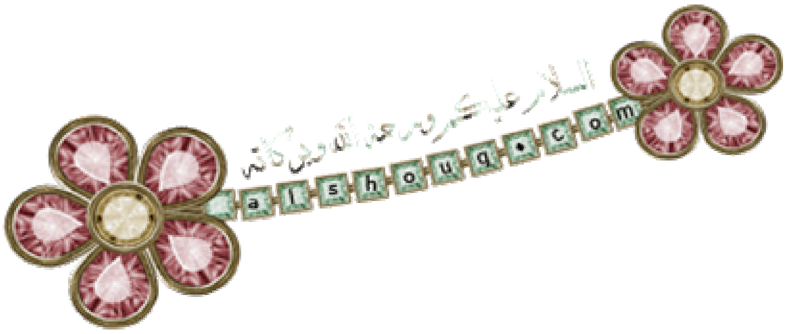
هذه المجموعة من الدروس في التحليل الحقيقي من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com



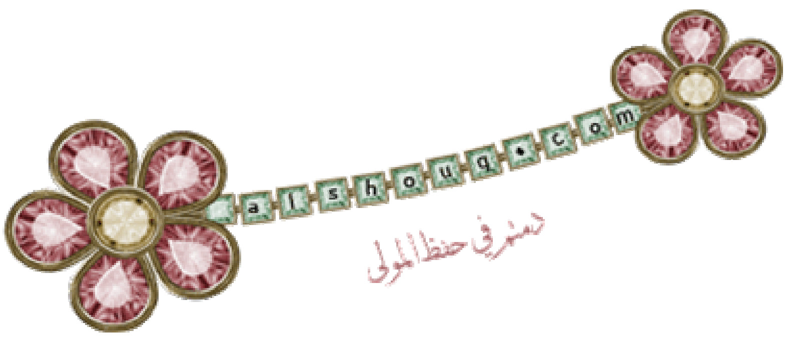
سنبدأ هنا بإذن الله شرح لسلسلة جورية جديدة تتحدث عن موضوع ذو أهميه بالغة وهو التحليل الحقيقي

المواضيع التي سيتم التطرق لشرحها بهذه السلسلة هي: الأعداد النسبية والغير نسبية ،نظام الأعداد الحقيقية ، مسلمة الترتيب لمجموعة الأعداد الحقيقية ،القيمة المطلقة ،خاصية الإكتمال لمجموعة الأعداد الحقيقية ،خاصية أرشميدس بدلالة عناصر في R ،خاصية الكثافة، ومواضيع متعددة عن متتابعات الأعداد الحقيقية ،نهاية الدوال الحقيقية ،اتصال الدوال الحقيقية

المراجع المستخدمة :

أساسيات التحليل الحقيقي (الجزء الأول)للأستاذ الدكتور محمود أبو العز والدكتوره فدوى سلامه أبو مريفة والدكتور :فتحي عبد السلام . +المحاضرات الجامعية..

تمنياتي للجميع بالمتعة و الفائدة العلمية
نسألكم صالح دعائكم..



الأعداد النسبية وغير النسبية

Rational and Irrational Numbers

تعريف :

أي عدد يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ حيث a,b عددان صحيحان يسمى عدد نسبي ، ويمكن فرض أن (a,b)=1

(وتقرأ a,b ليس بينهما عامل مشترك) ونرمز لمجموعة الأعداد النسبية بالرمز $\mathbb{Q}$ حيث:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$

أمثله على الأعداد النسبية الأعداد :

$$\frac{1}{2},1,\frac{3}{4},2,-3,\frac{-2}{5},.....$$

تعريف :

العدد الذي لا يمكن كتابته كنسبة بين عددين صحيحين يسمى عدد غير نسبي . ونرمز لمجموعة الأعداد غير النسبيه بالرمز $\mathbb{Q}^c$حيث:

$$\mathbb{Q}^c=\left\{x : x \in \mathbb{R},\ x \notin \mathbb{Q}\right\}$$

1

أمثله على الأعداد غير النسبية الأعداد :

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, \pi, e, -\sqrt{2}, ...$$

ملحوظة :

إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن x يمكن كتابتها على الصورة العشرية المنتهية أو غير المنتهية سواء كان موجباً أو سالباً .

ومن أمثلة ذلك :

$$3, -6, ..., \frac{3}{4} = 0.75, -\frac{1}{6} = -0.166..., \sqrt{2} = 1.4142135...,$$
$$\pi = 3.141592...., 23.257444$$

إذن لدينا :

(١) العدد النسبي في تمثيله العشري إما ينتهي (أي يتكون من أصفار على يمين آخر رقم) ، أو يتكرر في دورات منتظمة إلى مالانهاية.

ومن أمثلة ذلك :

$$\frac{1}{2} = 0.5, \frac{3}{25} = 0.12, \frac{10}{3} = 3.33...,$$
$$\frac{1}{7} = 0.142857142857..., \frac{2}{11} = 0.181818...$$

والعكس صحيح بمعنى أنه إذا وجد أي عدد في الصورة العشرية بحيث يكون منتهياً أو مكرراً في دورات منتظمة إلى مالانهاية فإنه يكون عدداً نسبياً .

(٢) العدد غير النسبي في تمثيله العشري لا ينتهي ولا يتكرر في دورات منتظمة .

ومن أمثلة هذه الأعداد :

$$\sqrt{2} = 1.141421356...$$
$$\pi = 3.141592653589..$$

مثال :

بين أن العدد $3.149149149....$ **عدد نسبي .**

الحل :

نفرض أن

$$n = 3.149149149.... \quad \rightarrow (1)$$
$$1000n = 3149.149149.... \quad \rightarrow (2)$$

بطرح (١) من (٢) نحصل على :

$$999n = 3146 \Rightarrow n = \frac{3146}{999}$$

3

أي أن العدد المعطى n أمكن كتابته كنسبة بين عددين صحيحين لذلك فهو عدد نسبي .

