جامعة بنـها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الفرقة: أولى علوم طبيعية

يوم الامتحان: السبت 15 / 1 / 2011 م

المادة : تفاضل وتكامل

الممتحن: د . / سهير عبد الغفور أبوعوف

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

الامتحان+ نموذج إجابته

جامعة بنهــــا
كلية العلوم
قسـم الرياضيـــــات

دور يناير 2011 م

المـــــادة: تفاضل وتكامل
الزمـــن: ثلاث ساعات
الفرقة: أولى علوم طبيعية
التاريخ: 15/ 1/ 2011م

السؤال الأول:

أ- عين النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-4\tan x}{x}$

ب- أوجد قيمة k التى تجعل الدالة الآتية متصلة عند $x=0$: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{3x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$

إجابة السؤال الأول:

أ-

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x-4\tan x}{x}=\frac{0}{0}\quad\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{5-4\sec^2 x}{1}=1,$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{0}{0}\quad\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=2\sqrt{2},$$

ب- إذا كانت الدالة متصلة عند $x=0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\frac{4}{3},\qquad f(0)=k\qquad\Rightarrow k=\frac{4}{3}$$

السؤال الثانى:

أ- أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية: $y=x\cos x$, $y=\ln\sec 5x$, $y=\dfrac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$,

ب- أحسب المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $y^2=8x$ ومحور السينات والمستقيم $x=2$

إجابة السؤال الثانى:

أ-

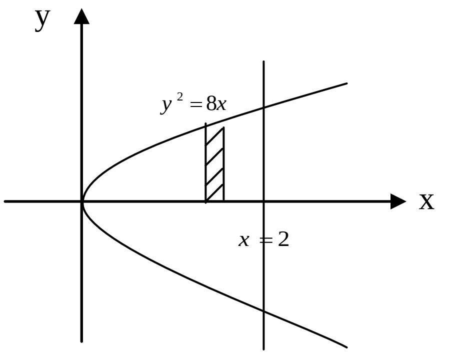
$$y=x\cos x\quad\Rightarrow y'=-x\sin x+\cos x$$

$$y=\ln\sec 5x\quad\Rightarrow y'=\frac{5\sec 5x\,\tan 5x}{\sec 5x}=5\tan 5x$$

$$y=\frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\quad\Rightarrow y'=\frac{\sqrt{1-x^2}\left[\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\cos^{-1}x\right]-\left[\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right]x\cos^{-1}x}{1-x^2}$$

$$=\frac{-x+\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x+\dfrac{x^2\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

ب-



وحد مساحة $A=\int_0^2\sqrt{8x}\,dx=2\sqrt{2}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=2\sqrt{2}\left[\sqrt{2^3}\right]=8$

السؤال الثالث:

أ- اذكر قاعدة ليبنز ثم أوجد المشتقة النونية للدالة: $y = x^3 \sin x$

ب- إذا كان $y = 3\sin\theta - \sin 3\theta,\ x = 3\cos\theta - \cos 3\theta$ فأوجد $\dfrac{dy}{dx}$

إجابة السؤال الثالث:

أ- قاعدة ليبنز:

هى: y فأن المشتقة النونية للدالة $y = f(x)g(x)$ إذا كانت

$$y^{(n)} = (f\ g)^{(n)} = f\ g^{(n)} + C_1^n f^{(1)} g^{(n-1)} + C_2^n f^{(2)} g^{(n-2)} + \dots + C_{r-1}^n f^{(r-1)} g^{(n-r+1)} + C_r^n f^{(r)} g^{(n-r)} + \dots + f^{(n)} g$$

$$f = x^3 \qquad g = \sin x$$

$$f' = 3x^2 \qquad g' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f'' = 6x \qquad g'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$$

$$f''' = 6 \qquad g''' = \cos(x + \frac{2\pi}{2}) = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$$

$$f^{(4)} = 0 \qquad g^{(4)} = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin(x + \frac{4\pi}{2})$$

....

$$f^{(n)} = 0 \qquad g^{(n)} = \cos(x + \frac{(n-1)\pi}{2}) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$y^{(n)} = (f\ g)^{(n)} = x^3 \sin(x + \frac{n\pi}{2}) + C_1^n 3x^2 \sin(x + \frac{(n-1)\pi}{2}) + C_2^n 6x \ \sin(x + \frac{(n-2)\pi}{2}) +$$

$$+ C_3^n 6 \sin(x + \frac{(n-3)\pi}{2}) + 0$$

ب-

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\sin 3\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\cos 3\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta} = \frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{-\sin\theta + \sin 3\theta}$$

السؤال الرابع:

أ- أوجد التكاملات الآتية: $\int \tan^2 x\, dx,\ \int x e^x dx,\ \int \sqrt{25 - x^2}\, dx$

ب- اثبت أن: $\int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 0$

إجابة السؤال الرابع:

أ-

$$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + c$$

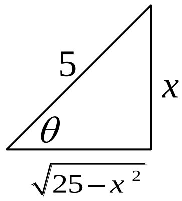
$$\int x e^x dx$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$\Rightarrow \int x e^x dx = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$\int \sqrt{25-x^2}\,dx$$



$$x = 5\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{x}{5}, \quad dx = 5\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{25-x^2}\,dx = 5\int \sqrt{25-25\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta = 25\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta = 25\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{25}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] = \frac{25}{2}\left[\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}\right] =$$

$$= \frac{25}{2}\left[\sin^{-1}\frac{x}{5} + \frac{x}{5}\,\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}\right] + c$$

ب-

$\because \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \quad if$ دالة فردية $f(x)$

$\because f(x) = x^3\sqrt{1-x^2}$ دالة فردية $\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = 0$

السؤال الخامس:

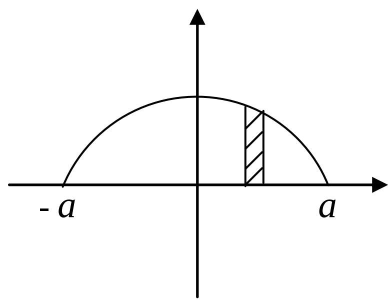
أ- أوجد باستخدام التكامل حجم الكرة التي نصف قطرها (a).

