + \frac{8}{10}\underline{j} + \underline{k}$$

$$(ii)\ \int_C \underline{F} \wedge d\underline{r}$$

$$\underline{F} \wedge d\underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t\ dt & 2\ dt & 3t^2\ dt \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} \int_0^1 \left(-3t^5 - 2t^4\right)dt - \underline{j} \int_0^1 \left(4t^5\right)dt + \underline{k} \int_0^1 \left(4t^3 + 2t^4\right)dt$$

$$\therefore \int_C \underline{F} \wedge d\underline{r} = \frac{-9}{10}\underline{i} - \frac{2}{3}\underline{j} + \frac{7}{5}\underline{k}$$

أنواع التكاملات :

1- التكاملات الخطية ($\int_C$) .

2- التكاملات السطحية ($\iint_S$).

3- التكاملات الحجمية ($\iiint_V$).

التكاملات السطحية

التكاملات على الصورة :

$$\iint_S \underline{A}\cdot d\underline{s} = \iint_S \underline{A}\cdot \underline{n}\, ds \quad , \quad \iint_S \phi\, d\underline{s}$$

تسمى تكاملات سطحية حيث $\underline{n}$ متجه عمودي على السطح الخارج

لحساب مثل هذه التكاملات $\iint_S \phi\, d\underline{s}$:

يكون من المناسب التعبير عنها كتكامل ثنائي مأخوذ على مسقط هذا السط على أحد مستويات الإحداثيات .

نظرية :

بفرض أن السطح S له المسقط R على المستوى xy فإن :

$$\iint_S \underline{A}\cdot\underline{n}\, ds = \iint_R \underline{A}\cdot\underline{n}\, \frac{dxdy}{|\underline{n}\cdot\underline{k}|}$$

مثال :

احسب تكامل $\iint_S \underline{A}\cdot\underline{n}\, ds$ **حيث**

$$\underline{A} = 18z\underline{i} - 12\underline{j} + 3y\underline{k}$$

و S هو الجزء من المستوى

$$2x + 3y + 6z = 12$$

والموجود في الثمن الأول ؟

الحل :

$$\iint_S \underline{A}\cdot\underline{n}\ ds = \iint_R \underline{A}\cdot\underline{n}\ \frac{dxdy}{|\underline{n}\cdot\underline{k}|}$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} \underline{A}\cdot\underline{n}\ \frac{dydx}{|\underline{n}\cdot\underline{k}|}$$

ايجاد $\underline{n}$ متجه الوحدة العمودي على السطح .

$$\phi = 2x + 3y + 6z = 12$$

$$\underline{\nabla}\ \phi = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$$

$$\underline{n} = \frac{2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{2}{7}\underline{i} + \frac{3}{7}\underline{j} + \frac{6}{7}\underline{k}$$

$$\therefore \underline{n}\cdot\underline{k} = \frac{6}{7}$$

$$\underline{A}\cdot\underline{n} = (18z)\left(\frac{2}{7}\right) - 12\left(\frac{3}{7}\right) + (3y)\left(\frac{6}{7}\right)$$

لابد من ايجاد z بدلالة xy لأن التكامل بالنسبة إلى dydx

$$\therefore \underline{A}\cdot\underline{n} = \frac{36}{7}\frac{(12-2x-3y)}{6} - \frac{36}{7} + \frac{18}{7}y$$

$$= \frac{36-12x}{7}$$

$$\iint_S \underline{A}\cdot\ \underline{n}\ ds = \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} \frac{7}{6}\left(\frac{36-12x}{7}\right) dydx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (6-2x)\ dydx$$

$$= \int_0^6 (6-2x)\left(\frac{12-2x}{3}\right) dx = 24$$

ملاحظة :

يمكن إيجاد التكامل السطحي بإستخدام المسقط على المستوى yz أو zx .ويكون التكامل

$$\iint_S \underline{A}\cdot\underline{n}\ ds = \iint_R \underline{A}\cdot\underline{n}\ \frac{dydz}{|\underline{n}\cdot\underline{i}|}$$

$$\iint_S \underline{A}\cdot\underline{n}\ ds = \iint_R \underline{A}\cdot\underline{n}\ \frac{dxdz}{|\underline{n}\cdot\underline{j}|}$$

تمرين :

في المثال السابق احسب التكامل بإعتبار المسقط مره على المستوى yz وأخرى على المستوى zx .

تنويه :

يجب إختيار المساقط بحيث يسهل حساب التكامل الثنائي .

مثال :

احسب $\iint_S \underline{A}\cdot\ \underline{n}\ ds$ **حيث** $\underline{A} = z\ \underline{i} + x\ \underline{j} - 3y^2 z\ \underline{k}$ **و s هوسطح الأسطوانة** $x^2 + y^2 = 16$ **الموجود في الثمن الأول بين z=0 و z=5 ؟**

الحل :

من معادلة الأسطوانه :

$$x: 0 \to 4 \quad , \quad z: 0 \to 5$$

المسقط على xz :

$$\iint_S \underline{A}\cdot\underline{n}\ ds \quad = \iint_R \underline{A}\cdot\underline{n}\ \frac{dxdz}{\left|\underline{n}\cdot\underline{j}\right|}$$

$$\underline{\nabla}\ \phi = \underline{\nabla}\left(x^2+y^2\right) = 2x\underline{i} + 2y\underline{j} + 0\ \underline{k}$$

$$\underline{n} = \frac{2x\underline{i}+2y\underline{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{1}{4}x\underline{i} + \frac{1}{4}y\underline{j}$$

$$\therefore \underline{n}\cdot\underline{j} = \frac{1}{4}y$$

$$\therefore \underline{A}\cdot\underline{n} = \frac{1}{4}(xz+xy)$$

$$\iint_R \underline{A}\cdot\underline{n}\ \frac{dxdz}{\left|\underline{n}\cdot\underline{j}\right|} = \int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4}\left(\frac{xz+xy}{y}\right) dxdz$$

$$= \int_0^5\int_0^4\left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}} + x\right) dxdz$$

$$= \int_0^5 (4z+8)\ dz = 90$$

مثال :

احسب $\iint_S \phi\cdot\underline{n}\ ds$ **حيث** $\phi = \frac{3}{8}xyz$ **و S هو السطح المبين في المثال السابق ؟**

الحل :

$$\iint_S \phi \cdot \underline{n}\ ds = \iint_R \frac{3}{8} xyz\left(\frac{x\underline{i}+y\underline{j}}{4}\right) \frac{dxdz}{\frac{1}{4}y}$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^5\int_0^4 xz\left(x\underline{i}+y\underline{j}\right) dxdz$$

$$= \frac{3}{8}\left[\int_0^5\int_0^4\left(x^2z\underline{i}+xz\sqrt{16-x^2}\,\underline{j}\right) dxdz\right]$$

$$= \frac{3}{8}\left[\int_0^5\left(\frac{64}{3}z\underline{i}+\frac{64}{3}z\underline{j}\right) dz\right] = 100\underline{i}+100\underline{j}$$

مثال :

احسب

$$\iint_S \left(\underline{\nabla}\wedge\underline{F}\right)\cdot\ \underline{n}\ ds$$

و S سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$

فوق المستوى xy حيث

$\underline{F} = y\underline{i}+\left(x-2xz\right)\underline{j}-xy\underline{k}$ ؟

الحل :

$$\underline{\nabla}\ \phi = \underline{\nabla}\left(x^2+y^2+z^2=a^2\right)$$

$$= 2x\underline{i}+2y\underline{j}+2z\ \underline{k}$$

$$\underline{n} = \frac{2\left(x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}\right)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{a}\left(x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}\right)$$

مسقط السطح على المستوى xy هو الدائرة $x^2+y^2=a^2$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x-2xz & -xy \end{vmatrix}$$

$$= x\underline{i} + y\underline{j} - 2z\underline{k}$$

$$\iint_S (\underline{\nabla} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{n} \;\; ds = \iint_R (\underline{\nabla} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{n} \;\; \frac{dxdy}{|\underline{n} \cdot \underline{k}|}$$

$$= \iint_R \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{z} \, dxdy$$

$$\because z^2 = a^2 - x^2 - y^2$$

$$\therefore \iint_S (\underline{\nabla} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{n} \;\; ds = \iint_R \frac{3x^2 + 3y^2 - 2a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy$$

حيث R هي الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$

من المناسب استخدام الاحداثيات القطبية

لإيجاد هذا التكامل

let $x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad dxdy = r\,drd\theta$

$r: 0 \to a \quad , \quad \theta: 0 \to 2\pi$

$$\therefore \iint_R \frac{3x^2+3y^2-2a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{3r^2-2a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\;rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{3\left(r^2-a^2\right)+a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\;rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a -3\sqrt{a^2-r^2}\;rdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{a^2r}{\sqrt{a^2-r^2}}\;rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a -3\sqrt{a^2-r^2}\;rdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{a^2r}{\sqrt{a^2-r^2}}\;rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-3}{-2}\cdot\frac{2}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\,d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{1}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(a^3-a^3\right)^{\frac{3}{2}}d\theta = 0$$

التكاملات الحجمية

نعتبر سطحاً مغلقاً في الفراغ يحتوي حجم V التكاملات على V تسمى تكاملات حجميه يرمز بالرمز dxdydz أو

$$\iiint_V \underline{A}\;dV \quad \text{or} \quad \iiint_V \phi\;dV$$

تمرين :

ليكن

$$\underline{F} = 2xz\underline{i} - x\underline{j} + y^2\underline{k}$$

احسب $\iiint_V \underline{F}\;dV$ حيث V منطقة محدودة بالسطح :

$$x=0 \;,\; y=0 \;,\; z=0 \;,\; z=x^2 \;,\; z=4$$

نظرية جرين :

إذا كانت R منطقة مغلقة في المستوى xy محدوده بمنحنى بسيط مغلق C وإذا كانت N و M دوال متصلة بالنسبة لـ y,x ولهم مشتقات متصلة في المنطقة R فإن :

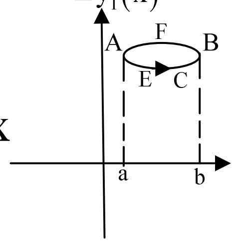
$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

الإثبات :

(i) إذا كان المنحنى c منحنى مغلق له الخاصية أن أي مستقيم يوازي أحد محاور الإحداثيات يقطع C في نقطتين على الأكثر

نفرض أن معادلة المنحنى AEB هي $y = y_1(x)$ ومعادلة المنحنى BFA هي $y = y_2(x)$

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dydx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\frac{\partial M}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b \left[M(x,y) \right]_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx$$



$$= \int_a^b \left[M(x,y_2) - M(x,y_1) \right] dx$$

$$= -\int_a^b M(x,y_1)\,dx - \int_b^a M(x,y_2)\,dx$$

$$\therefore \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dydx = -\oint_C M\,dx \qquad ...(1)$$

بالمثل نحصل على :

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dxdy = \int_e^f \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial N}{\partial x} dx \right] dy = \int_e^f \left[N(x,y) \right]_{x_1}^{x_2} dy$$

$$\therefore \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dydx = \oint_C N\,dy \qquad ...(2)$$

بجمع (1) و(2) نجد أن :

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

(ii) إذا كانت الخطوط الموازية للمحاور يمكن أن يقطع المنحنى C في أكثر من نقطتين في هذه الحالة نقسم المنطقة المحدودة إلى مجموعة من المناطق تمثل الحالة الأولى .

$$\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2}$$

مثال :

حقق نظرية جرين في المستوى لتكامل

$$\oint_C \left(xy + y^2\right)dx + x^2\ dy$$

حيث c منحنى مغلق في المنطقة المحدودة بالمنحنيات :

$$y = x \quad , \quad y = x^2$$

الحل :

أولاً نقوم بحساب :

$$\oint_C \left(xy + y^2\right)dx + x^2\ dy$$

على المنحنى C_1 : $y = x^2$

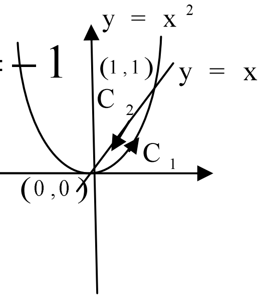
$$\oint_{C_1} \left(xy + y^2\right)dx + x^2\ dy \ =$$

$$\int_0^1 \left(x^3 + x^4\right)dx + x^2\left(2xdx\right) \ =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{19}{20}$$

على المنحنى C_2: $y = x$

$$\oint_{C_2} \left(xy + y^2\right)dx + x^2\ dy \ = \int_1^0 3x^2 dx = -1$$



$$\therefore \oint_C \left(xy + y^2\right)dx + x^2\ dy \ = -\frac{1}{20}$$

ثانياً : نحسب : $\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R (2x-x-2y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x-2y)\,dydx$$

$$=\int_0^1 \left[xy-y^2\right]_{x^2}^{x} dx = -\frac{1}{20}$$

$$\therefore \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$$

مثال :

اثبت أن المساحة المحدودة بواسطة منحنى بسيط مغلق C تعطى من العلاقة :

$$A=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - ydx$$

الحل :