مثال :

بين أن العدد $1.014320320320...$ **عدد نسبي .**

الحل :

نفرض أن

$$n = 1.014320320320...$$
$$1000n = 1014.320320320... \quad \rightarrow (1)$$
$$1000\ 000n = 1014320.320320... \quad \rightarrow (2)$$

بطرح (١) من (٢) نحصل على :

$$999000n = 1013306 \Rightarrow n = \frac{1013306}{999000}$$

أي أن العدد المعطى n أمكن كتابته كنسبة بين عددين صحيحين لذلك فهو عدد نسبي .

مثال :

بين أن العدد $\sqrt{2}$ **ليس عدداً نسبياً ، أي أنه لا يوجد عدد نسبي x بحيث** $x^2 = 2$**.**

4

الحل :

نفرض العكس ، نفرض وجود عدد نسبي $x = \frac{a}{b}$ بحيث أن :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \quad ...(*)$$

إذن a^2 عدد زوجي (ومن نظرية الأعداد) نستنتج أن a عدد زوجي إذاً يمكن كتابة a=2k ومنها وبالتعويض في (*) نحصل على :

$$4k^2 = 2b^2 \rightarrow 2k^2 = b^2$$

إذاً b^2 عدد زوجي ومنها b تكون عدد زوجي أي أن b=2m أي أنه يوجد عامل مشترك بين a,b وهذا يناقض تعريف العدد النسبي وبالتالي حصلنا على تناقض ، أي أنه لا يوجد عدد نسبي مربعه يساوي 2 أو بصورة أخرى لا يوجد حل نسبي للمعادلة $x^2 = 2$ (أي أن $\sqrt{2}$ ليس عدد نسبي).

مبرهنة :

إذا كان nعدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً تاماً ، فإن $\sqrt{n}$ عدد غير النسبي .

البرهان :

نفرض أن n لا يحتوي على عامل تربيعي أكبر من 1 ، ونفرض أن $\sqrt{n}$ عدد نسبي . ونحصل على تناقض للفرض .

من الفرض يكون $\sqrt{n}=\frac{a}{b}$ ، حيث a,b ليس بينهما عامل مشترك . إذن ،

$$nb^2=a^2$$

الطرف الأيسر مضاعفات n إذن a^2 مضاعفات n وبالتالي فإن a أيضاً سيكون من مضاعفات العدد n وحيث أن n ليس له عامل تربيعي أكبر من 1 إذن a يمكن كتابته في الصورة :

$$a=nc\,,c\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow a^2=n^2c^2\Rightarrow n^2c^2=nb^2\Rightarrow nc^2=b^2$$

إذن ، b أيضاً سيكون مضاعفات n . أي أن a,b مضاعفات للعدد n أي يوجد بينهما عامل مشترك وهذا يناقض الفرض أي أن $\sqrt{n}$ غير نسبي .

مبرهنة :

إذا كان $a_0,a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{Z}$ وكان p,q في $\mathbb{Z}$ بحيث أن p يقسم a_0 وكذلك q يقسم a_n فإن الجذور النسبيه (إن وجدت) لمعادلة كثيرة الحدود

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x^1+a_0=0$$

حيث: $a_n \neq 0 \, , \, n \geq 1$ تأخذ الصورة $\frac{p}{q}$.

مثال :

بين أن $\sqrt{3}$ ليس عدداً نسبياً بطريقتين مختلفتين .

الحل :

الطريقة الأولى (بفرض العكس) :

بفرض أن $\sqrt{3}$ عدد نسبي أي أننا نستطيع كتابته على الصورة :

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

حيث : $b \neq 0 \, , \, a,b \in \mathbb{Z} \, , (a,b) = 1$

أي أن $\frac{a^2}{b^2} = 3 \Rightarrow a^2 = 3b^2$

إذن a^2 من مضاعفات 3 وبما أن $3 \mid a^2$ فإن $3 \mid a$

ومنه فإن a=3k حيث $k \in \mathbb{Z}$ أي أن

$$a^2 = 9k^2 \to 3b^2 = 9k^2 \to b^2 = 3k^2$$

ومنها نجد أن $(a,b) \neq 1$ وهذا تناقض بالتالي فإن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي .

7

الطريقة الثانية : (بإستخدام مبرهنة الجذور النسبية)

الجذور النسبية للمعادلة $x^2 - 3 = 0$ نستطيع حصرها بقواسم العدد 3- $a_2 = 1 , a_0 = -3$ وهي $\pm 1, \pm 3$.

وبالتعويض في المعادله فإن $\pm 1, \pm 3$ لا تحقق المعادلة وبالتالي فإنها ليست جذوراً لها . أي أن العدد $\sqrt{3}$ الذي يحقق المعادلة عدد غير نسبي.

مثال :

بين أن العدد $\left(3-\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ لايمثل عدداً نسبياً .

الحل :

بفرض أن $a = \left(3-\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ فإن $a^3 = 3 - \sqrt{2}$

وبالتالي فإن $\sqrt{2} = 3 - a^3$ أي أن

$2 = \left(3 - a^3\right)^2$.

ومنها فإن

$$a^6 - 6a^3 + 7 = 0$$

أي أن العدد a يحقق المعادلة :

$$x^6 - 6x^3 + 7 = 0$$

و بإستخدام مبرهنة الجذور النسبية تنحصر الجذور النسبية للمعادلة بالأعداد $\pm 1, \pm 7$ وحيث أن أياً من هذه الأعداد لايحقق المعادله المذكورة فإن الجذر a ليس نسبياً وبالتالي يكون $\left(3-\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ عدداً غير نسبي.

