اسم المقرر: تفاضل وتكامل ٢ بسم الله الرحمن الرحيم اسم الدارس: ....

رقم المقرر: ٥٢٦١ جامعة القدس المفتوحة رقم الدارس: ....

مدة الامتحان: ساعة ونصف **الإجابة النموذجية للامتحان النصفي** تاريخ الامتحان: ١٣/ ٤/ ٢٠٠٩

عدد الاسئلة: ٦ **للفصل الأول "١٠٨٢"**

٢٠٠٨ / ٢٠٠٩

-- نظري –

الفرع الاجباري

اجابة السؤال رقم (١) من نوع (أجب بنعم أو لا) او (√ او ×) (٣٠ علامة)

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الصحيحه	×	×	√	×	√	√	×	×	×	√

السؤال الثاني : فرع أ : ١.

$$\int \sin^2(x).\cos(x)dx$$

نفرض أن

$$u=\sin(x)$$

$$du=\cos(x)dx$$

$$\int u^2\cos(x).\frac{du}{\cos(x)}=\int u^2.du=\frac{u^3}{3}+c$$

$$=\frac{\sin^3(x)}{3}+c$$

٢.

$$\int\frac{2}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

نفرض أن

$$x^2=9\sin^2(u)$$

$$x=3\sin(u) \qquad \Rightarrow \qquad u=\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$dx=3\cos(u).du$$

$$\sin^2(u)+\cos^2(u)=1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2(u)=1-\sin^2(u)$$

$$\int\frac{2*3\cos(u).du}{\sqrt{9-9\sin^2(u)}}=\int\frac{2*\cancel{3}\cos(u).du}{\cancel{3}\sqrt{1-\sin^2(u)}}=\int\frac{2*\cos(u).du}{\sqrt{\cos^2(u)}}=\int\frac{2*\cos(u).du}{\cos(u)}$$

$$=\int 2.du=2u+c=2\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

ب . جد /ي نوع هذا التكامل وجد/ي قيمته :

$$\int_1^3\frac{1}{x-2}dx$$

$$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

بما أن هذا التكامل معتل عند $x=2$

$$\int_1^3 \frac{1}{x-2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x-2}dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}dx$$

$$= \lim_{a\to 2}\int_1^a \frac{1}{x-2}dx + \lim_{b\to 2}\int_b^3 \frac{1}{x-2}dx$$

$$= \lim_{a\to 2} Ln\left|x-2\right|\Big]_1^a + \lim_{b\to 2}\left|x-2\right|\Big]_b^3$$

$$= \lim_{a\to 2}\left(Ln\left|a-2\right| - Ln\left|1-2\right|\right) + \lim_{b\to 2}\left(Ln\left|3-2\right| - Ln\left|b-2\right|\right)$$

$$= \left(Ln0 - Ln1\right) + \left(Ln\left|1\right| - Ln\left|2-2\right|\right)$$

$$= \left(\infty + 0\right) + \left(Ln\left|1\right| - Ln\left|2-2\right|\right)$$

$$= \infty + \left(Ln\left|1\right| - Ln0\right)$$

$$= \infty - \infty = 0$$

.:. إذاً هو تكامل معتل تقاربي .

السؤال الثالث :

$$a_n = \left(3+\frac{2}{n}\right)^{-n}$$

$$a_n = \frac{1}{\left(3+\frac{2}{n}\right)^n}$$

$$a_n = \frac{1}{3^n.\left(1+\frac{2}{3n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n.\left(1+\frac{3n}{2}\right)^n} = \frac{1}{3^n}\times\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} < 1$$

$$0<1$$

الفرع الاختياري : أجب عن سؤالين فقط

السؤال الرابع :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(np)}{n} = ??$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(np)}{n}\right| =$$

$$\frac{\cos(np)}{n} > \frac{1}{n} \qquad p=1$$

.:. $\frac{1}{n}$ تباعدية

وبما أن الأصغر تباعدية إذا $\frac{\cos(np)}{n}$

فهي تباعدية $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(np)}{n}\right|$

والآن نبحث لـ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(np)}{n}\right|$ إن $\cos(np)$ تذبذبية

$$a_n = \frac{\cos(np)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(np)}{n}$$

بما أن $\cos(np)$ تذبذبية إما قيمتها سالبة أو موجبة فإن النهاية لها غير موجودة .

وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(np)}{n} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(np)}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{n}$$

والآن نبحث هل هي متناقصة أم لا حسب شروط ليبنز بما أنها تذبذبية .

١.

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

وبالتالي فهي متناقصة

٢.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{??}{=} 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

تحققت شروط نظرية ليبنز وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(np)}{n}\right|$ تقاربية تقارب مشروط .

السؤال الخامس :

$$F(x) = \frac{x^2}{1-x^3}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (x)^{3.n}$$

$$\therefore F(x) = \frac{x^2}{1-x^3} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(x)^{3.n}$$

$$= \frac{x^2}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^2.(x)^{3.n}$$

$$= \frac{x^2}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(x)^{(2+3.n)}$$

بشرط $|x|<1$ وهو المطلوب

انتهت الإجابة الصحيحة