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$$

بوضع : $N = x \quad , \quad M = -y$

$$\therefore \oint_C x\,dy - ydx = \iint_R (1+1)\,dxdy = 2A$$

$$\therefore A=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - ydx$$

مثال :

اوجد مساحة القطع الناقص :

$$x = a\cos\theta \quad , \quad y = b\,\sin\theta$$

الحل :

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\ dy - ydx$$
$$= \frac{1}{2}\oint_C \left[(a\cos\theta)b\cos\theta\ d\theta + (b\ \sin\theta)a\ \sin\theta d\theta\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\ d\theta = \frac{ab}{2}(2\pi) = ab\pi$$

مثال :

ضع نظرية جرين في الصورة الإتجاهية ؟

الحل :

$$\oint_C M\ dx + N\ dy \ = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$
$$d\underline{r} = dx\ \underline{i} + dy\ \underline{j} \quad , \underline{A} = M\ \underline{i} + N\ \underline{j}$$
$$\underline{A}\cdot d\underline{r} = M\ dx\ + N\ dy$$
$$\underline{\nabla}\wedge\underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \left(-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\underline{k}$$
$$\therefore (\underline{\nabla}\wedge\underline{A})\cdot\underline{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

إذن الصورة الإتجاهية لنظرية جرين هي :

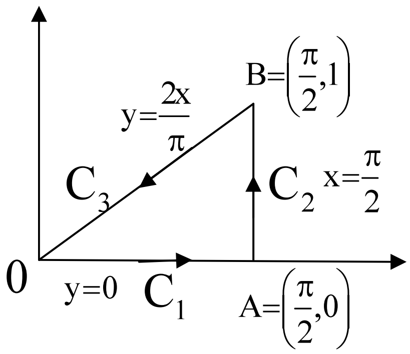
$$\oint_C \underline{A}\cdot d\underline{r} \ = \iint_R (\underline{\nabla}\wedge\underline{A})\cdot\underline{k}\ dR$$

مثال :

احسب التكامل :

$$\oint_C (y-\sin x)dx+\cos x dy$$

حيث C هو المثلث الموضح بالشكل :



الحل :

بإستخدام نظرية جرين :

$$M(x,y)=y-\sin x \quad , \quad N(x,y)=\cos x$$

$$\therefore \oint_C M\,dx+N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{2x/\pi}(-\sin x-1)\,dydx$$

$$=\int_{x=0}^{\pi/2}\left[-y\sin x-y\right]_0^{2x/\pi}\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{\pi/2}\left[-\frac{2x}{\pi}\sin x-\frac{2x}{\pi}\right]dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}(-x\cos x+\sin x)-\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{4}$$

تنويه :

يمكن حساب التكامل بحساب التكاملات الخطية على C_1, C_2, C_3 .

نظرية التباعد لجاوس :

إذا كان Vهو الحجم المحدد بالسطح المغلق S وكانت A دالة إتجاهية لها مشتقات متصلة عندئذ فإن :

$$\iiint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{A} \; dV = \iint_S \underline{A} \cdot \underline{n} \; ds$$

حيث $\underline{n}$ هو العمودي على السطح إلى الخارج

أو

$$\iiint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{A} \; dV = \oiint_S \underline{A} \cdot \; d\underline{s}$$

البرهان :

نفرض أن S سطح مغلق محدود بسطح سفلي S_1 معادلته $z = f_1(x,y)$ وسطح آخر علوي S_2 معادلته $z = f_2(x,y)$ السطحان معاً يكونان السطح المغلق S ويحصران حجماً V

$$\begin{aligned} dA_1 &= dS_1 \; \cos\theta \\ &= dS_1 \; (\underline{n}_1 \cdot \underline{k}) \end{aligned}$$

dS_2 عنصر من السطح S_2

$$dA_2 = dxdy = \; dS_2 \; (\underline{n}_2 \cdot \; \underline{k})$$

$$dA_1 = dxdy = -dS_1 \; (\underline{n}_1 \cdot \underline{k})$$

مسقط المتجه $\underline{A}$ على $\underline{B}$

$$\underline{A} \cdot \hat{\underline{B}} = \left|\underline{A}\right|\left|\hat{\underline{B}}\right| \cos\theta = A\cos\theta = dS_1 \cos\theta$$

$$\iint_R A_3\left(x, y, f_2\right) dydx \ = \iint_{S_2} A_3\left(\underline{k} \cdot \underline{n_2}\right) dS_2 \qquad ...(*)$$

$$\underline{A} = A_1 \underline{i} + A_2 \underline{j} + A_3 \underline{k}$$

$$\iint_R A_3\left(x, y, f_1\right) dydx \ = -\iint_{S_1} A_3\left(\underline{k} \cdot \underline{n_1}\right) dS_1 \qquad ...(**)$$

وبالجمع نحصل على :

$$\iint_R A_3\left(x, y, f_2\right) dydx \ - \iint_R A_3\left(x, y, f_1\right) dydx \ =$$

$$\iint_{S_2} A_3\left(\underline{k} \cdot \underline{n_2}\right) dS_2 \ + \iint_{S_1} A_3\left(\underline{k} \cdot \underline{n_1}\right) dS_1 =$$

$$\iint_S A_3\left(\underline{k} \cdot \underline{n}\right) dS$$

$$\therefore \ \iiint_V \frac{\partial A_3\left(x, y, z\right)}{\partial z} dxdydz = \iint_S A_3\left(\underline{k} \cdot \underline{n}\right) dS \qquad ...(1)$$

بالمثل يمكن إثبات أن

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y} dxdydz = \iint_S A_2\left(\underline{k} \cdot \underline{n}\right) dS \qquad ...(2)$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dxdydz = \iint_S A_1\left(\underline{k} \cdot \underline{n}\right) dS \qquad ...(3)$$

وبجمع (1)و (2) و(3) نحصل على :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial A_1\left(x, y, z\right)}{\partial x} + \frac{\partial A_2\left(x, y, z\right)}{\partial y} + \frac{\partial A_2\left(x, y, z\right)}{\partial z}\right] dxdydz$$

$$= \iint_S \left[\left(A_1 \underline{i} + A_2 \underline{j} + A_3 \underline{k}\right) \cdot \underline{n}\right] dS$$

أي أن $\iiint_V \left(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}\right) dV = \iint_S \left(\underline{A} \cdot \underline{n}\right) dS$

مثال :

احسب $\iint\limits_{S}(\underline{F}\cdot\underline{n})ds$ **حيث**

$$\underline{F}=4xz\underline{i}-y^{2}\underline{j}+yz\underline{k}$$

و S هو سطح المكعب المحدود بالمستويات :

$$x=0\ ,\ x=1\ ,\ y=0\ ,\ y=1\ ,\ z=0\ ,\ z=1$$

الحل :

بإستخدام نظرية جاوس :

$$\iiint\limits_{V}(\underline{\nabla}\cdot\underline{F})dV=\iint\limits_{S}(\underline{F}\cdot\underline{n})dS$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$=4z-2y+y$$

$$\therefore\iiint\limits_{V}(4z-2y+y)dxdydz=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(4z-y)dxdydz$$

$$=\int_0^1\int_0^1\Big[(4z-y)x\Big]_0^1dydz$$

$$=\int_0^1\left(4zy-\frac{y^2}{2}\right)_0^1dz$$

$$=\left(2z^2-\frac{1}{2}z\right)_0^1=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\iint\limits_{S}(\underline{F}\cdot\underline{n})ds=\frac{3}{2}$$

مثال :

حقق نظرية جاوس في الصيغة العمودية ؟

الحل :

نفرض أن

$$\underline{A} = A_1\underline{i} + A_2\underline{j} + A_3\underline{k}$$

$$\underline{n} = n_1\underline{i} + n_2\underline{j} + n_3\underline{k}$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\underline{n} \cdot \underline{i} = n_1 = \cos\alpha$$

$$\underline{n} \cdot \underline{j} = n_2 = \cos\beta$$

$$\underline{n} \cdot \underline{k} = n_3 = \cos\gamma$$

حيث α, β, γ هي الزوايا التي يصنعها متجه الوحدة $\underline{\hat{n}}$ مع الإتجاهات الموجبة x,y,z على الترتيب .

$$\underline{A} \cdot \underline{n} = \left(A_1\underline{i} + A_2\underline{j} + A_3\underline{k}\right) \cdot \left(\cos\alpha\,\underline{i} + \cos\beta\,\underline{j} + \cos\gamma\,\underline{k}\right)$$
$$= A_1\cos\alpha + A_2\cos\beta + A_3\cos\gamma$$

بالتعويض عن $\underline{\nabla} \cdot \underline{A}$, $\underline{A} \cdot \underline{n}$ في نظرية جاوس

نحصل على الصيغة العمودية :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right] dV$$
$$= \iint_S \left[\, A_1\cos\alpha + A_2\cos\beta + A_3\cos\gamma\right] dS$$

مثال :

حقق نظرية جاوس للدالة الإتجاهية $\underline{F} = 4x\underline{i} - 2y^2\underline{j} + z^2\underline{k}$

على سطح الأسطوانة

$$z = 0 \; , \; z = 3 \; , \; x^2 + y^2 = 4$$ ؟

الحل :

أولاً التكامل الحجمي I_V:

$$\because \underline{\nabla}\cdot\underline{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$
$$=4-4y+2z$$

$$\therefore I_V=\iiint_V \underline{\nabla}\cdot\underline{F}\ dV=\iint_R\int_0^3 (4-4y+2z)\,dzdxdy$$
$$=\iint_R\left[4z-4yz+z^2\right]_0^3 dxdy$$
$$=\iint_R (21-12y)\,dxdy$$

التكامل المتبقي يكون على دائرة هي قاعدة الأسطوانة نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل (0,0) .

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \quad , \quad dxdy=r\ drd\theta$$
$$\therefore \iiint_V \underline{\nabla}\cdot\underline{F}\ dV=\iint_R (21-12y)\,dxdy$$
$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}(21-12r\sin\theta)\ rd\theta dr$$
$$=\int_0^2\left[21\theta r-12r^2\cos\theta\right]_0^{2\pi} dr$$
$$=\int_0^2[42\pi r]dr=\left[21\pi r^2\right]_0^2=84\pi$$

ثانياً : التكامل السطحي I_S:

يتكون سطح الأسطوانة من القاعدة السفلية S_1 (z=0) والقاعدة العلوية z=3 والسطح الجانبي S_3 $(x^2+y^2=4)$

$$\therefore I_S = \iint_S (\underline{F} \cdot \underline{n}) dS = \iint_{S_1} (\underline{F} \cdot \underline{n}) dS_1 + \iint_{S_2} (\underline{F} \cdot \underline{n}) dS_2 + \iint_{S_3} (\underline{F} \cdot \underline{n}) dS_3$$

على سطح القاعدة السفلية S_1: z=0

يكون $z = 0\ ,\ \underline{n} = -\underline{k}$

$$\because \underline{F} = 4x\underline{i} - 2y^2\underline{j}$$

$$\therefore \underline{F} \cdot \underline{n} = 0 \rightarrow \iint_{S_1} (\underline{F} \cdot \underline{n}) dS_1 = 0$$

القاعدة العلوية S_2 يكون $z = 3\ ,\ \underline{n} = \underline{k}$

$$\because \underline{F} = 4x\underline{i} - y^2\underline{j} + 9\underline{k}$$

$$\therefore \underline{F} \cdot \underline{n} = 9 \rightarrow \iint_{S_2} (\underline{F} \cdot \underline{n}) dS_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} 9\ r dr d\theta = 9.4\pi = 36\pi$$

إلى السطح الجانبي S_3 $(x^2 + y^2 = 4)$ يكون متجه الوحدة العمودي على هذا السطح هو $\underline{n}$

$$\underline{n} = \frac{\underline{\nabla}\ \phi}{|\underline{\nabla}\ \phi|} = \frac{2x\underline{i} + 2y\underline{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{1}{2}(x\underline{i} + y\underline{j})$$

المعادلات البارامتريه للسطح الجانبي هي :

$$x = 2\cos\theta \quad , \quad y = 2\sin\theta$$

$$\underline{F} \cdot \underline{n} = \left(4x\underline{i} - 2y^2\underline{j} + z^2\underline{k}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(x\underline{i} + y\underline{j}\right)$$

$$= 2x^2 - y^3$$

$$\therefore \iint_{S_3} (\underline{F} \cdot \underline{n}) dS_3 = \iint_{S_3} \left(2x^2 - y^3\right) dS_3$$

ويعرف عنصر سطح الأسطوانة في الإحداثيات الأسطوانية :

$$ds = 2dzd\theta$$

$$\therefore \iint_{S_3}\left(2x^2 - y^3\right)dS_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^3\left[2(2\cos\theta)^2 - (2\sin\theta)^3\right]2dzd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\left[16\cos^2\theta - 16\sin^3\theta\right]dzd\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\left[16\cos^2\theta - 16\sin^3\theta\right]d\theta = 48\pi$$

$$\therefore I_S = \iint_S\left(\underline{F}\cdot\underline{n}\right)dS = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$$

$$\therefore I_S = I_V$$

إذن تتحقق نظرية جاوس .