ملاحظة هامه :

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ تمثل حقل ،
بينما مجموعة الأعداد الغير نسبية $\mathbb{Q}^c$ لا تمثل حقل
لأن عملية الإغلاق بالنسبة للجمع والضرب غير متحققة:

$$\sqrt{2}\ .\sqrt{2} = 2$$

(عدد غير نسبي)(عدد غير نسبي) = عدد نسبي

أيضا

$$\sqrt{2}\ +\left(-\sqrt{2}\right) = 0$$

و الصفر عدد نسبي .

نظام الأعداد الحقيقة

System of Real Numbers

يطلق على النظام الجبري $(\mathbb{R};+,\bullet)$ نظام الأعداد الحقيقية حيث $(+),(\bullet)$ عمليتان ثنائيتان هما الجمع والضرب معرفتين كالتالي :

عملية الجمع $(+)$:

$$+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$+:(a,b)\to a+b$$

عملية الضرب $(\bullet)$:

$$\bullet:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$\bullet:(a,b)\to a\bullet b$$

مسلمات الأعداد الحقيقة

Axioms of Real Number

مجموعة الأعداد الحقيقية تحت عمليتي الجمع والضرب تحقق المسلمات التالية :

أولاً : مسلمات جمع الأعداد الحقيقية

(Addition Axioms)

(١) <u>خاصية الدمج</u>:

لأي ثلاثة أعداد $a,b,c\in\mathbb{R}$ فإن :

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

10

(٢) خاصية الإبدال :

لأي عددين $a, b \in \mathbb{R}$ فإن :

$$a + b = b + a$$

(٣) خاصية العنصر المحايد :

يوجد عنصر $0 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$a + 0 = a \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

يسمى 0 العنصر المحايد .

(٤) خاصية النظير:

لكل $a \in \mathbb{R}$ يوجد عدد $b \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$a + b = b + a = 0$$

ويرمز للعدد b بالرمز $-a$ ويسمى النظير الجمعي للعدد a .

ثانياً : مسلمات ضرب الأعداد الحقيقية

(Multiplication Axioms)

(١) خاصية الدمج للضرب:

لأي ثلاثة أعداد $a, b, c \in \mathbb{R}$ فإن :

$$a(bc) = (ab)c$$

(٢) خاصية الإبدال للضرب:

لأي عددين $a, b \in \mathbb{R}$ فإن :

$$ab = ba$$

11

(٣) خاصية العنصر المحايد الضربي :
يوجد عدد $1 \in \mathbb{R}$ يختلف عن الصفر بحيث أن:

$$1.a = a.1 = a \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(٤) خاصية النظير:
لكل عدد $a \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ يوجد عدد $b \in \mathbb{R}$ بحيث أن :

$$a.b = b.a = 1$$

ويرمز للعدد b بالرمز a^{-1} ويسمى معكوس (النظير الضربي) للعدد a .

(٥) خاصية التوزيع :
لأي ثلاثة أعداد $a, b, c \in \mathbb{R}$ فإن :

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$(a+b).c = a.c + b.c$$

ملاحظه :
نظام الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R};+,\bullet)$ يشكل حقل يسمى حقل الأعداد الحقيقية وذلك لأن :

١- $(\mathbb{R},+)$ زمرة إبدالية .
٢- $(\mathbb{R},\bullet)$ زمرة إبدالية .
٣-عملية الضرب تتوزع على الجمع .

مبرهنة :

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ فإن :

(١) $a.0 = 0$ لكل $a \in \mathbb{R}$.

(٢) $-(-a) = a^{-1}$ لكل $a \in \mathbb{R}$.

(٣) إذا كان $b \neq 0$ فإن $\left(b^{-1}\right)^{-1} = b$.

(٤) $(-a)c = a(-c) = -(ac)$.

(٥) $(-a)+(-b) = -(a+b)$.

(٦) $(-a)(-b) = -(ab)$.

(٧) إذا كان $d \neq 0$ فإن $-\left(d^{-1}\right) = (-d)^{-1}$.

البرهان :

(تنويه : سنبرهن (١) و(٣) و(٥) و(٧) والباقي بالمثل ومن لديه أي استفسار ببرهان الفقرات التي لم يتم ذكرها فما عليه إلا أن يسأل)

(١) حيث أن a.1=a وبإضافة a.0 للطرفين نحصل على :

$$a + a.0 = a.1 + a.0 = a(1+0) = a.1 = a$$

ولكن $z + a = a$ تقتضي أن $z = 0$، إذن

$a + a.0 = a \Rightarrow a.0 = 0$.

(٣) بما أن $b.b^{-1} = 1$ ، إذن $b^{-1}.b = 1$. بالتالي فإن b هو المعكوس الضربي للعنصر b^{-1} أي أن $b = \left(b^{-1}\right)^{-1}$

.

(٥) حيث أن :

$$-a-b+(a+b)=-a-b+a+b$$

$$=-a+a-b+b=0+0=0$$

أي أن $-a-b$ هو النظير الجمعي للعنصر $(a+b)$.

أي أن أيضاً نلاحظ أن وذلك لأن . أي أن $-a+b$ هو معكوس $(a-b)$.