ب- باستخدام التحليل إلى كسور جزئية، أوجد قيمة التكامل الآتي: $\int \frac{1}{5x^2-2x-3}dx$

إجابة السؤال الخامس:

أ- الكرة تنتج من دوران نصف دائرة قطرها a

معادلة الدائرة هي: $x^2 + y^2 = a^2$



$$f(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx = 2\pi\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 2\pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= 2\pi\left[(a^3 - \frac{a^3}{3}) - 0\right] = \frac{4}{3}\pi a^3$$

ب-

$$\frac{1}{5x^2-2x-3} = \frac{1}{(5x+3)(x-1)} = \frac{A}{(5x+3)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$1 = A(x-1) + B(5x+3)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 8B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{8}$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = -A + 3B \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{3}{8} = -A \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{8} = -A$$

$$A = \frac{-5}{8}\ , \quad B = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{5x^2-2x-3} = \frac{-5}{8}\int \frac{dx}{5x+3} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{-25}{8}\ln(5x+3) + \frac{1}{8}\ln(x-1) + c.$$

السؤال السادس:

أ- ارسم المنحني التالي مبيناً فترات التزايد – التناقص – التقعر – التحدب – القيم القصوي – نقط الانقلاب :

$$y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$$

ب- يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تعطي السرعة بالسنتيمتر في الثانية من العلاقة: $v = 3t^2 + 2t + 1$ حيث t الزمن بالثانية . أوجد العجلة والمسافة المقطوعة بعد ثانيتين من بدء الحركة .

ج- احسب التكامل التالي : $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

إجابة السؤال السادس:

أ-

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$$

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-2)(x-1)$$

$$y'' = 12x - 18 = 6(2x - 3)$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad or \quad x = 1$$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

++++ | – – – – | ++++

1 2

– – – – | ++++

3\2

من هذا الرسم نجد أن

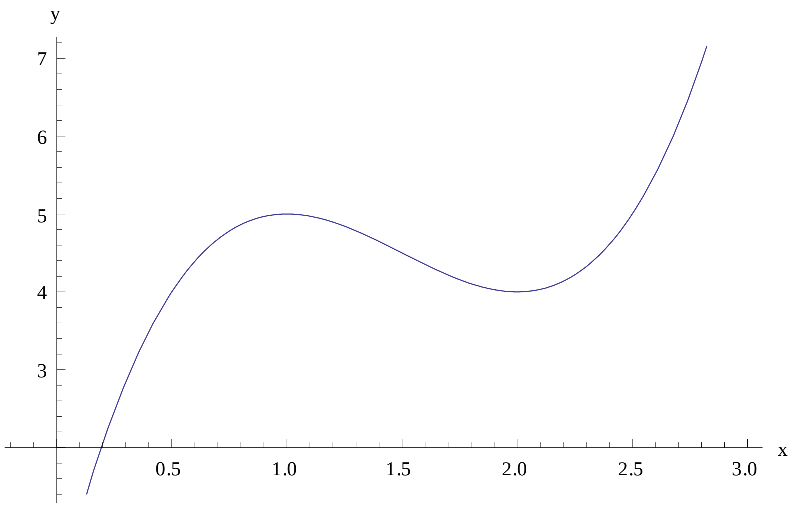
فترات التزايد هى : $(-\infty,1) \cup (2,\infty)$ فترات التناقص هى : $(1,2)$

مناطق التحدب هى : $(-\infty,\frac{3}{2})$ مناطق التقعر هى : $(\frac{3}{2},\infty)$

عندها قيمة عظمى محلية النقطة $(1,5)$

عندها قيمة صغرى محلية النقطة $(2,4)$

نقطة انقلاب النقطة $(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$



ب-

$$v = 3t^2 + 2t + 1$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 2 \qquad \Rightarrow \qquad a\big|_{t=2} = 14cm/\sec^2$$

$$d = \int_0^2 v\,dt = \int_0^2 (3t^2 + 2t + 1)dt = \left[t^3 + t^2 + t\right]_0^2 = 14cm$$

ج-

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}dx = \int_0^1 \frac{e^x e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx$$

$$y = e^x \qquad dy = e^x\,dx\,, \qquad y: 1 \to e$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}dx = \int_0^1 \frac{e^x e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx = \int_1^e \frac{y}{\sqrt{y + 1}}dy = \int_1^e \frac{y + 1 - 1}{\sqrt{y + 1}}dy = \int_1^e (\sqrt{y + 1} - \frac{1}{\sqrt{y + 1}})dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}(y + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{y + 1}\right]_1^e = \left[\frac{2}{3}(e + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{e + 1}\right] - \left[\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right]$$

انتهت الأسئلة والأجوبة،

متمنياً للجميع التوفيق والنجاح،

د. سهير عبد الغفور أبوعوف