مثال :

أثبت أن $\iiint_V \underline{\nabla}\phi\ dV = \iint_S \phi\ \underline{n}\ ds$ **حيث** ϕ **دالة غير متجهه قابلة للإشتقاق ؟**

الحل :

من نظرية جاوس :

$$\because \iiint_V\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}\right)dV = \iint_S\left(\underline{A}\cdot\underline{n}\right)dS$$

بوضع المتجه $\underline{A} = \phi\underline{C}$ حيث $\underline{C}$ متجه ثابت نحصل على :

$$\iiint_V \underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{C})dV = \iint_S (\phi\underline{C}\cdot\underline{n})ds$$

$$\because (\underline{\nabla}\cdot\phi\underline{C}) = \underline{\nabla}\phi\cdot\underline{C} = \underline{C}\cdot\underline{\nabla}\phi$$

$$(\phi\underline{C})\cdot\underline{n} = \underline{C}\cdot(\phi\underline{n})$$

$$\because \iiint_V \underline{C}\cdot\underline{\nabla}\phi\ dV = \iint_S \underline{C}\cdot(\phi\underline{n})ds$$

$$\underline{C}\cdot \iiint_V \underline{\nabla}\phi\ dV = \underline{C}\iint_S \phi\underline{n}\ ds$$

$$\therefore \iiint_V \underline{\nabla}\phi\ dV = \iint_S (\phi\underline{n})ds$$

مثال :

أثبت أن $\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)dV = \iint_S (\phi\underline{\nabla}\psi - \psi\underline{\nabla}\phi)\ \ ds$

الحل :

بوضع $\underline{A} = \phi\underline{\nabla}\psi$ في نظرية جاوس :

$$\iiint_V \underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{\nabla}\psi)dV = \iint_S (\phi\underline{\nabla}\psi\cdot\underline{n})\ \ ds\ \ = \iint_S \phi\underline{\nabla}\psi\cdot ds$$

$$\because \underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{\nabla}\psi) = \phi(\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\psi) + \underline{\nabla}\phi\cdot\underline{\nabla}\psi$$

$$= \phi\nabla^2\psi + \underline{\nabla}\phi\cdot\underline{\nabla}\psi$$

$$\therefore \iiint_V \underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{\nabla}\psi)dV = \iiint_V (\phi\nabla^2\psi + \underline{\nabla}\phi\cdot\underline{\nabla}\psi)dV$$

$$= \iint_S \phi\underline{\nabla}\psi\cdot\underline{n}\ \ ds \qquad ...(1)$$

بإستبدال ψ مع ϕ في المعادلة (1) نحصل على :

أي بوضع $\underline{A} = \psi\underline{\nabla}\phi$:

$$\iiint_V (\psi\nabla^2\phi + \underline{\nabla}\psi\cdot\underline{\nabla}\phi)dV = \iint_S \psi\underline{\nabla}\phi\cdot\underline{n}\ \ ds \qquad ...(2)$$

وبطرح (2) من (1) نحصل على :

$$\iiint_V \left(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi\right)dV=\iint_S \left(\phi\underline{\nabla}\psi-\psi\underline{\nabla}\phi\right)\ ds$$

مثال :

أثبت أن $\iiint_V \left(\underline{\nabla}\wedge\underline{B}\right)dV=\iint_S \left(\underline{n}\wedge\underline{B}\right)\ ds$ ؟

الحل :

بوضع $\underline{A}=\underline{B}\wedge\underline{C}$ في نظرية جاوس حيث $\underline{C}$متجه ثابت نحصل على :

$$\iiint_V \underline{\nabla}\cdot\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)dV=\iint_S \left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)\cdot\underline{n}\ ds$$

$$\because\ \underline{\nabla}\cdot\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=\underline{C}\cdot\left(\underline{\nabla}\wedge\underline{B}\right)+0$$

$$\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)\cdot\underline{n}=\underline{B}\cdot\left(\underline{C}\wedge\underline{n}\right)=\left(\underline{C}\wedge\underline{n}\right)\cdot\underline{B}=\underline{C}\cdot\left(\underline{n}\wedge\underline{B}\right)$$

$$\because\ \iiint_V \underline{C}\cdot\left(\underline{\nabla}\wedge\underline{B}\right)\ dV=\iint_S \underline{C}\cdot\left(\underline{n}\wedge\underline{B}\right)ds$$

$$\underline{C}\cdot\iiint_V \left(\underline{\nabla}\wedge\underline{B}\right)\ dV=\underline{C}\iint_S \left(\underline{n}\wedge\underline{B}\right)\ ds$$

$$\therefore\ \iiint_V \left(\underline{\nabla}\wedge\underline{B}\right)\ dV=\iint_S \left(\underline{n}\wedge\underline{B}\right)ds$$

نظرية ستوكس :

$$\oint_C \underline{A}\cdot d\underline{r}=\iint_S \left(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}\right)\cdot\underline{n}\ \ ds$$

إذا كان S سطحاً مفتوحاً محدداً بمنحنى مغلق بسيط c وإذا كانت $\underline{A}$دالة متجهه لها مشتقات متصلة فإن :

$$\oint_C \underline{A}\cdot d\underline{r}=\iint_S \left(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}\right)\cdot\underline{n}\ \ ds\ =\iint_S \left(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}\right)\wedge ds$$

البرهان :

نفرض أن S سطحاً بحيث أن اسقاطه على المستوى xy أو yz أو zx منطقة R محدودة بمنحنى بسيط مغلق ونفرض أن S يمكن تمثيلها بالمعادلة

$$z=f\left(x,y\right)\ ,\ x=g\left(y,z\right)\ ,\ y=h\left(z,x\right)$$

المطلوب إثبات أن :

$$\iint_S\left(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}\right)\cdot\underline{n}\ \ ds\ =\iint_S\underline{\nabla}\wedge\left(A_1\underline{i}+A_2\underline{j}+A_3\underline{k}\right)\cdot\underline{n}\ ds$$

$$=\oint_C\underline{A}\cdot d\underline{r}$$

نحسب أولاً : $\iint_S\underline{\nabla}\wedge\left(A_1\underline{i}\right)\cdot\underline{n}\ ds$

$$\underline{\nabla}\wedge\left(A_1\underline{i}\right)=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial A_1}{\partial z}\underline{j}+\frac{\partial A_1}{\partial y}\underline{k}$$

$$\therefore\underline{\nabla}\wedge\left(A_1\underline{i}\right)\cdot\underline{n}=\frac{\partial A_1}{\partial z}\underline{j}\cdot\underline{n}+\frac{\partial A_1}{\partial y}\underline{k}\cdot\underline{n}$$

$$\therefore\ \iint_S\left[\underline{\nabla}\wedge\left(A_1\underline{i}\right)\cdot\underline{n}\right]ds=\iint_S\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\underline{j}\cdot\underline{n}+\frac{\partial A_1}{\partial y}\underline{k}\cdot\underline{n}\right)ds\qquad...(1)$$

وبما أن معادلة السطح هي : $z=f\left(x,y\right)$

إذن متجه الموضع أي نقطة على السطح هي :

$$\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+f\left(x,y\right)\underline{k}$$

$$\frac{\partial\underline{r}}{\partial y}=\underline{j}+\frac{\partial f}{\partial y}\underline{k}$$

وبما أن $\frac{\partial \underline{r}}{\partial y}$ هو متجه المماس للسطح إذن

$$\underline{n} \perp \frac{\partial \underline{r}}{\partial y} \Rightarrow \underline{n} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial y} = 0$$

$$\left(\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{k} \right) \underline{n} = 0$$

$$\underline{n} \cdot \underline{j} = -\frac{\partial f}{\partial y} \underline{n} \cdot \underline{k}$$

و بالتعويض في (1) نحصل على :

$$\iint_S \left[\underline{\nabla} \wedge \left(A_1 \underline{i} \right) \cdot \underline{n} \right] ds = \iint_S - \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) \underline{n} \cdot \underline{k} \ ds \quad ...(2)$$

$$\because A_1 = A_1(x, y, z) = A_1\left(x, y, f(x, y)\right) = F(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\therefore \iint_S \left[\underline{\nabla} \wedge \left(A_1 \underline{i} \right) \cdot \underline{n} \right] ds = \iint_S - \frac{\partial F}{\partial y} \underline{n} \cdot \underline{k} \ ds \ = - \iint_R \frac{\partial F}{\partial y} dxdy$$

$$= \oint_C F \ dx$$

بالمثل :

$$\iint_S \left[\underline{\nabla} \wedge \left(A_2 \underline{j} \right) \cdot \underline{n} \right] ds = \oint_C A_2 \ dy$$

$$\iint_S \left[\underline{\nabla} \wedge \left(A_3 \underline{k} \right) \cdot \underline{n} \right] ds = \oint_C A_3 \ dz$$

بالجمع نحصل على :

$$\iint_S (\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) \cdot \underline{n} \; ds = \iint_S (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

$$= \oint_C \underline{A} \cdot d\underline{r}$$

مثال :

استنتج الصورة العمودية لنظرية ستوكس ؟

الحل :

$$\underline{A} = A_1 \underline{i} + A_2 \underline{j} + A_3 \underline{k}$$

$$\underline{n} = \cos\alpha \, \underline{i} + \cos\beta \, \underline{j} + \cos\gamma \, \underline{k}$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \underline{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \underline{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \underline{k}$$

$$(\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) \cdot \underline{n} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos\beta$$

$$+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos\gamma$$

إذن الصورة العمودية هي :

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] ds$$

$$= \oint_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

مثال :

حقق نظرية ستوكس إذا كانت $\underline{A}=(2x-y)\underline{i}-yz^2\underline{j}-y^2z\underline{k}$

وS هو نصف السطح العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=1$ **وc هي حدودها ؟**

الحل :

المطلوب إثبات أن :

$$\oint_C \underline{A}\cdot d\underline{r}=\iint_S (\underline{\nabla}\wedge\underline{A})\cdot\underline{n}\ \ ds$$

$$\underline{\nabla}\wedge\underline{A}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z\end{vmatrix}$$

$$=0\,\underline{i}+0\,\underline{j}+\underline{k}=\underline{k}$$

$$(\underline{\nabla}\wedge\underline{A})\cdot\underline{n}=\underline{k}\cdot\underline{n}$$

$$\iint_S\left[(\underline{\nabla}\wedge\underline{A})\cdot\underline{n}\right]ds=\iint_S(\underline{k}\cdot\underline{n})ds=\iint_R dxdy=\pi$$

$$\oint_C \underline{A}\cdot d\underline{r}=\oint_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

$$=\oint_C(2x-y)dx-z^2ydy-yz^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\cos t-\sin t)(-\sin t)dt=\pi$$

وبذلك تكون نظرية ستوكس متحققة .

الإحداثيات المنحنية

إذا أمكن التعبير عن الإحداثيات x,y,z بدلالة الإحداثيات u_1, u_2, u_3 في الصورة :

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u_1, u_2, u_3) \\ y &= y(u_1, u_2, u_3) \\ z &= z(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

فإنه بحل المعادلات (1) في u_1, u_2, u_3 كدوال في x,y,z نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_1(x, y, z) \\ u_2 &= u_2(x, y, z) \\ u_3 &= u_3(x, y, z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(2)$$

الدوال الموجودة في العلاقات (2), (1) ومشتقاتها متصلة بحيث يكون التناظر بين (x, y, z) , (u_1, u_2, u_3) وحيدا.

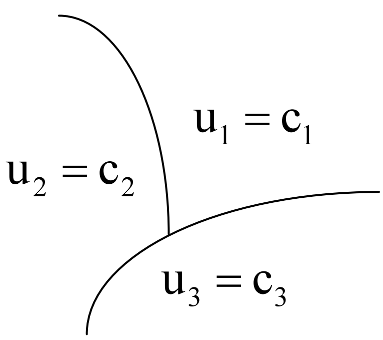
إذا كانت النقطة P لها متجه الموضع $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

فإنه يمكن تكوين إحداثيات u_1, u_2, u_3 وذلك بإستخدام المعادلات (2) تسمى في هذه الحاله الإحداثيات ***بالإحداثيات المنحنية للنقطة P*** .