(٧) إذا كان $d\neq 0$ فإن $-(d^{-1})=(-d)^{-1}$. (أي أن المعكوس الجمعي للمعكوس الضربي يساوي المعكوس الضربي للمعكوس الجمعي) وذلك متحقق من الخاصية (٦) وبالتالي نجد أن

$$(-d^{-1})=(-d)=d^{-1}d=1$$

. ومنه

$$.(-d^{-1})=\frac{1}{-d}=(-d)^{-1}$$

عدم وجود قواسم للصفر في :

Non Existence of Zero Divisors in

يعرف قاسم الصفر في مجموعة ما على أنه عنصر $x\neq 0$ بحيث يوجد عنصر $y\neq 0$ يحقق $xy=0$. كمثال على ذلك المجموعة التي عناصرها مصفوفات إذا كان لدينا المصفوفتين A,B حيث :

14

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

هذه الخاصية لا تتوفر في الأعداد الحقيقية ، حيث أنه إذا كان $xy \in \mathbb{R}$ بحيث $xy = 0$ فإما x أو y أو كلاهما يكون صفراً ونوضح ذلك كالآتي :

بفرض $xy = 0$ وبإعتبار $x \neq 0$ إذن بالضرب في x^{-1} نحصل على :

$$x^{-1}(xy) = x^{-1}.0$$

ولكن $a.0 = 0$ إذن :

$$(x^{-1}x).y = 0 = 1.y = y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^{-1}(xy) = x^{-1}.0$$

ولكن $x.0 = 0$ x.0=0 إذن نجد أن :

$$(x^{-1}x).y = 0 = 1.y = y$$

ومنه $y = 0$.

مسلمة الترتيب للحقل $\mathbb{R}$

The Order Axiom of $\mathbb{R}$

توجد مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبه نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}^+$ تحقق الخصائص التالية :

(P1) إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^+$ فإن $a + b \in \mathbb{R}^+$.

(P2) إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^+$ فإن $a.b \in \mathbb{R}^+$.

ملاحظة :

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$ حيث $\mathbb{R}^-$ ترمز لمجموعة الأعداد الحقيقية السالبة .

تعريف :

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^+$ فإن :

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+$$

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

مبرهنة :

ليكن x,y,z ثلاثة أعداد حقيقية . عندئذ :

(١) لأي عددين حقيقين $x, y \in \mathbb{R}$ فإن إحدى العلاقات التالية تتحقق :

(أ) $x < y$. (ب) $x = y$. (ج) $x > y$.

(٢) إذا كان : $y > z$ و $x > y$ فإن $x > z$.

16

(٣) إذا كان $x > y$ فإن $x+z > y+z$ لكل $z \in \mathbb{R}$.

(٤) إذا كان $z > 0$ وكان $x > y$ فإن $xz > yz$.

(٥) إذا كان $z < 0$ وكان $x > y$ فإن $xz < yz$.

(٦) إذا كان : $u > v$ و $x > y$ فإن $x+u > y+v$.

(٧) إذا كان : $0 \le x < y$ وأيضاً فإن $xu > yv$.

(٨) لكل $0 \neq x \in \mathbb{R}$ يتحقق أن $x^2 > 0$.

(٩) إذا كان $x > 0$ فإن $x^{-1} > 0$.

(١٠) إذا كان $0 < x < y$ فإن $x^{-1} > y^{-1}$.

(١١) ليكن $x \ge 0$, $y \ge 0$. عندئذ فإن

$$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}.$$

(١٢) إذا كان $0 < x < y$ لأي عدد حقيقي موجب n ، فإن $x^n < y^n$، والعكس صحيح .

البرهان :

(تنويه : سنبرهن (١) و(٢) و(٤) و(٦) و(٨) و(١٠) و(١٢) والباقي بالمثل
ومن لديه أي استفسار ببرهان الفقرات التي لم يتم ذكرها فما عليه إلا أن يسأل)

(١) نلاحظ أنه إما $x = y$ أو $x \neq y$. إذا كانت $x \neq y$ فإن $x - y \neq 0$. إذن ، إما $x - y \in \mathbb{R}^+$ وفي هذه الحالة $x > y$. أو $-(x-y) \in \mathbb{R}^+$ ، أي أن $-x + y \in \mathbb{R}^+$ ومنه $y - x \in \mathbb{R}^+$ ، وبالتالي فإن $y > x$.

(٢) إذا كان $x > y$ فإن $x - y \in \mathbb{R}^+$. وحيث إن $y > z$ فإن $y - z \in \mathbb{R}^+$. عندئذ ،

$$x - y + (y - z) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + (-y + y) - z \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow x + 0 - z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x - z \in \mathbb{R}^+$$

إذن ، $x > z$.

(٤) نلاحظ $x > y \Rightarrow x - y \in \mathbb{R}^+$. وعليه فإن $z > 0$ تقتضي أن $z \in \mathbb{R}^+$ ومن الخاصية (P2)نجد أن $z(x - y) \in \mathbb{R}^+$. وعليه

$$zx - zy \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xz - yz \in \mathbb{R}^+$$

إذن ، $xz > yz$.

(٦) حيث أن $x > y$ و $u > v$ فإن $x - y \in \mathbb{R}^+$ و $u - v \in \mathbb{R}^+$.

ويكون لدينا $(x - y) + (u - v) \in \mathbb{R}^+$وبالتالي :

$$(x + u) - (y + v) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + u > y + v$$

(٨) إذا كان $x \neq 0$ فإما أن يكون $x \in \mathbb{R}^+$ أو $-x \in \mathbb{R}^+$.

فإذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ فإن

$$x^2 = x.x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x^2 > 0$$

بالمثل إذا كان $-x \in \mathbb{R}^+$ فإن

$$x^2 = (-x).(-x) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x^2 > 0$$

18

(١٠) حيث أن $y-x>0$ فإن $y-x\in\mathbb{R}^+$ ومن الخاصية (٩) حيث

$x>0\ ,\ y>0$ فإن $x^{-1},y^{-1}\in\mathbb{R}^+$. إذن :

$$x^{-1}y^{-1}(y-x)\in\mathbb{R}^+$$

وعليه :

$$x^{-1}y^{-1}y-y^{-1}x^{-1}x=x^{-1}-y^{-1}\in\mathbb{R}^+$$

ومنه :

$$.x^{-1}>y^{-1}$$

(١٢)حيث أن $0<x<y$ فإن $0<x^2<y^2$. إذن الخاصية متحققة عندما يكون $n=2$.

وبفرض أن لكل $x<y$ يتحقق $x^k<y^k$.

بالإستقراء الرياضي نبرهن صحة المتباينة عند $k+1$.

لدينا

$$\begin{aligned} y^{k+1}-x^{k+1} &= y^{k+1}-x^k y+x^k y-x^{k+1} \\ &= y\left(y^k-x^k\right)+x^k\left(y-x\right) \end{aligned}$$

وحيث إن :

$$\left(y^k-x^k\right),\left(x-y\right),x,y\in\mathbb{R}^+$$

فإن :

$$y\left(y^k-x^k\right),x^k\left(x-y\right)\in\mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow y\left(y^k-x^k\right)+x^k\left(x-y\right)\in\mathbb{R}^+$$

إذن ، $y^{k+1}-x^{k+1}\in\mathbb{R}^+$. أي أن المتباينه صحيحة عند $n=k+1$ فتكون صحيحة لأي عدد موجب n .

العكس :

نبين أنه إذا كان $0 < x^n < y^n$ فإن $x < y$.

نفرض أن $x = y$ ، إذن ، $x^n = y^n$

وإذا كان $0 < y < x$ فإن $0 < y^n < x^n$ ونحصل على

تناقض وبالتالي فإن $0 < x < y$ عندما يكون

. $0 < x^n < y^n$

مثال :

بفرض ان a,b عددان حقيقيان لهما نفس الإشارة . إذا كان $a < b$ بين أن $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

الحل :

معطى أن $ab > 0$ و $a < b$ عندئذ :

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

مثال :

إذا كان a,b عددين غير سالبين ، بين أنه إذا كان $a \leq b$ فإن :

$\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

الحل :

حيث أن :

$$b - a = \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) \; ; \; \sqrt{b} + \sqrt{a} \geq 0$$

20

إذن ، لابد أن يكون $b-a$ ، $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ لهما نفس الإشارة . ولكن $b-a \geq 0$ (معطى) ، عندئذ :

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{b} \geq \sqrt{a}$$

مثال :

برهن أنه إذا كان a,b عددين حقيقين ، وكان $a < b$ فإن $a < \frac{a+b}{2} < b$.

الحل :

بما أن $a < b$ فإن

$$a-b<0 \Rightarrow \frac{a-b}{2}<0$$

. وعليه

$$a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}<0 \Rightarrow a<\frac{a+b}{2}$$

ومن جهة أخرى

$$\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}<0 \Rightarrow \frac{a+b}{2}<b$$

إذن ، $a<\frac{a+b}{2}<b$.

مثال :

إذا كان $0 \leq a \leq b$ ، **برهن أن** $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$.

21

الحل :

$$0 \le a \le b \Rightarrow \frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} < 0$$

مثال :

برهن أنه لا يوجد عدد حقيقي a بحيث يحقق $x \le a$ لكل $x \in \mathbb{R}$

.

الحل :

إذا وجد هذا العدد a فإن $a > 0$ وإذا كان x موجباً ($x > 0$) بالتالي

$$a > 0 \Rightarrow a+1 > 0$$

فإذا كان $x=a+1$ فإن $x > a$ وهذا تناقض مع $x \le a$ لجميع $x \in \mathbb{R}$. إذن لا يوجد مثل هذا العدد a الذي يحقق $x \le a$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

مثال :

إذا كان x عدداً حقيقياً يحقق $0 \le x < h$ لأي عدد حقيقي موجب h ، برهن أن $x=0$.

الحل :

بفرض أن $x > 0$ ، وبما أن $2 > 0$ فإن $\frac{1}{2} > 0$، وبالتالي

$\frac{1}{2}.x > 0$.

22

الآن :

$$2\left(\frac{1}{2}.x\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x=2.\frac{1}{2}x=x$$

أيضاً :

$$x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x>0$$

إذن ، $x>\frac{1}{2}x>0$.

فإذا كان $h=\frac{1}{2}x$ فإن المتباينة $0\le x<h$ لا تتحقق . إذن ، $x=0$.

مثال :

إذا كان $a,b\in\mathbb{R}^{+}$ **برهن أن :**

$$\sqrt{ab}\le\frac{1}{2}(a+b)$$

الحل :

إذا كان $a\ne b$, $b>0$, $a>0$ فإن

$$\sqrt{a}>0\ ,\sqrt{b}>0\ ,\sqrt{a}\ne\sqrt{b}$$

وعليه

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{2}>0\Rightarrow a-2\sqrt{ab}+b>0$$

ومنه $\sqrt{ab}\le\frac{1}{2}(a+b)$.

مثال :

أوجد مجموعة الأعداد الحقيقية التي تمثل حلاً للمتباينة :

(أ) $-2x+3>5$.

(ب) $x^2-3x+2\geq 0$.

(ج) $\frac{x-2}{x+1}>0$.

الحل :

(أ) $-2x+3>5$.

وعليه $-2x>5-3=2$

وبالتالي $x<-1$.

إذن ، مجموعة الحل هي قيم x التي تحقق $x<-1$.