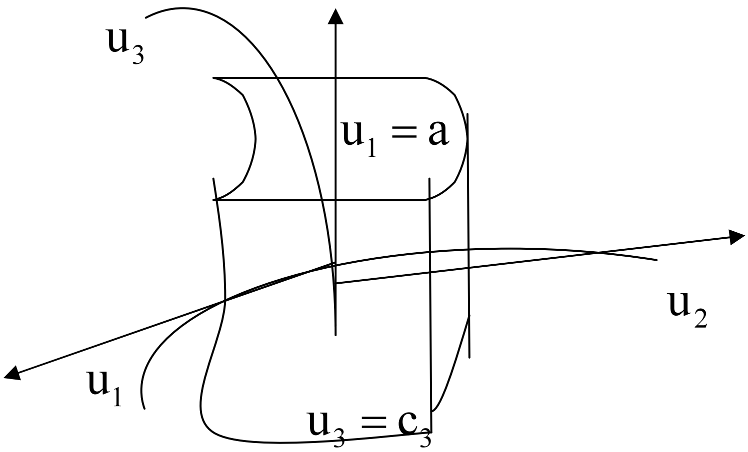
إحداثيات المنحنيات المتعامدة :

تسمى السطوح $u_3 = c_3$, $u_2 = c_2$, $u_1 = c_1$

سطوح إحداثيات حيث c_i ثوابت



تقاطع هذه السطوح كل اثنين منهم في منحنيات تسمى منحنيات الإحداثيات وإذا حدث وتقاطعت تلك السطوح على التعامد فإننا نسمي تلك الإحداثيات بالإحداثيات المتعامدة .



نحتاج لتعريف متجهات وحده على هذه الإحداثيات المنحنية المتعامدة فإن متجه الموضع لها هو :

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\therefore \underline{r} = \underline{r}\left(u_1, u_2, u_3\right)$$

ميل المماس للمنحنى u_1 عند النقطة P هو :

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}$$

بالتالي متجه الوحده عليه هو :

$$\underline{e}_1 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1} \Big/ \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}\right|$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1} = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}\right| \underline{e}_1 = h_1 \underline{e}_1$$

حيث : $h_1 = \left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}\right|$

بالمثل :

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2} = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2}\right| \underline{e}_2$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_3} = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_3}\right| \underline{e}_3$$

تسمى

$$\text{عوامل القياس } h_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}\right| \quad , \quad i = 1,2,3$$

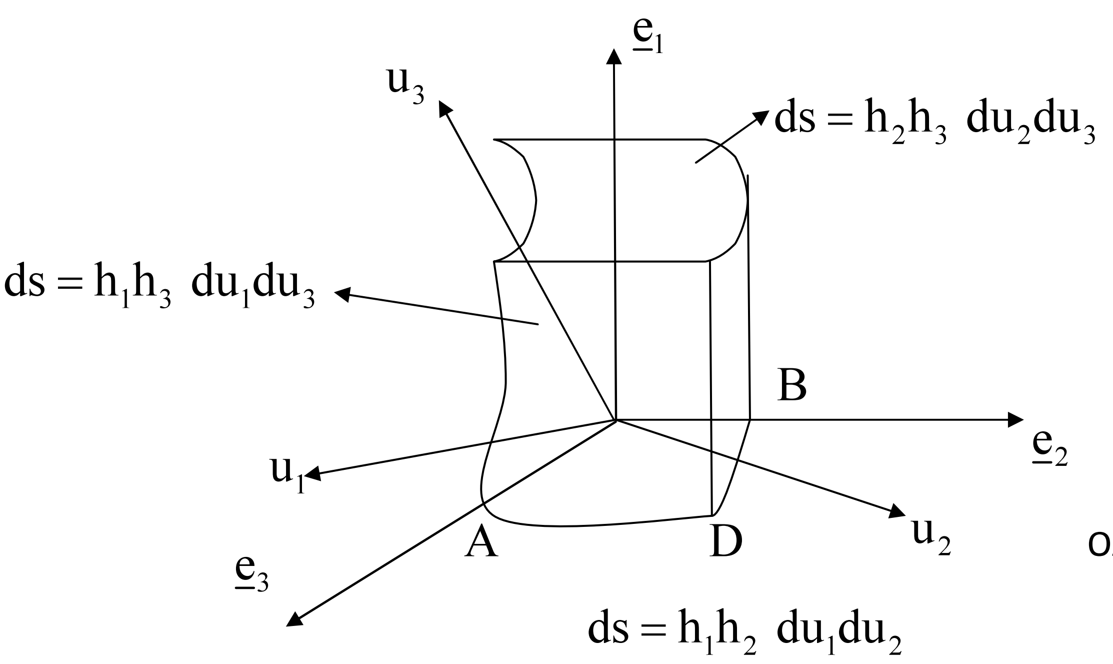
وتسمى $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ متجهات الوحده على المنحنيات u_1, u_2, u_3 وهي متساوية

$$\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} / \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}\right|$$

نلاحظ أن

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0 \quad , \quad \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 = 0 \quad , \quad \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3 = 0$$

إيجاد عنصر المساحة وعنصر الحجم في الإحداثيات المنحنية :



عنصر المساحة للوجه OADB

تعريف عنصر الحجم في الإحداثيات المنحنية

$$dV = h_1 h_2 h_3 \; du_1 du_2 du_3$$

الانحدار والتباعد و الإلتواء في الإحداثيات :

المطلوب أولاً : $\underline{\nabla} \; \phi$

نفرض أن

$$\underline{\nabla} \; \phi = \phi_1 \; \underline{e}_1 + \phi_2 \; \underline{e}_2 + \phi_3 \; \underline{e}_3$$

المطلوب إيجاد $\phi_1 \; , \; \phi_2 \; , \; \phi_3$

$$\because \underline{\nabla} \; \phi = \frac{d\phi}{d\underline{r}} \rightarrow d\phi = \underline{\nabla} \; \phi \cdot d\underline{r} \quad ...(1)$$

$$\because \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2, u_3)$$

$$d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_3} du_3$$

$$= h_1 \underline{e}_1 \; du_1 + h_2 \underline{e}_2 \; du_2 + h_3 \underline{e}_3 \; du_3$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على :

$$d\phi = (\phi_1 \; \underline{e}_1 + \phi_2 \; \underline{e}_2 + \phi_3 \; \underline{e}_3) \cdot (h_1 \underline{e}_1 \; du_1 + h_2 \underline{e}_2 \; du_2 + h_3 \underline{e}_3 \; du_3)$$

$$d\phi = \phi_1 h_1 du_1 + \phi_2 h_2 du_2 + \phi_3 h_3 du_3 \quad ...(2)$$

$$\because \phi = \phi(u_1, u_2, u_3)$$

$$\therefore d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3} du_3 \quad ...(3)$$

بمقارنة (2) و(3) نحصل على :

$$\phi_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial u_1}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial u_2}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial u_3}$$

$$\therefore \underline{\nabla}\, \phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\ \underline{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\ \underline{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial u_3}\ \underline{e}_3$$

إذا كانت $\underline{A}$ دالة اتجاهية بنفس الطريقة يمكن الحصول على $\underline{\nabla} \cdot \underline{A}$, $\underline{\nabla} \wedge \underline{A}$:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2 h_3 A_1\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1 h_3 A_2\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1 h_2 A_3\right)\right]$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{A} = \begin{vmatrix} h_1 \underline{e}_1 & h_2 \underline{e}_2 & h_3 \underline{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$\underline{e}_1 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1} \Big/ \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}\right|$$

$$= \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}\right| \quad , \quad h_2 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2}\right| \quad , \quad h_3 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_3}\right|$$

أي أن :

$$h_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}\right| \qquad , \qquad i = 1,2,3$$

بعض الحالات الخاصة :

1) الإحداثيات الكارتيزية :

$$u_1 = x \quad , \quad u_2 = y \quad , \quad u_3 = z$$

$$\underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2, u_3) = \underline{r}(x, y, z)$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}\right| = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x}\right| = |\underline{i}| = 1$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2}\right| = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial y}\right| = |\underline{j}| = 1$$

$$h_3 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_3}\right| = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial z}\right| = |\underline{k}| = 1$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

$$\underline{e}_1 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1} / \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}\right| = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x} / \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x}\right|$$

$$\therefore \ \underline{e}_1 = \underline{i} \ , \quad \underline{e}_2 = \underline{j} \ , \quad \underline{e}_3 = \underline{k}$$

وفي هذه الحالة تكون عنصر المساحة وعنصر الحجم

$$(1) \ ds = h_1 h_2 \ du_1 du_2 = dxdy$$

$$(2) \ dV = h_1 h_2 h_3 \ du_1 du_2 du_3 = dxdydz$$

$$(3) \ \underline{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\underline{k}$$

$$(4) \ \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$(5) \ \underline{\nabla} \wedge \underline{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\underline{i} - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\underline{k}$$

$$(6) \ \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

2) الاحداثيات الاسطوانية :

$$(u_1,u_2,u_3)=(\rho,\varphi,z)$$

$$\underline{r}=\rho\cos\varphi\,\underline{i}+\rho\sin\varphi\,\underline{j}+z\underline{k}$$

$$h_1=\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial u_1}\right|=\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial\rho}\right|=\left|\cos\varphi\,\underline{i}+\sin\varphi\,\underline{j}\right|=1$$

$$h_2=\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial u_2}\right|=\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial\varphi}\right|=\left|-\rho\sin\varphi\,\underline{i}+\rho\cos\varphi\,\underline{j}\right|=\sqrt{\rho^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)}=\rho$$

$$h_3=\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial u_3}\right|=\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial z}\right|=\left|\underline{k}\right|=1$$

$$h_1=1\quad,\quad h_2=\rho\quad,\quad h_3=1$$

في الاحداثيات الاسطوانية يكون :

$$(1)\ ds=h_1h_2\ du_1du_2=\rho\ d\varphi\ d\rho$$

$$(2)\ dV=h_1h_2h_3\ du_1du_2du_3=\rho\ d\varphi\ d\rho\ dz$$

$$(3)\ \underline{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\underline{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\underline{e}_\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{e}_z$$

$$(4)\ \underline{\nabla}\cdot\underline{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho A_z\right)\right]$$

$$(5)\ \underline{\nabla}\wedge\underline{A}=\frac{1}{\rho}[\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial z}\right)\underline{e}_\rho+\left(\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\underline{e}_\varphi$$
$$+\left(\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\underline{e}_z]$$

$$(6)\ \nabla^2\phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

3) الاحداثيات الكروية :

$$(u_1,u_2,u_3)=(r,\theta,\varphi)$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$= r\sin\theta\cos\varphi\,\underline{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\underline{j} + r\cos\theta\,\underline{k}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1}\right| = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\right|$$

$$= \left|\ \sin\theta\cos\varphi\,\underline{i} + \ \sin\theta\sin\varphi\,\underline{j} + \ \cos\theta\,\underline{k}\right|$$

$$= \sqrt{\ \sin^2\theta\cos^2\varphi + \ \sin^2\theta\sin^2\varphi + \ \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{\ \sin^2\theta\ \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \ \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{\ \sin^2\theta\ +\ \cos^2\theta} = 1$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2}\right| = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta}\right|$$

$$= \left|r\cos\theta\cos\varphi\,\underline{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\underline{j} - r\sin\theta\,\underline{k}\right|$$

$$= \sqrt{r^2\ \cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\ \cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\ \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{r^2\ \cos^2\theta\ \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2\ \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{r^2\ \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = r$$

$$h_3 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_3}\right| = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|$$

$$= \left|-r\sin\theta\sin\varphi\,\underline{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\underline{j}\right|$$

$$= \sqrt{r^2\ \sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\ \sin^2\theta\cos^2\varphi}$$

$$= \sqrt{r^2\ \sin^2\theta\ \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}$$

$$= \sqrt{r^2\ \sin^2\theta} = r\sin\theta$$

$$\therefore h_1 = 1\quad,\ h_2 = r\quad,\ h_3 = r\sin\theta$$

$$(1)\ ds = h_1h_2\ du_1du_2 = r\ dr\ d\theta$$

$$(2)\ dV = h_1h_2h_3\ du_1du_2du_3 = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

$$(3)\ \underline{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\underline{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$(4)\ \underline{\nabla}\cdot\underline{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta A_r\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta A_\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rA_\varphi\right)\right]$$

$$(5)\ \underline{\nabla}\wedge\underline{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}[\left(\frac{\partial\left(r\sin\theta\ A_\varphi\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial\varphi}\right)\underline{e}_r$$

$$+\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(r\sin\theta\ A_\varphi\right)}{\partial r}\right)r\underline{e}_\theta+\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)r\sin\theta\underline{e}_\varphi]$$

$$(6)\ \nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

مثال :

اثبت أن في الاحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$\underline{e}_1\cdot\underline{e}_2=0\quad,\quad\underline{e}_2\cdot\underline{e}_3=0\quad,\quad\underline{e}_3\cdot\underline{e}_1=0$$

يكون :

$$(i)\underline{\nabla}\cdot\left(A_1\underline{e}_1\right)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)$$

$$(ii)\underline{\nabla}\wedge\left(A_1\underline{e}_1\right)=\frac{\underline{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_1h_1\right)-\frac{\underline{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_1h_1\right)$$

الحل :