(ب) $x^2-3x+2\geq 0$. إذن ، $(x-1)(x-2)\geq 0$

في مثل هذه الحاله **يكون لدينا احتمالان** :

الأول : إما أن يكون $(x-1)\geq 0\ ,(x-2)\geq 0$

وينتج عنه أن $x\geq 1\ ,\ x\geq 2$ وقيم x التي تحقق الشرطين معاً هي $x\geq 2$ والتي تمثل مجموعة الحل .

الثاني : أن يكون $(x-1)\leq 0\ ,(x-2)\leq 0$ وينتج عنه أن $x\leq 1\ ,\ x\leq 2$ وقيم x التي تحقق الشرطين معاً هي $x\leq 1$ والتي تمثل مجموعة الحل .

(ج) $\frac{x-2}{x+1} > 0$. ومن المعطى نجد أن

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)^2} > 0$$

إذن ،

$$(x+1)^2 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) > 0$$

ويكون لدينا احتمالان :

الأول: إما أن يكون $(x-2) \geq 0$, $(x+1) \geq 0$ وينتج عنه أن $x \geq -1$, $x \geq 2$ وقيم x التي تحقق الشرطين معاً هي $x \geq 2$ والتي تمثل مجموعة الحل .

الثاني : أن يكون $(x-2) \leq 0$, $(x+1) \leq 0$ وينتج عنه أن $x \leq -1$, $x \leq 2$ وقيم x التي تحقق الشرطين معاً هي $x \leq -1$ والتي تمثل مجموعة الحل .

25

القيمة المطلقة

Absolute Value

تعريف :

لأي عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ فإن القيمة المطلقة للعدد x ويرمز لها بالرمز $|x|$ وتنطق mod x تعرف كالآتي :

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \ge 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

أو بأسلوب آخر :

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ -x & , \quad x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

ملحوظة :

(١) إذا كان $x \ge 0$ فإن $|x| = x = \sqrt{x^2}$.

(٢) إذا كان $x < 0$ فإن $|x| = -x = \sqrt{x^2}$.

(٣) $|x| = \max\{x, -x\}$.

(٤) إذا اعتبرنا القيمة المطلقة دالة فإن مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وصورتها (المدى) هو المجموعة $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

26

مبرهنة :

أ) $|x| \geq 0$.

(ب) $x \geq -|x| \;\; \wedge \;\; x \leq |x|$.

(ج) $|x| = |-x|$.

(د) $|xy| = |x||y|$.

(ه) $y \neq 0 \;\; , \;\; \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

(و) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(ز) $a > 0 \;,\; |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

(ح) $|x| > a \Leftrightarrow x > a \;\vee\; x < -a$.

مثال :

ضع المتباينتين التاليتين في صورة المقياس :

(أ) $2 < x < 6$.

(ب) $1 < 2x - 3 < 9$.

الحل :

(أ) حيث أن $\frac{1}{2}(2+6)=4$ ومنه فإن

$$2-4 < x-4 < 6-4 \Rightarrow -2 < x-4 < 2 \Rightarrow |x-4| < 2$$

.

(ب) من المعطى لدينا $4 < 2x < 12$ ومنه فإن

$$2 < x < 6 \Rightarrow |x-4| < 2$$

27

مثال :

إذا كان $\varepsilon > 0$ **فأوجد العدد المقابل** $\delta > 0$ **بحيث أنه إذا كان** $|x+1| < \delta$ **فإن** $|(4x+1)+3| < \varepsilon$.

الحل :

$$|(4x+1)+3| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x+4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1| < \frac{\varepsilon}{4}$$

فإن كان $|x+1| < \delta$ وكانت $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$ فإن

$|(4x+1)+3| < \varepsilon$.

مثال :

اوجد متباينة في الصورة $|x-c| < \delta$ **يكون حلها هو إحدى الفترات المفتوحة الآتيه :**

(أ) $(-7,3)$.

(ب) $(-3,7)$.

(ج) $(-3,3)$.

الحل :

(أ) $|x+2| < 5$.

(ب) $|x-2| < 5$.

(ج) $|x| < 3$.

28

مثال :

أثبت أنه لجميع الأعداد الحقيقية a,b فإن :

$$\left||a|-|b|\right| \le |a-b|$$

الحل :

$$\left||a|-|b|\right|^2 = \left(|a|-|b|\right)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2$$
$$= a^2 - 2|a||b| + b^2 \le a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

وبالتالي فإن

$$\left||a|-|b|\right| \le \sqrt{(a-b)^2} = |a-b| .$$

مثال :

برهن أنه إذا كان $|x-3|<2$ **فإن** $|x^2-9| \le 16$ **.**

الحل :

بما أن $|x-3|<2$

إذن :

$$|x-3||x+3| = |x-3||x-3+6| \le 2\left(|x-3|+|6|\right)$$
$$\le 2(2+6) = 16$$

خاصية الاكتمال لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

The Completeness Property of $\mathbb{R}$

تعريف :

بفرض $E \neq \varphi$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$:

(أ) يسمى العدد $a \in \mathbb{R}$ حداً علوياً (upper bound) للمجموعة E إذا كان :

$$\forall x \in E \;\Rightarrow\; x \leq a$$

ويقال في هذه الحالة أن E محدودة من أعلى (bounded above) .

(ب) يسمى العدد $b \in \mathbb{R}$ حداً سفلياً (lower bound) للمجموعة E إذا كان :

$$\forall x \in E \;\Rightarrow\; x \geq b$$

ويقال في هذه الحالة أن E محدودة من أسفل (bounded below) .

(ج) إذا كانت E محدودة من أعلى ومن أسفل *يقال أنها محدودة (bounded)*.