يمكن التعبير عن :

$$\underline{e}_1 = h_2h_3\ \underline{\nabla}u_2\wedge\underline{\nabla}u_3$$

$$\underline{e}_2 = h_3h_1\underline{\nabla}u_3\wedge\underline{\nabla}u_1$$

$$\underline{e}_3 = h_1h_2\underline{\nabla}u_1\wedge\underline{\nabla}u_2$$

$$
\begin{aligned}
(i)\underline{\nabla}\cdot\left(A_1\underline{e}_1\right) &= \underline{\nabla}\cdot\left(A_1h_2h_3\ \underline{\nabla}u_2\wedge\underline{\nabla}u_3\right)\\
&= \underline{\nabla}\left(A_1h_2h_3\right)\cdot\underline{\nabla}u_2\wedge\underline{\nabla}u_3 + A_1h_2h_3\cdot\underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}u_2\wedge\underline{\nabla}u_3\right)\\
&= \underline{\nabla}\left(A_1h_2h_3\right)\cdot\frac{e_2}{h_2}\wedge\frac{e_3}{h_3}+0\\
&= \underline{\nabla}\left(A_1h_2h_3\right)\cdot\frac{e_1}{h_2h_3}\\
&= \left[\frac{e_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)+\frac{e_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_1h_2h_3\right)+\frac{e_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_1h_2h_3\right)\right]\cdot\frac{e_1}{h_2h_3}\\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\underline{\nabla}\wedge\left(A_1\underline{e}_1\right) &= \underline{\nabla}\wedge\left(A_1h_1\underline{\nabla}u_1\right)\\
&= \underline{\nabla}\left(A_1h_1\right)\wedge\underline{\nabla}u_1 + A_1h_1\underline{\nabla}\wedge\underline{\nabla}u_1\\
&= \underline{\nabla}\left(A_1h_1\right)\wedge\frac{\underline{e}_1}{h_1}+0\\
&= \left[\frac{\underline{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_1\right)+\frac{\underline{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_1h_1\right)+\frac{\underline{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_1h_1\right)\right]\wedge\frac{\underline{e}_1}{h_1}\\
&= \frac{\underline{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_1h_1\right)-\frac{\underline{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_1h_1\right)
\end{aligned}
$$

مثال :

عبر عن $\underline{\nabla}\cdot\underline{A}$ بدلالة الاحداثيات المنحنية المتعامدة ؟

الحل :

$$
\begin{aligned}
\underline{\nabla}\cdot\underline{A} &= \underline{\nabla}\cdot\left(A_1\underline{e}_1+A_2\underline{e}_2+A_3\underline{e}_3\right)\\
&= \underline{\nabla}\cdot A_1\underline{e}_1+\underline{\nabla}\cdot A_2\underline{e}_2+\underline{\nabla}\cdot A_3\underline{e}_3\\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_2h_1h_3\right)\\
&\quad+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_3h_1h_2\right)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \underline{\nabla}\cdot\underline{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_2h_1h_3\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_3h_1h_2\right)\right]$$

مثال :

عبر عن $\underline{\nabla}\wedge\underline{A}$ بدلالة الاحداثيات المنحنية المتعامدة ؟

الحل :

$$\begin{aligned}\underline{\nabla}\wedge\underline{A}&=\underline{\nabla}\wedge\left(A_1\underline{e}_1+A_2\underline{e}_2+A_3\underline{e}_3\right)\\&=\underline{\nabla}\wedge A_1\underline{e}_1+\underline{\nabla}\wedge A_2\underline{e}_2+\underline{\nabla}\wedge A_3\underline{e}_3\\&=\frac{\underline{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_3h_3\right)-\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_2h_2\right)\right]\\&+\frac{\underline{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_1h_1\right)-\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_3h_3\right)\right]\\&+\frac{\underline{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_2h_2\right)-\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_1h_1\right)\right]\end{aligned}$$

مثال :

أثبت أن نظام الاحداثيات الاسطوانيه متعامد ثم أوجد تمثيل المتجه :

$$\underline{A}=z\ \underline{i}-2x\ \underline{j}+y\ \underline{k}$$

الحل :

$$\underline{r}=x\ \underline{i}+y\ \underline{j}+z\ \underline{k}$$

$$\underline{r}=\rho\cos\varphi\ \underline{i}+\rho\sin\varphi\ \underline{j}+z\ \underline{k}$$

$$\frac{\partial\underline{r}}{\partial\rho}=\cos\varphi\ \underline{i}+\sin\varphi\ \underline{j}$$

$$\frac{\partial\underline{r}}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi\ \underline{i}+\rho\ \cos\varphi\ \underline{j}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \underline{k}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho}\right| = 1 \quad , \quad h_2 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right| = \rho \quad , \quad h_3 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial z}\right| = 1$$

$$\underline{\hat{\rho}} = \underline{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi \ \underline{i} + \sin\varphi \ \underline{j} \quad \ldots(1)$$

$$\underline{\hat{\varphi}} = \underline{e}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \ \underline{i} + \cos\varphi \ \underline{j} \quad \ldots(2)$$

$$\underline{\hat{z}} = \underline{e}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \underline{k} \qquad \ldots(3)$$

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = \underline{\hat{\rho}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} = -\sin\varphi\cos\varphi \ + \sin\varphi\cos\varphi \ = 0$$

$$\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 = \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{z}} = 0$$

$$\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_1 = \underline{\hat{z}} \cdot \underline{\hat{\rho}} = 0$$

إذن نظام الاحداثيات متعامد . والآن ، نحصل على المتجه $\underline{i}$ بضرب (1) في $\cos\varphi$ و(2) في $-\sin\varphi$ ثم الجمع بينهما أيضاً نحصل على المتجه $\underline{j}$ بضرب (1) في $\sin\varphi$ و(2) في $\cos\varphi$ ثم الجمع بينهما وبذلك تكون متجهات الوحده $\underline{k}$, $\underline{j}$, $\underline{i}$ على الصوره :

$$\underline{i} = \cos\varphi \ \underline{e}_\rho - \sin\varphi \ \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{j} = \sin\varphi \ \underline{e}_\rho + \cos\varphi \ \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{k} = \underline{e}_z$$

بالتعويض عن $\underline{k}$, $\underline{j}$, $\underline{i}$ في المتجه $\underline{A}$ نجد أن

$$\underline{A} = z\left(\cos\varphi\ \underline{e}_\rho - \sin\varphi\ \underline{e}_\varphi\right) - 2x\left(\sin\varphi\ \underline{e}_\rho + \cos\varphi\ \underline{e}_\varphi\right) + y\ \underline{e}_z$$
$$= z\cos\varphi\ \underline{e}_\rho - z\sin\varphi\ \underline{e}_\varphi - 2\rho\sin\varphi\cos\varphi\ \underline{e}_\rho$$
$$-2\rho\cos\varphi\cos\varphi\ \underline{e}_\varphi + \rho\sin\varphi\ \underline{e}_z$$
$$\therefore A_\rho = z\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi\cos\varphi$$
$$A_\varphi = -\left(z\sin\varphi + 2\rho\cos^2\varphi\right)$$
$$A_z = \rho\sin\varphi$$

مثال :

اوجد مربع العنصر لطول منحنى في الاحداثيات الاسطوانية ثم أوجد معاملات القياس لها ؟

الحل :

$$ds^2 = d\underline{r}\ .\ d\underline{r}$$
$$\underline{r} = \rho\cos\varphi\ \underline{i} + \rho\sin\varphi\ \underline{j} + z\ \underline{k}$$
$$\therefore d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial \underline{r}}{\partial z}dz$$
$$= \left(\cos\varphi\ \underline{i} + \sin\varphi\ \underline{j}\right)d\rho + \left(-\rho\sin\varphi\ \underline{i} + \rho\ \cos\varphi\ \underline{j}\right)d\varphi$$
$$+\underline{k}\ dz$$
$$= \left(\cos\varphi\ d\rho - \rho\sin\varphi\ d\varphi\right)\underline{i} + \left(\sin\varphi\ d\rho + \rho\cos\varphi\ d\varphi\right)\underline{j}$$
$$+dz\ \underline{k}$$
$$\Rightarrow ds^2 = d\underline{r}\ .\ d\underline{r} = \left(\cos\varphi\ d\rho - \rho\sin\varphi\ d\varphi\right)^2$$
$$+\left(\sin\varphi\ d\rho + \rho\cos\varphi\ d\varphi\right)^2$$
$$+\left(dz\right)^2$$
$$= \left(d\rho\right)^2 + \rho^2\left(d\varphi\right)^2 + \left(dz\right)^2$$
$$= h_1^2\left(d\rho\right)^2 + h_2^2\left(d\varphi\right)^2 + h_3^2\left(dz\right)^2$$
$$\therefore h_1 = 1 = h_\rho \quad , \quad h_2 = \rho = h_\varphi \quad , \quad h_3 = 1 = h_z$$

مثال :

أثبت أن مربع عنصر طول قوس في الاحداثيات المنحنية العامة يمكن التعبير عنه بالعلاقة :

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\ du_p\ du_q$$

الحل :

$$\because \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2, u_3)$$

$$d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_3} du_3$$

$$= \alpha_1 du_1 + \alpha_2 du_2 + \alpha_3 du_3$$

$$ds^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r}$$

$$= (\alpha_1 du_1 + \alpha_2 du_2 + \alpha_3 du_3).(\alpha_1 du_1 + \alpha_2 du_2 + \alpha_3 du_3)$$

$$= \alpha_1.\alpha_1 du_1^2 + \alpha_1.\alpha_2 du_1 du_2 + \alpha_1\alpha_3 du_1 du_3$$

$$+ \alpha_2.\alpha_1 du_2 du_1 + \alpha_2.\alpha_2 du_2^2 + \alpha_2\alpha_3 du_2 du_3$$

$$+ \alpha_3.\alpha_1 du_3 du_1 + \alpha_3.\alpha_2 du_3 du_1 + \alpha_2\alpha_3 du_3^2$$

$$= \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} \underline{\alpha}_p.\underline{\alpha}_q\ du_p\ du_q$$

$$\therefore ds^2 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\ du_p\ du_q$$

تسمى هذه *بالصيغة التربيعية الأساسية* أو *الصيغة المترية* وتسمى المعاملات g_{pq} *بالمعاملات المترية* .

تحليل الكميات الممتدة

الفراغات ذات البعد n :

في الفراغ ذي الأبعاد الثلاثة تحدد النقطة مجموعة من ثلاثة أرقام ، تسمى الإحداثيات مثل $(x,y,z)\ ,\ (\rho,\varphi,z)\ ,\ (r,\theta,\varphi)$.

وبذلك يكون إحداثي النقطة p في الفراغ ذو البعد n يتكون من عدد n من الإحداثيات :

$$(x_1,x_2,....,x_n)\rightarrow(x_i)$$

أو يمكن كتابة الإحداثيات في صورة أخرى :

$$(x^1,x^2,....,x^n)\rightarrow(x^i)$$

حيث 1,2,...,n أخذت ليست كأس ولكن كدليل للمتغيرات .

تنويه :

كما نعلم أن هناك معادلات التحويل الخطية (علاقة بين متغيرات في إحداثيات مختلفة)مثل:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

سيكون في الممتدات أيضاً تحولات للإحداثيات .

تحولات الإحداثي :

ليكن $\left(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^n\right)$ إحداثيات نقطة في النظام $\left(\bar{x}^i\right)$ذو البعد n و $\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)$ إحداثيات نفس النقطة في النظام $\left(x^j\right)$ ذو البعد n من العلاقات بين النظامين يمكن إيجاد الآتي :

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= \bar{x}^1\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)\\
\bar{x}^2 &= \bar{x}^2\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)\\
&\vdots\\
\bar{x}^n &= \bar{x}^n\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)
\end{aligned}$$

والتي يمكن أن نبينها بإختصار كالتالي:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right) \quad , \ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i\left(x^k\right) \quad , \ i\ ,k= 1,2,\ldots,n$$

هذه العلاقات لها حل وحيد في المتغيرات $\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)$

$$x^i = x^i\left(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^n\right) \quad , \ i = 1,2,\ldots,n$$

$$x^i = x^i\left(\bar{x}^k\right) \quad , \ i\ ,k= 1,2,\ldots,n$$

إذن نستنتج أن معادلات التحويل الخطية في البعد النوني هما :

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x}^i &= \bar{x}^i\left(x^k\right)\\
x^i &= x^i\left(\bar{x}^k\right)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots;\ i\ ,k= 1,2,\ldots,n$$

من النظام $\left(\bar{x}^i\right)$ إلى النظام $\left(x^j\right)$

اصطلاح الترميز والتجميع $\sum$:

في كتابة تعبير مثل $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ يمكننا استعمال رمز قصير $\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. بإستخدام رمز أقصر يمكننا ببساطة أن نكتبه $a_i x^i$.حيث نتخذ هذا الإصطلاح عندما يكون الأس (رمزاً سفلياً أو رمزاً علوياً) مكرراً في حد معطى يمكننا أن نجمع على هذا الأس من 1 على n إذا مالم يوصف غير هذا . يسمة هذا إصطلاح التجميع .

الدليل الزائف والدليل الحر :

$$a_i x_i^k = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^k = a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + a_3 x_3^k + ... + a_n x_n^k$$

$$a_i x_k^i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_k^i = a_1 x_k^1 + a_2 x_k^2 + a_3 x_k^3 + ... + a_n x_k^n$$

عندما تتغير k من 1 على n يكون لدينا n من المعادلات أي أن الحد $a_i x_k^i$ يعبر عن n حد بالتجميع على الدليل i و n من المعادلات على الدليل k $a_i x_i^k$ حيث i الدليل الزائف و k الدليل الحر .

مثال :

باعتبار n=3 اكتب الكميات التالية بصيغة التجميع ثم أكتب حدود كل تجميع :

$$(i)\, d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i$$

$$(ii)\, \frac{d\bar{x}^k}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} \; \frac{dx^m}{dt}$$

$$(iii)\, g_{pq} \; dx^p \; dx_q$$

الحل :

$$(i)\, d\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} dx^3$$

$$(ii)\, \frac{d\overline{x}^k}{dt} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dt}$$

$$= \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^3} \frac{dx^3}{dt}$$

$$(iii) \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, dx^p\, dx^q$$

$$= \sum_{p=1}^{3} \left[g_{p1}\, dx^p\, dx^1 + g_{p2}\, dx^p\, dx^2 + g_{p3}\, dx^p\, dx^3 \right]$$

$$= g_{11}\, dx^1\, dx^1 + g_{12}\, dx^1\, dx^2 + g_{13}\, dx^1\, dx^3$$

$$+ g_{21}\, dx^2\, dx^1 + g_{22}\, dx^2\, dx^2 + g_{23}\, dx^2\, dx^3$$

$$+ g_{31}\, dx^3\, dx^1 + g_{32}\, dx^3\, dx^2 + g_{33}\, dx^3\, dx^3$$

مثال :

إذا كان $k = 1,2,\ldots,n$ و x^k إحداثيات متعامدة فما هو الحل الهندسي للمعادلات التالية عندما n=2,3 :

$$(i)\, a_k x^k = 1$$

حيث a_k مجموعة ثوابت .

$$(ii)\left(x^k\right)^2 = 1$$

$$(iii)\, x^k = x^k(u)$$

الحل :

(i) عندما تكون n=2 :

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 = 1$$

معادلة خط مستقيم في المستوى $\left(x^1,x^2\right)$

عندما تكون n=3 :

$$a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3=1$$

معادلة مستوى من الدرجة الأولى في الفراغ $\left(x^1,x^2,x^3\right)$

(ii) عندما تكون n=2 :

$$\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2=1$$

معادلة دائرة في المستوى نصف قطرها =1 ومركزها $\left(0,0\right)$.

عندما تكون n=3 :

$$\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2=1$$

معادلة كرة في الفراغ نصف قطرها =1 ومركزها $\left(0,0,0\right)$.

(iii) عندما تكون n=2 :

$$x^1=x^1\left(u\right)\quad ,x^2=x^2\left(u\right)$$

معادلات بارامترية لمنحنى في المستوى احداثياته $\left(x^1,x^2\right)$.

عندما تكون n=3 :

$$x^1=x^1\left(u\right)\quad ,x^2=x^2\left(u\right)\quad ,\quad x^3=x^3\left(u\right)$$

معادلات بارامترية لمنحنى في الفراغ احداثياته $\left(x^1,x^2,x^3\right)$.

الممتدات المتضادة الإختلاف والمتحدة الإختلاف من الرتبة الأولى :

إذا كانت n من المركبات على الصورة :

$A^1,A^2,A^3,....,A^n$ في نظام الإحداثيات $\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ مرتبطة بالمركبات

$\bar{A}^1,\bar{A}^2,\bar{A}^3,....,\bar{A}^n$ المنتسبة لنظام الإحداثيات $\left(\bar{x}^1,\bar{x}^2,...,\bar{x}^n\right)$

وهذا الإرتباط من خلال معادلات التحويل التاليه :

$$\bar{A}^p=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^i}A^i\quad ,\quad p=1,2,3,...,n$$

أي بصورة مختصرة :

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} A^i$$

تسمى $\bar{A}^p$ كمية ممتدة متضادة الإختلاف من الرتبة الأولى

وعندما تكون هذه الكمية في الفراغ ذو البعد الثالث تعطي ثلاث معادلات بالتجميع على الدليل الحر p وهي :

$$\bar{A}^1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^i} A^i$$

$$\bar{A}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^i} A^i$$

$$\bar{A}^3 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^i} A^i$$

كل معادلة بها ثلاث حدود وذلك بالتجميع على الدليل الزائف i :

$$\bar{A}^1 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} A^3$$

$$\bar{A}^2 = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} A^3$$

$$\bar{A}^3 = \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} A^3 \text{ '}$$

$$\bar{A}_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} A_i \qquad , \quad p = 1, 2, \ldots, n$$

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} A_i$$

تسمى $\bar{A}_p$ كمية ممتدة متحدة الإختلاف من الرتبة الأولى .

مثال :

اكتب معادلات التحويل للكميات الممتدة التالية :

$$(i)\, A^i_{jk} \qquad (ii)\, A^{mn}_{ijk} \qquad (iii)\, C^m$$

الحل :

$$(i)\ \bar{A}^{p}_{qr} = \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{q}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{r}} A^{i}_{jk}$$

$$(ii)\ \bar{A}^{pq}_{rst} = \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{m}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{q}}{\partial x^{n}} \cdot \frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{r}} \cdot \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{s}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{t}} A^{mn}_{ijk}$$

$$(iii)\ \bar{C}^{i} = \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{m}} C^{m}$$

مثال :

كمية ممتدة متحدة الإختلاف لها المركبات :

$$xy\ ,\ 2y - z^{2}\ ,\ xz$$

في الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة اوجد مركباتها المتحدة الإختلاف في الإحداثيات الكروية .

الحل :

حيث

$$x^{1} = x\ ,\ x^{2} = y\ ,\ x^{3} = z$$

فإن :

$$A_{1} = xy = x^{1}x^{2}$$

$$A_{2} = 2y - z^{2} = 2x^{2} - \left(x^{3}\right)^{2}$$

$$A_{3} = xz = x^{1}x^{3}$$

نوجد الآن المركبات المتحدة الإختلاف في الإحداثيات الكروية $\bar{A}_{k}$

وحيث أن :

$$\bar{x}^1 = r\ ,\ \bar{x}^2 = \theta\ ,\ \bar{x}^3 = \varphi$$

$$x^1 = \bar{x}^1 \sin\bar{x}^2 \cos\bar{x}^3$$

$$x^2 = \bar{x}^1 \sin\bar{x}^2 \sin\bar{x}^3$$

$$x^3 = \bar{x}^1 \cos\bar{x}^2$$

فإن المركبات المطلوبة تعطى من العلاقة :

$$\bar{A}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} A_i$$

$$\therefore\ \bar{A}_1 = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^1} A_i = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} A_3$$

$$= \sin\bar{x}^2 \cos\bar{x}^3 \left(x^1 x^2\right) + \sin\bar{x}^2 \sin\bar{x}^3 \left(2x^2 - \left(x^3\right)^2\right)$$

$$+ \cos\bar{x}^2 \left(x^1 x^3\right)$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\left(r^2 \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\right)$$

$$+ \sin\theta\sin\varphi\left(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta\right)$$

$$+ \cos\theta\left(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\right)$$

وبالمثل نحسب $\bar{A}_2$ و $\bar{A}_3$ حيث :

$$\bar{A}_2 = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^2} A_i = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} A_3$$

$$\bar{A}_3 = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^3} A_i = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} A_3$$

الكميات الممتدة من الرتبة الثانية متحدة ومتضادة ومختلطة الإختلاف

إذا كانت n^2 من المركبات التي على الصورة A^{rs} في نظام الإحداثيات $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ مرتبطة بالمركبات $\bar{A}^{pq}$ المنتسبة لنظام الإحداثيات $\left(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n\right)$

$$\bar{A}^{pq} = \sum_{r=1} \sum_{s=1} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^s} A^{rs}$$

وصورتها المختصرة :

$$\bar{A}^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^s} A^{rs} \qquad \ldots(1)$$

و هي *مركبات متضادة الإختلاف من الرتبة الثانية*

و A_{rs} تسمى *كميات متحدة الإختلاف للكمية الممتدة من الرتبة الثانية* إذا كان :

$$\bar{A}_{pq} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} A_{rs} \qquad \ldots(2)$$

و A_s^r تسمى *مركبات مختلطة الإختلاف للكمية الممتدة من الرتبة الثانية* إذا كان :

$$\bar{A}_q^p = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} A_s^r \qquad \ldots(3)$$

تعريف دلتا كرونكر :

تعرف الكمية الممتدة دلتا كرونكر والتي تكتب على الصورة S_q^p حيث :

$$S_q^p = \frac{\partial x^p}{\partial x^q} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p \neq q \\ 1 & \text{if} \quad p = q \end{cases}$$

واضح أن دلتا كرونكر كمية ممتدة مختلطة من الرتبة الثانية

$$S_1^1 = 1 \quad , \quad S_2^1 = 0 \quad , \quad S_2^2 = 1$$

مثال :

احسب الكميات التالية :

$$(i)\ S^p_q S^q_r \qquad\qquad (ii)\ S^q_p A^{qr}_s$$

الحل :

$$(i)\ S^p_q S^q_r = \frac{\partial x^p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial x^r} = \frac{\partial x^p}{\partial x^r} = S^p_r$$

$$(ii)\ S^q_p A^{qr}_s = A^{pr}_s$$

$$\text{Because of } S^p_q = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p \neq q \\ 1 & \text{if} \quad p = q \end{cases}$$

مثال :

اكتب قانون (معادلات) التحويل للكميات الممتدة :

$$(i)\ A^i_{jk} \qquad\qquad (ii)\ C^m$$

الحل :

$$(i)\ \bar{A}^p_{rs} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} A^i_{jk}$$

من الرتبة الثالثة.

$$(ii)\ \bar{C}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m} C^m$$

من الرتبة الأولى .

مثال :

اكتب قانون التحويل (التحول) للكمية الممتدة : B^{mn}_{ijk}.

الحل :

$$\bar{B}^{pr}_{lqs} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} B^{mn}_{ijk}$$

من الرتبة الخامسة مختلطة .

التماثل للكمية الممتدة

الكمية الممتدة تسمى متماثلة بالنسبة إلى اثنين من الأسس المتضادة الإختلاف (أو أثنين من الأسس المتحدة الإختلاف) *إذا كانت مركباتهما تبقى دون تغيير مع تبادل الرموز* .

مثال :

إذا كان

$$A^{mpr}_{qs} = A^{pmr}_{qs}$$

فإن هذه الكمية الممتدة متماثلة بالنسبة إلى p,m.

تعريف :

الكمية الممتدة تسمى مختلفة التماثل (شبه متماثلة) بالنسبة إلى اثنين من الأسس *إذا تغيرت الإشارة مع تغيير الرموز* .

مثال :

إذا كان :

$$A^{mpr}_{qs} = -A^{pmr}_{qs}$$

فإن الكمية A^{mpr}_{qs} تسمى مختلفة التماثل .

مثال :

إذا كان :

$$\phi = a_{jk} A^j A^k$$

بين أن ϕ يمكن كتابتها على الصورة :

$$\phi = b_{jk} A^j A^k$$

حيث b_{jk} متماثلة .

الحل :

$$\phi = a_{jk}A^jA^k$$
$$= a_{kj}A^kA^j$$
$$= a_{kj}A^jA^k$$
$$\phi+\phi = a_{jk}A^jA^k + a_{kj}A^jA^k$$
$$\Rightarrow 2\phi = \left(a_{jk}+a_{kj}\right)A^jA^k$$
$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2}\left(a_{jk}+a_{kj}\right)A^jA^k$$
$$\Rightarrow \phi = b_{jk}A^jA^k$$

العمليات الأساسية للكميات الممتدة :

(1)*الجمع :* لجمع اثنين من الكميات الممتدة من (نفس الرتبة والنوع) متضادة أو متحدة أو مختلطة يكون أيضاً كمية ممتدة من نفس الرتبة والنوع.

مثال :

$$A_q^{mp} + B_q^{mp} = C_q^{mp}$$

(2)*الطرح :* بالمثل في حالة الجمع

مثال :

$$A_q^{mp} - B_q^{mp} = D_q^{mp}$$

(3)*الضرب :* حاصل ضرب كميتين ممتدتين تكون كمية ممتدة رتبتها هي مجموع رتبتي الكميات الممتدة .

تعريف :

حاصل الضرب المتضمن ضربا عاديا لمركبات الكمية الممتدة يسمى ضرباً خارجياً .

مثال :

$$A_q^{pr}B_s^m = C_{qs}^{prm}$$

ملاحظة :

ليس كل كمية ممتدة يمكن كتابتها كحاصل ضرب كميتين ممتدتين ولذلك عملية القسمة في الحالة العامة غير ممكنة في الممتدات .

تعريف :

عملية ضرب كميتين ممتدتين متبوعة *بإنكماش* تسمى حاصل الضرب الداخلي .

ويعرف الإنكماش كما يلي :

إذا كان لدينا الكمية الممتدة A_{qs}^{mpr} فإنه بوضع r=s فإن :

$$A_{qs}^{mpr} = B_{q}^{mp}$$

مثال :

اوجد الضرب الداخلي لـ $A_{q}^{pr} \ , B_{s}^{m}$.