(د) إذا كان c حداً علوياً للمجموعة E وكان $c \in E$ فإنه يسمى *عنصراً أكبر في E* ويرمز له بالرمز $c = \max E$.

كذلك إذا كان d حداً سفلياً للمجموعة E وكان $d \in E$
فإنه يسمى <u>*عنصر أصغر في E*</u> ويرمز له بالرمز
$d = \min E$.

مثال :

حدد فيما إذا كانت المجموعات التالية محدودة أو لا :

(أ) $E = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.

(ب) $E = \{-2, -4, -6, ...\}$.

(ج) $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$.

(د) $E = \{...., -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...\}$.

الحل :

(أ) المجموعة $E = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ محدودة من أسفل
وليست محدودة من أعلى .

(ب) المجموعة $E = \{-2, -4, -6, ...\}$ محدودة من أعلى
وليست محدودة من أسفل .

(ج) المجموعة $0 \notin E$, $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\} \to 0$
محدودة .

(د) المجموعة $E = \{...., -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...\}$
ليست محدودة من أعلى ولا من أسفل .

ملاحظة هامة :

من الممكن أن ينتمي الحد العلوي أو السفلي للمجموعة
وأيضاً قد لا ينتمي كلاً منهما إليها .

مثال :

اعطِ مثال على حد علوي وحد سفلي للمجموعة A حيث :

(أ) $A = \{x \in \mathbb{R} \ , 2 < x \leq 5\}$.

(ب) $A = \{x \in \mathbb{R} \ , x > 3\}$.

الحل :

(أ) جميع الأعداد الحقيقية $x \geq 5$ تمثل حدود علوية لـ A .
جميع الأعداد الحقيقية $x < 2$ تمثل حدود سفلية لـ A .

(ب) نلاحظ أن المجموعة A ليست محدودة من أعلى لعدم وجود حد علوي لها بينما $x=3$ يمثل حد سفلي لها لاينتمي إلى A.

تعريف :

نفرض أن : $A \neq \varphi$ و $A \subseteq \mathbb{R}$

يسمى العدد $s \in \mathbb{R}$ *أصغر حد علوي (supremum)*

للمجموعة A ويرمز له بالرمز $s = \sup\ A$ **إذا تحقق**

الشرطان :

(أ) أن يكون s حد علوي للمجموعة A أي أن :

$x \leq s \quad , \forall x \in A$

(ب) أن يكون s أصغر حد علوي لـ A بمعنى أنه إذا

وجد حد علوي آخر s^* لـ A فإن : $s \leq s^*$.

مثال :

اوجد $\sup\ A$ **حيث:**

$A = \{x \in \mathbb{R} \ , 2 < x \leq 5\}$

الحل :

بما أن مجموعة الحدود العلوية لـ A هي :

$\{x :\ x \geq 5\}$

إذن فإن أصغر حد علوي : $\sup\ A = 5$.

تعريف :

نفرض أن : $A \neq \varphi$ و $(A \subseteq \mathbb{R})$

يسمى العدد $t \in \mathbb{R}$ *أكبر حد سفلي (infemum)* للمجموعة

A ويرمز له بالرمز $t = \inf\ A$

إذا تحقق الشرطان :

(أ) أن يكون t حد سفلي للمجموعة A أي أن :

$$x \ge t \ , \forall x \in A$$

(ب) أن يكون t أكبر حد سفلي لـ A بمعنى أنه إذا وجد حد سفلي آخر t^* لـ A فإن : $t \ge t^*$.

مثال :

اوجد $\inf A$ **حيث:** $A = (4,10)$.

الحل :

بما أن مجموعة الحدود السفلية لـ A هي :

$$(-\infty, 4]$$

فإن أكبر حد سفلي : $\inf A = 4$.

ملاحظات :

(١) إذا وجد $\sup A$ فإنه وحيد وكذلك الأمر في حالة $\inf A$.

(٢) لاحظ الإختلاف بين

$$\max E, \min E, \sup E, \inf E$$

ففي حالة $\max E, \min E$ فهما عنصران في المجموعة E ولكن $\sup E, \inf E$ ليس بالضرورة عنصرين في المجموعة E.

مثال توضيحي:

اوجد $\sup E, \inf E$ في المجموعات التالية :

(أ) $\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية – $\mathbb{Z}$مجموعة الأعداد الصحيحة – $\mathbb{Q}$مجموعة الأعداد النسبية.

(ب) $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

(ج) $E = \{u_n\}$ **حيث معرفة كالآتي :**

$u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

(د) إذا كانت $E \subseteq \mathbb{R}$ **معرفة كالآتي :**

$E = \left\{x \in \mathbb{Q} , 0 \le x < \sqrt{3}\right\}$

الحل :

(أ) إذا كانت $E = \mathbb{N}$ فإن $\inf \mathbb{N} = 1$ ولكن $\sup \mathbb{N}$ غير موجود لأن $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى أما المجموعتان $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ ليس لها أكبر حد سفلي ولا أصغر حد علوي أي ليس لهما $\inf$, $\sup$ لأن كل من $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ غير محدودتين .

(ب) المجموعة $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ لها

$\sup E = 1$ و $\inf E = 0 \notin E$.

(ج) نلاحظ أن :

$$u_n = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots\right\}$$

ومنه فإن :

$$\sup E = 1 \ , \inf\ E = -1$$

(د) المجموعة $E = \left\{x \in \mathbb{Q} \ , \ 0 \le x < \sqrt{3}\right\}$ لها :

$$\sup E = \sqrt{3} \ , \inf\ E = 0$$

(لاحظ أن $\sup E \notin \mathbb{Q}$ بينما $\inf\ E \in \mathbb{Q}$) .