الحل :

$$A_{q}^{pr} B_{s}^{m} = C_{qs}^{prm}$$

بوضع m=s :

$$\Rightarrow A_{q}^{pr} B_{s}^{m} = D_{q}^{pr}$$

مثال :

إذا كان B_{r}^{pq}, A_{r}^{pq} **كميتان ممتدتان اثبت أن مجموعهم والفرق بينهم يكون كمية ممتدة .**

الحل :

بما أن B_{r}^{pq}, A_{r}^{pq} كمية ممتدة إذن معادلات التحويل تكتب على الصورة التالية :

$$\bar{A}^{jk}_{l} = \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{l}} A^{pq}_{r}$$

$$\bar{B}^{jk}_{l} = \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{l}} B^{pq}_{r}$$

$$\therefore \bar{A}^{jk}_{l} \pm \bar{B}^{jk}_{l} = \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{l}} \left(A^{pq}_{r} \pm B^{pq}_{r} \right)$$

مثال :

إذا كان A^{pq}_{r} , B^{s}_{t} كميتان ممتدتان :

اثبت أن

$$A^{pq}_{r}\ B^{s}_{t} = C^{pqs}_{rt}$$

أيضاً كمية ممتدة .

الحل :

معادلات التحول :

$$\bar{A}^{jk}_{n} = \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{n}} A^{pq}_{r}$$

$$\bar{B}^{m}_{n} = \frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{s}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \bar{x}^{n}} B^{s}_{t}$$

$$\therefore \bar{A}^{jk}_{n} \bar{B}^{m}_{n} = \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{n}} \frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{s}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \bar{x}^{n}} \left(A^{pq}_{r} B^{s}_{t} \right)$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{n}} \frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{s}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \bar{x}^{n}} \left(C^{pqs}_{rt} \right)$$

كمية ممتدة من الرتبة الخامسة بأسس متضادة الإختلاف p,q,s وأسس متحدة الإختلاف r,t .

مثال :

اثبت أن الإنكماش للكمية الممتدة A^{p}_{q} يكون كمية ثابتة .

الحل :

بما أن A_q^p كمية ممتدة إذن :

$$\bar{A}_k^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} A_q^p$$

بوضع j=k نحصل على :

$$\bar{A}_j^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} A_q^p$$

$$= \frac{\partial x^q}{\partial x^p} A_q^p$$

$$= S_p^q A_q^p$$

بوضع p=q :

$$\Rightarrow \bar{A}_j^j = S_p^p A_p^p = A_p^p$$

وهي كمية ثابتة .

<u>تنويه :</u>

الثابت يعرف ككمية ممتدة من الرتبة صفر .

مثال :

بين أن الإنكماش لحاصل الضرب الخارجي للكميات الممتدة $A^p \,, B_q$ تكون ثابتة .

الحل :

بما أن $A^p \,, B_q$ كميات ممتدة إذن لها معادلات التحويل :

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} A^p$$

$$\bar{B}_j = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} B_q$$

وبالتالي فإن :

$$\bar{A}^i \bar{B}_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} A^p B_q$$

بالإنكماش (بوضع i=j)نحصل على :

$$\bar{A}^i \bar{B}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^i} A^p B_q$$

$$= \frac{\partial x^q}{\partial x^p} A^p B_q$$

$$= S_p^q A^p B_q$$

$$= S_p^q C_q^p$$

$$\text{let } p = q \Rightarrow \bar{A}^i \bar{B}_i = S_p^p C_p^p = C_p^p$$

$$\therefore A^p B_q \text{ is constant}$$

ملاحظة :

عملية ضرب الكميات الممتدة (ضرب خارجي)ثم انكماش تسمى ضرب داخلي وتسمى النتيجة حاصل ضرب داخلي .

الإرتباط بين الممتدات والمصفوفات

المتجه A_i يسمى ممتد من الرتبة الأولى والكمية القياسية M ممتد من الرتبة صفر والممتدات من الرتبة الثانية يمكن تمثيلها بالمصفوفات من النوع 3×3 و الممتد من الرتبة الأولى يمثل بمصفوفة من النوع 3×1.

$$A_i = a_1, a_2, a_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

الكميات F_{ij} لها دليلان حران وتمثل المركبات الكارتيزية وهي عبارة عن تسع مركبات قياسية (n=3)

يمكن كتابة F_{ij} ممتد من الرتبة الثانية في صورة مصفوفة 3×3

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

المصفوفات بمفهوم الممتدات :

المصفوفة من الرتبة m×n والتي عناصرها a_{ij} يمكن كتابتها في الصورة المختصرة :

$$\left(a_{ij}\right) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n$$

أو الصورة :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

إذا كانت m=n تكون المصفوفة مربعة وعناصر القطر الرئيسي هي $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$

إذا كانت عناصر القطر الرئيسي هو الواحد الصحيح فإن المصفوفة تسمى بمصفوفة الوحدة

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

جبر المصفوفات :

1- *جمع مصفوفتين* :

إذا كانت المصفوفتين :

$$A = a_{ij} \quad , \quad B = b_{ij}$$

فإن

$$A + B = a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} = C$$

$$A - B = a_{ij} - b_{ij} = d_{ij} = D$$

2- *ضرب مصفوفتين* :

ضرب المصفوفتين $A = \left(a_{ij}\right) \quad , \quad B = \left(b_{ij}\right)$

يكون معرف بشرط أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية

$$A = \left(a_{pq}\right) \quad , \quad B = \left(b_{qr}\right)$$

فيكون

$$C = A \cdot B = \left(a_{pq}\right) \cdot \left(b_{qr}\right) = a_{pq} b_{qr} = d_{pr}$$

$$d_{pr} = \sum_{q=1}^{n} a_{pq} \cdot b_{qr}$$

تنويه : ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

3- *محدد المصفوفة* :

المحدد للمصفوفة المربعة $A = \left(a_{ij}\right)$ يرمز له بالرمز $|A|$ أو $|a_{ij}|$ ويكتب det A .

4- *المعكوس الضربي للمصفوفة* :

المصفوفة B تسمى معكوس المصفوفة A إذا كانت تحقق :

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة .الشرط اللازم والكافي لوجود المعكوس B هو محدد المصفوفة $\det A \neq 0$ لا ينعدم. إذا كان $\det A = 0$ فإن المصفوفة تسمى مصفوفة شاذة .

5- *مدور(منقول) المصفوفة A* :

المصفوفة A^T تسمى مدور المصفوفة A إذا تم تبديل الصفوف إلى أعمدة أي إذا كانت $A=\left(a_{pq}\right)$ فإن

$$A^T=\left(a_{qp}\right)$$

مثال:

عبر عن معادلات التحويل في صورة مصفوفة لكل مما يأتي :

أ- متجه متحد الإختلاف .

ب- كمية مضادة الإختلاف من الرتبة الثانية (اعتبر n=3).

الحل :

أ) نلاحظ أن معادلات التحويل :

$$\bar{A}_p=\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}A_q$$

بعد فك التجميع تعطى ثلاث معادلات كل معادلة ثلاث حدود :

$$\bar{A}_1=\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}A_3$$

$$\bar{A}_2=\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}A_3$$

$$\bar{A}_3=\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}A_3$$

يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفة كالتالي:

$$\begin{pmatrix}\bar{A}_1\\ \bar{A}_2\\ \bar{A}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$$

ب) وبالمثل الكمية

$$\bar{A}^{pr} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs}$$

يمكن أن توضع في صورة المصفوفات كالآتي :

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13} \\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23} \\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}$$

الصيغة التفاضلية التربيعية والصيغة المترية الأساسية :

في الإحداثيات الكارتيزية (x,y,z) طول القوس التفاضلي ds يعطى بالعلاقة :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{pq} \; du^p du^q$$

ومن الصورة العامة في الفراغ النوني يكون :

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} g_{pq} \; du^p du^q$$

بإستخدام الصورة المختصرة :

$$ds^2 = g_{pq} \; du^p du^q$$

الكميات الممتدة g_{pq} هما مركبات الكمية الممتدة متحدة الإختلاف من الرتبة الثانية تسمى *الكمية الممتدة الأساسية*.

الممتد المتري التوافقي :

إذا كان $g = \left| g_{pq} \right|$ ترمز لمحدد العناصر g_{pq} بفرض أن هذا المحدد لا ينعدم فإن الكمية g^{pq} تسمى بالممتد المتري المرافق للكمية g_{pq} حيث :

$$g^{pq} = \frac{\text{cofactor of } g_{pq} \ \text{ in } g}{g}$$

حيث : (cofactor of in g) يقصد به (الممتد المرافق) أو (المعامل المصاحب) للعنصر g_{pq} وهو الممتد الناتج من حذف عناصر الصف والعمود المحتويان للعنصر g_{pq}

كمية ممتدة متماثلة ومتضادة الإختلاف من الرتبة الثانية :

$$(1)\, g_{jk} g^{kp} = S_j^p$$

$$(2)\, g_{kj} g^{pk} = S_j^p$$

$$(3)\, g^{kp} = g^{pk}$$

حيث أن الرمز الداخلي يدل على رقم الصف والرمز الخارجي يدل على رقم العمود .

الكمية الممتدة A_{pq} يمكن الحصول على كمية أخرى برفع أحد الرمزين p أو q لنحصل $A^{p}_{.q}$ أو $A^{q}_{p.}$ ،

وتبين هذه النقطة المكان الأصلي للرمز المرفوع

هذه الكميات يمكن الحصول عليها بالضرب الداخلي في الكميات المترية g^{pq} أو مرافقيها g_{pq} ،

كمثال توضيحي :

$$A^{p}_{.q} = g^{rp} A_{rq}$$

$$A^{pq} = g^{rp} g^{sq} A_{rs}$$

$$A^{p}_{.rs} = g_{rq} A^{pq}_{..s}$$

$$A^{qm.tk}_{..n} = g^{kp} g_{ns} g^{mr} A^{q.st}_{.r..p}$$

مثال :

أوجد الكمية الممتدة المترية في كل من :

أ- الإحداثيات الإسطوانية .

ب- الإحداثيات الكروية .

الحل :

أ- نضع

$$x^1=\rho \quad , \quad x^2=\varphi \quad , \quad x^3=z$$

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2$$

$$g_{11}=1 \quad , \quad g_{22}=\rho^2 \quad , \quad g_{33}=1$$

$$g_{12}=g_{13}=g_{23}=0$$

ويمكن أن تكتب على الصورة

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هذه هي الكمية المترية في الإحداثيات الاسطوانية .

ب- نضع

$$x^1=r \quad , \quad x^2=\theta \quad , \quad x^3=\varphi$$

$$ds^2=dr^2+r^2 d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

$$g_{11}=1 \quad , \quad g_{22}=r^2 \quad , \quad g_{33}=r^2\sin^2\theta$$

$$g_{12}=g_{13}=g_{23}=0$$

ويمكن أن تكتب على الصورة

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

هذه هي الكمية المترية في الإحداثيات الكروية .

مثال :

أوجد الكمية الممتدة المترية والكمية الممتدة المرافقة في كل من:

أ- الإحداثيات الإسطوانية .
ب- الإحداثيات الكروية .

الحل :

أ- في حالة الإحداثيات الإسطوانية :

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\rho^2$$

$$\because g^{pq}=\frac{\text{cofactor of } g_{pq} \text{ in } g}{g}$$

$$\Rightarrow g^{11}=\frac{\text{cofactor of } g_{11}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$g^{22}=\frac{\text{cofactor of } g_{22}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33}=\frac{\text{cofactor of } g_{33}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix}=1$$

بالمثل $g^{jk}=0$ إذا كان $j\neq k$

الكمية المرافقة يمكن التعبير عنها بدلالة المصفوفات كالآتي :

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ب- في حالة الإحداثيات الكروية :

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}=r^4\sin^2\theta$$

$$\because g^{pq}=\frac{\text{cofactor of } g_{pq} \text{ in } g}{g}$$

$$\Rightarrow g^{11}=\frac{\text{cofactor of } g_{11}}{g}=\frac{1}{r^4\sin^2\theta}\begin{vmatrix} r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\theta\end{vmatrix}=1$$

$$g^{22}=\frac{\text{cofactor of } g_{22}}{g}=\frac{1}{r^4\sin^2\theta}\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\theta\end{vmatrix}=\frac{1}{r^2}$$

$$g^{33}=\frac{\text{cofactor of } g_{33}}{g}=\frac{1}{r^4\sin^2\theta}\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & r^2\end{vmatrix}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\end{pmatrix}$$

تنويه :

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{pmatrix}=I$$

مثال :

إذا كان $A_j=g_{jk}A^k$ بين أن $A^k=g^{jk}A_j$.

الحل:

بضرب المقدار $A_j = g_{jk}A^k$ في g^{jq}

$$\therefore g^{jq}A_j = g^{jq}g_{jk}A^k$$

$$=S_k^q A^k$$

$$\therefore A^k = g^{jk}A_j$$

طول المتجه والزاوية بين متجهين :

في الإحداثيات الكارتيزية يعرف طول المتجه A^p أو المتجه A_p بالعلاقة :

$$L = \sqrt{A^p A_p} = \sqrt{g^{pq}A_p A_q} = \sqrt{g_{pq}A^p A^q}$$

وبفرض أن الزاوية بين المتجهين A^p, B^p هي θ فإن :

$$\cos\theta = \frac{A^p B_p}{\sqrt{\left(A^p A_p\right)\left(B^p B_p\right)}} = \frac{g_{pq}A^p B^p}{\sqrt{\left(g_{pp}A^p A^p\right).\left(g_{pp}B^p B^p\right)}}$$

إذا كان $g_{pq}A^p B^p = A^p B_q = 0$ فإن المتجهات متعامدة .

مثال :

أثبت أن لأي نظام متعامد يكون :

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} \quad , \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}} \quad , \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$$

الحل :

حيث أن : $g^{pr}g_{rq} = S_q^p$ فإنه :

عندما يكون p=r=q=1 نجد أن

$$g^{11}g_{11} = S_1^1 = 1 \Rightarrow g_{11} = \frac{1}{g^{11}}$$

وإذا كان p=r=q=2 نجد أن

$$g^{22}g_{22} = S_2^2 = 1 \Rightarrow g_{22} = \frac{1}{g^{22}}$$

وإذا كان p=r=q=3 نجد أن :

$$g^{33}g_{33} = S_3^3 = 1 \Rightarrow g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$$

مركبات المتجه :

مركبات المتجه A_p وتكتب A_u, A_v, A_w وهي إسقاط المتجه على المماسات لإحداثي المنحنيات وتعطى الإحداثيات العمودية على الصورة :

$$A_u = \sqrt{g_{11}}\ A^1 = \frac{A_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$A_v = \sqrt{g_{22}}\ A^2 = \frac{A_2}{\sqrt{g_{22}}}$$

$$A_w = \sqrt{g_{33}}\ A^3 = \frac{A_3}{\sqrt{g_{33}}}$$

والمركبات الفيزيائية للقيمة الممتدة A_{pq} تعطى بالصيغ الآتية :

$$A_{uu} = g_{11}\ A^{11} = \frac{A_{11}}{g_{11}}$$

$$A_{uv} = \sqrt{g_{11}\ g_{22}}\ A^{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{g_{11}\ g_{22}}}$$

$$A_{uw} = \sqrt{g_{11}\ g_{33}}\ A^{13} = \frac{A_{13}}{\sqrt{g_{11}\ g_{33}}}$$

رموز كريستوفل

الرمز $[pq,r]$ يسمى رمز كريستوفل من *النوع الأول* إذا كان :

$$[pq,r]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^{q}}+\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^{p}}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^{r}}\right)$$

والرمز $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$ يسمى رمز كريستوفل من *النوع الثاني* إذا كان :

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g^{sr}[pq,r]$$

وهذان الرمزان يخضعان لمعادلتي التحويل الآتية :

$$(1)\overline{[jk,m]}=[pq,r]\frac{\partial x^{p}}{\partial \overline{x}^{j}}\frac{\partial x^{q}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial x^{r}}{\partial \overline{x}^{m}}+g_{pq}\frac{\partial x^{p}}{\partial \overline{x}^{m}}\frac{\partial^{2} x^{q}}{\partial \overline{x}^{j}\partial \overline{x}^{k}}$$

$$(2)\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}\frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{s}}\frac{\partial x^{p}}{\partial \overline{x}^{j}}\frac{\partial x^{q}}{\partial \overline{x}^{k}}+\frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{q}}\frac{\partial^{2} x^{q}}{\partial \overline{x}^{j}\partial \overline{x}^{k}}$$

وتكون كميات ممتدة في حالة :

$$g_{pq}\frac{\partial x^{p}}{\partial \overline{x}^{m}}\frac{\partial^{2} x^{q}}{\partial \overline{x}^{j}\partial \overline{x}^{k}}=0$$

$$\frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{q}}\frac{\partial^{2} x^{q}}{\partial \overline{x}^{j}\partial \overline{x}^{k}}=0$$

مثال :

اثبت أن :

$$(i)[pq,r]=[qp,r]$$

$$(ii)\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$$

$$(iii)[pq,k]=g_{ks}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$$

الحل :

$$(i)[pq,r]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)$$

$$=[qp,r]$$

$$(ii)\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g^{sr}[pq,r]$$

$$=g^{sr}[qp,r]$$

$$=\begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$$

$$(iii)g_{ks}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g_{ks}g^{sr}[pq,r]$$

$$=S_k^r[pq,r]$$

$$=[pq,k]$$

مثال :

أثبت أن :

$$(i)\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}=[pm,q]+[qm,p]$$

$$(ii)\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\begin{Bmatrix} q \\ mn \end{Bmatrix}-g^{qn}\begin{Bmatrix} p \\ mn \end{Bmatrix}$$

الحل:

$$(i)\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}=[pm,q]+[qm,p]$$

$$\begin{aligned}[pm,q]+[qm,p]&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^p}\right)\\&=\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}\end{aligned}$$

$$(ii)\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\begin{Bmatrix} q \\ mn \end{Bmatrix}-g^{qn}\begin{Bmatrix} p \\ mn \end{Bmatrix}$$

بما أن

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(g^{jk}g_{ij}\right)=\frac{\partial}{\partial x^m}\left(S_i^k\right)=0$$

إذن

$$g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}+g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}=0$$

$$\to g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=-g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$$

ثم بالضرب في g^{ir} نحصل على :

$$g^{ir}g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=-g^{ir}g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$$

$$\Rightarrow S_j^r\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=-g^{ir}g^{jk}\left([im,j]+[jm,i]\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m}=-g^{ir}\begin{Bmatrix}k\\ im\end{Bmatrix}-g^{jk}\begin{Bmatrix}r\\ jm\end{Bmatrix}$$

وبتبديل الرموز p,q,n,m محل الرموز r,k,i,j نحصل على :

$$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\begin{Bmatrix}q\\ mn\end{Bmatrix}-g^{qn}\begin{Bmatrix}p\\ mn\end{Bmatrix}$$

مثال :

احسب رموز كريستوفل من النوعين الأول والثاني للفراغ حيث $g_{pq}=0$ **إذا كان** $p\neq q$.

الحل :

النوع الأول :

- إذا كان $p=q=r$ فإن

$$[pq,r]=[pp,p]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

- إذا كان $p=q\neq r$ فإن

$$[pq,r]=[pp,r]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}\right)$$
$$=\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

- إذا كان $p=r\neq q$ فإن

$$[pq,r]=[pq,p]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

- إذا كان $p\neq q\neq r$ فإن $[pq,r]=0$

$$\therefore \left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\}=g^{sr}[pq,r]=0 \quad \text{if} \quad r\neq s$$

إذا كان $r=s$ فإن

$$g^{ss}[pq,s]=\frac{[pq,s]}{g_{ss}}$$

النوع الثاني من رموز كريستوفل :

- إذا كان $p=q=s$ فيكون لدينا

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p \\ pp \end{Bmatrix}=\frac{[pp,p]}{g_{pp}}=\frac{1}{2g_{pp}}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^p}\ln g_{pp}$$

- إذا كان $p=q\neq s$ نجد أن

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} s \\ pp \end{Bmatrix}=\frac{[pp,s]}{g_{ss}}=\frac{-1}{2g_{ss}}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^s}$$

- إذا كان $p=s\neq q$ نجد أن

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p \\ pq \end{Bmatrix}=\frac{[pq,p]}{g_{pp}}=\frac{1}{2g_{pp}}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

- إذا كان $p\neq q\neq s$ فإن

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=0$$

مثال :

احسب رموز كريستوفل من النوع الثاني لكل من:

1- الإحداثيات الكارتيزية (العمودية).
2- الإحداثيات الاسطوانية .
3- الإحداثيات الكروية .

الحل :

1- في *الإحداثيات الكارتيزية* نستنتج من المثال السابق أن :

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = 0 \text{ حيث } g_{pp} = 1 \quad , \quad g_{pq} = 0$$

2- الإحداثيات الاسطوانية :

$$x^1 = \rho \quad , \quad x^2 = \varphi \quad , \quad x^3 = z$$

وحيث أن

$$g_{11} = 1 \quad , \quad g_{22} = \rho^2 \quad , \quad g_{33} = 1$$

ورموز كريستوفل الوحيدة الغير صفرية تكون من النوع الثاني حينما $p = 2$ وهي على الصورة :

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \right) = -\rho$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \right) = \frac{1}{\rho}$$

3- في الإحداثيات الكروية :

$$x^1 = r \quad , \quad x^2 = \theta \quad , \quad x^3 = \varphi$$

حيث ان

$$g_{11} = 1 \quad , \quad g_{22} = r^2 \quad , \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

رموز كريستوفل من النوع الثاني تكون غير صفرية حينما $p = 2$ أو $p = 3$:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right) = -r$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 33 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin^2\theta\right)$$

$$= -r\sin^2\theta$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r^2 \sin^2\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{2}.2\sin\theta\cos\theta = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 13 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$= \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin^2\theta\right) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r^2 \sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin^2\theta}.2\sin\theta\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

الإنحدار والتباعد والإلتفاف و مؤثر لابلاس

الإنحدار : إذا كانت ϕ دالة قياسية فإن انحدار هذه الدالة يعرف بالمعادلة :

$$\underline{\nabla}\phi = \text{grad } \phi = \phi_{,p} = \frac{\partial\phi}{\partial x^p}$$

حيث $\phi_{,p}$ هي المشتقات المتحدة الإختلاف للدالة ϕ بالنسبة على x^p .

المشتقات المتحدة الإختلاف :

المشتقة المتحدة الإختلاف لكمية ممتدة A_p بالنسبة إلى x^q يرمز لها بالرمز $A_{p,q}$ تعرف بالعلاقة :

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s$$

و المشتقة المتحدة الإختلاف لكمية ممتدة A^p بالنسبة إلى x^q يرمز لها بالرمز $A^p{}_{,q}$ تعرف بالعلاقة :

$$A^p{}_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix} A^s$$

وهي كمية مختلطة من الرتبة الثانية .

تدرج الدالة (الكمية) ϕ :

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^p} = \phi_{,p} \qquad ...(1)$$

التباعد: يعرف تباعد الكمية A^p هو انكماش المشتقة المتحدة الإختلاف بالنسبة إلى x^q أي أن الإنكماش للكمية $A^p{}_{,q}$

$$\text{div } A^p = A^p{}_{,q} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g} A^k\right) \qquad ...(2)$$

الدوران أو الإلتفاف :

$$\text{curl } A_p = A_{p,q} - A_{q,p} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p} \qquad ...(3)$$

مؤثر لابلاس :

$$\nabla^2\phi = \text{div } \phi_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\, g^{jk}\frac{\partial \phi}{\partial x^k}\right)$$

مثال:

عبر عن التباعد للمتجه A^p بدلالة مركباته الفيزيائية في كل من الإحداثيات الاسطوانية والكروية ؟

الحل:

الإحداثيات الأسطوانية :

$$x^1 = \rho \quad , \quad x^2 = \varphi \quad , \quad x^3 = z$$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \rightarrow \sqrt{g} = \rho$$

المركبات الفيزيائية هي : $A_\rho \ , A_\varphi \ , A_z$

وتعطى بالمعادلات التالية :

$$A_\rho = \sqrt{g_{11}}A^1 = A^1$$

$$A_\varphi = \sqrt{g_{22}}A^2 = \rho A^2$$

$$A_z = \sqrt{g_{33}}A^3 = A^3$$

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}A^k\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho A_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho A_z\right)\right]$$

الإحداثيات الكروية :

$$x^1 = r \quad , \quad x^2 = \theta \quad , \quad x^3 = \varphi$$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2\theta \to \sqrt{g} = r^2 \sin\theta$$

المركبات الفيزيائية : $A_r \ , A_\theta \ , A_\varphi$

$$A_r = \sqrt{g_{11}}A^1 = A^1$$

$$A_\theta = \sqrt{g_{22}}A^2 = rA^2$$

$$A_\varphi = \sqrt{g_{33}}A^3 = r\sin\theta\ A^3$$

$$\text{div } A^p = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}A^k\right)$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\ A_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\sin\theta\ \frac{1}{r}A_\theta\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rA_\varphi\right)\right]$$

مثال :

عبر عن مؤثر لابلاس في كل من الإحداثيات الاسطوانية والكروية .

الحل :

الإحداثيات الاسطوانية :

$$g^{11} = 1\ ,\ g^{22} = \frac{1}{\rho^2}\ ,\ g^{33} = 1$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\ g^{kr}\frac{\partial\phi}{\partial x^r}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

الإحداثيات الكروية :

$$g^{11} = 1 \ , \ g^{22} = \frac{1}{r^2} \ , \ g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} \ g^{kr} \frac{\partial \phi}{\partial x^r} \right)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \ \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$