تنويه مهم :

إذا كان $\sup\ A \in A$ فإن :

$$\sup\ A = \max\ A$$

وإذا كان $\inf\ A \in A$ فإن :

$$\inf\ A = \min\ A$$

مثال :

أوجد $\max E, \min E, \sup E, \inf E$ إن وجد للمجموعة E إذا كانت محدودة ثم بين المجموعات غير المحدودة من أعلى أو من أسفل فيما يلي:

(١) $E = [5, \infty)$.

(٢) $E = (-\infty, 2]$.

(٣) $E = (3, 5]$.

(٤) $E=(e,\pi)$.

(٥) $E=\left\{x\in\mathbb{Q}:\sqrt{2}<x<\sqrt{3}\right\}$.

(٦) $E=\left\{x\in\mathbb{Q}^c:1<x<3\right\}$.

(٧) $E=\left\{x\in\mathbb{Q}:x^2<2\right\}$.

(٨) $E=\left\{2^n:n\in\mathbb{N}\right\}$.

(٩) $E=\left\{x^3:x\in\mathbb{R}\right\}$.

(١٠) $E=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$.

(١١) $E=(e,\pi)\cup(3,5]$.

الحل :

(١) $E=[5,\infty)$.

مجموعة الحدود العلوية لـ E هي $\emptyset$ لأن E غير محدودة من أعلى وبالتالي فإن $\sup E$ غير موجود أي أن $\max E$ أيضاً غير موجود .

مجموعة الحدود السفلية لـ E هي $(-\infty,5]$ وحيث أن $\inf E=5\in E$ بالتالي فإن

$\min E=\inf E=5$.

(٢) $E=(-\infty,2]$.

مجموعة الحدود السفلية لـ E هي φ لأن E غير محدودة من أسفل وبالتالي فإن $\inf E$ غير موجود أي أن $\min E$ أيضاً غير موجود .

مجموعة الحدود العلوية لـ E هي $[2,\infty)$ وحيث أن $\sup E=2\in E$ بالتالي فإن

$\max E=\sup E=2$.

(٣) $E=(3,5]$.

هذه مجموعة محدودة حيث $\min E$ ليس موجوداً .

$\sup E=5=\max E\ ,\ \inf E=3$

(٤) $E=(e,\pi)$.

$\max E\ ,\min E$ ليس موجوداً ولكن

$\sup E=\pi\ ,\ \inf E=e$.

(٥) $E=\{x\in\mathbb{Q}:\sqrt{2}<x<\sqrt{3}\}$

$\max E\ ,\min E$ ليس موجوداً ولكن

$\sup E=\sqrt{2}\ ,\ \inf E=\sqrt{3}$.

(٦) $E=\{x\in\mathbb{Q}^c:1<x<3\}$.

$\max E\ ,\min E$ ليس موجوداً ولكن

$\sup E=1\ ,\ \inf E=3$.

(٧) $E=\{x\in\mathbb{Q}:x^2<2\}=\{x\in\mathbb{Q}:-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$

E محدودة من أعلى ومحدودة من أسفل .

$\max E$, $\min E$ ليس موجوداً ولكن

$\sup E=-\sqrt{2}$, $\inf E=\sqrt{2}$.

(٨) $E=\{2^n:n\in\mathbb{N}\}=\{2,4,8,\dots\}$.

E ليست محدودة من أعلى ولكنها محدودة من أسفل .

$\max E$, $\sup E$ ليس موجوداً و

$\inf E=2=\min E$.

(٩) $E=\{x^3:x\in\mathbb{R}\}$.

E ليست محدودة وبالتالي لا يوجد

$\max E, \min E, \sup E, \inf E$.

(١٠) $E=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\frac{1}{3},\left(\frac{1}{3}\right)^2,\left(\frac{1}{3}\right)^3,\dots\to 0\right\}$

E محدودة ،ولكن $\min E$ غير موجود بينما :

$\sup E=\frac{1}{3}=\max E$, $\inf E=0$.

(١١) $E=(e,\pi)\cup(3,5]$.

$\min E$ ليس موجوداً ولكن

$\sup E=\max E=5$, $\inf E=e$

خاصية الاكتمال للمجموعة $\mathbb{R}$:

لأي مجموعة جزئية $E \subseteq \mathbb{R}$ و $E \neq \varphi$ ومحدودة من أعلى
يوجد عدد حقيقي $u \in \mathbb{R}$ حيث :

$$u = \sup E \in \mathbb{R}$$

أي أن كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة من أعلى يكون *لها أصغر حد علوي* ينتمي للمجموعة $\mathbb{R}$.

ملحوظات :

(١) نلاحظ أن هذه الخاصية ليست متوفرة لكل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، فمثلاً هي غير متوفرة للمجموعة $\mathbb{Q}$
وذلك لأن خاصية الأكتمال للمجموعة $\mathbb{Q}$ تعني مثلا :
أنه لأي مجموعة جزئية $E \subset \mathbb{Q}$ غير خالية ومحدودة من أعلى بأخذ عناصر سيوجد حد علوي $\sup E$ ينتمي للمجموعة $\mathbb{Q}$. وهذا غير محقق كما رأينا من قبل في مثال سابق أن :

$$\sup \left\{x \in \mathbb{Q} \,,\, 0 \le x < \sqrt{3}\right\} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

بذلك فإن خاصية الأكتمال ليست متوفرة للمجموعة $\mathbb{Q}$ كذلك هي غير متحققة للمجموعة $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(٢) خاصية الأكتمال تسمى خاصية أصغر حد علوي (*suprumem property*).

(٣) خصائص الترتيب وخاصية الاكتمال تجعل حقل الأعداد الحقيقية *حقل مرتب مكتمل* (complete *orderd field*).