هذه المجموعة من الدروس في نظرية الحلقات من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com

سنقدم هنا بإذن الله سلسلة في شرح الحلقات والحقول + أمثلة محلولة

المواضيع التي سيتم التطرق إلى شرحها هي:
مفهوم الحلقة . مفهوم الحلقة الجزئية . مفهوم التشاكل الحلقي . مفهوم الحلقة المغمورة. الحلقات التامة والحقول. مفهوم شبه الحلقة (حلقة قسمة) .مفهوم الحقل .الحقل الجزئي .الحقل الأولي .مميز الحلقة والحلقة التامة .حلقات كثيرات الحدود. نظرية الباقي . المثاليات وحلقات الباقي . مفهوم المثاليه ذات المولدات المنتهية .مفهوم المثالية الرئيسية. مفهوم حلقة مثاليات رئيسية . نظرية النماذج . النماذج الجزئية. التشاكلات النمطية للنماذج.
نظرية التشاكل التناظري الأولى للنماذج .نظرية التشاكل التناظري الثانية للنماذج . نظرية التشاكل التناظري الثالثة للنماذج . الجمع المباشر للنماذج .

وكما هو معتاد هذه عنوانين رئيسية فقط تحوي الكثير من المواضيع الفرعية سنتعرف عليها في هذه السلسلة التي ستتخللها الكثير من الأمثلة بإذن الله
المراجع المستخدمة :
محاضرات الدكتور أحمد عبد الله. +ملاحظاتي الخاصة .

تمنياتي للجميع بالفائدة العلمية

الحلقات

تعريف :

الثلاثي المرتب $(R,+,\cdot)$ المكون من المجموعة غير الخالية R وعمليتين ثنائيتين (+) وتسمى عملية جمع و$(\cdot)$ وتسمى عملية ضرب يسمى حلقة (aring) إذا كان :

أ) $(R,+)$ زمرة إبدالية أي أن :

(i) الجمع عملية تجميعية .

$$(x+y)+z=x+(y+z) \quad , \ \forall \ x,y,z \in R$$

(ii) يوجد عنصر يسمى العنصر المحايد (e) (الصفر) يحقق أن:

$$x+0=0+x=x \quad , \ \forall \ x \in R$$

(iii) يوجد لكل عنصر $x \in R$ معكوس يرمز له بالرمز (-x) يحقق:

$$x+(-x)=(-x)+x=0 \quad ,\forall \ x \in R$$

(iv) العملية إبدالية :

$$x+y=y+x=0 \quad , \forall \ x,y \in R$$

ب) عملية الضرب تجميعية.

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad , \ \forall\, x,y,z \in R$$

جـ) عملية الضرب توزيعية من اليمين واليسار بالنسبة لعملية الجمع .

$$x.(y+z) = x.y + x.z \quad , \ \forall\, x,y,z \in R$$

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad , \ \forall\, x,y,z \in R$$

تعريف :

تسمى الحلقة $(R,+,\cdot)$ ذات عنصر محايد

(aring with identity) إذا وجد عنصر $e \in R$ يحقق :

$$e \,.\, x = x \,.\, e = x \quad , \ \forall\, x \in R$$

ويرمز له بالرمز 1 .

من الآن سوف نرمز للحلقة $(R,+,\cdot)$ بالرمز R فقط للإختصار على أن يكون من المفهوم أنه توجد عمليتين ثنائيتين هما + ، . تحققان خواص الحلقة .

تعريف :

العنصر y في الحلقة R يسمى معكوس العنصر $x \in R$ إذا كان:

$$x.y = y.x = 1$$

خاصية :

إذا كانت R حلقة ذات عنصر محايد فإن :

أ- العنصر المحايد وحيد .

ب- معكوس العنصر $x \in R$ إن وجد فهو وحيد .

خاصية :

إذا كانت R حلقة فإن :

$$0 . x = x . 0 = 0 \quad , \ \forall \ x \in R$$

البرهان:

تتحقق هذه العلاقة لأن :

$$0 . x = (0+0)x = 0.x + 0.x$$

أي أن $0x$ **عنصر عديم النماء أو خامل (idenpotnt)** في الزمرة $(R,+)$ ومن ثم $0x = 0$ وبالمثل $x0=0$.

ملاحظات :

١-الحلقة التي تحوي على الصفر فقط تسمى حلقة صفرية .
٢- سوف نرمز للعنصر x+(-y) بالرمز x-y للاختصار .

خاصية :

إذا كانت R حلقة ، $x, y, z \in R$ فإن :

$$(1)\ \ x(-y) = (-x)y = -(xy)$$
$$(2)\ \ (-x)(-y) = xy$$
$$(3)\ \ x(y-z) = xy - xz$$
$$(4)\ \ (x-y)z = xz - yz$$

البرهان :

سوف نبرهن (١) و(٣) والباقي بالمثل ...

(١) حيث أن $y + (-y) = 0$ فإن :

$$xy + x(-y) = x(y + (-y)) = x0 = 0$$

وحيث أن عملية الجمع إبدالية فإن $x(-y)$ هو المعكوس الجمعي للعنصر xy أي أن :

$$x(-y) = -(xy)$$

وبالمثل

$$.(-x)y = -(xy)$$

4

(٣)تتحقق هذه العلاقة لأن :

$$\begin{aligned} x(y-z) &= x(y+(-z)) \\ &= xy + x(-z) \\ &= xy + (-(xz)) \\ &= xy - xz \end{aligned}$$

أي أن الضرب عملية توزيعية بالنسبة لعملية الطرح من اليسار.

تعريف:

إذا كان العنصر x في الحلقة R له معكوس بالنسبة لعملية الضرب فإنه يسمى عنصر وحده (unit element) ويرمز لمجموعة عناصر الوحدة للحلقة R بالرمز G_R .

خاصية :

إذا كانت R حلقة ذات عنصر محايد فإن G_R زمرة بالنسبة لعملية الضرب.

البرهان :

بما أن $G_R \neq \phi$ لأن $1 \in G_R$، نفرض أن $x, y \in G_R$ فإنه يوجد لهما معكوسين هما $x^{-1}, y^{-1} \in R$ ومن ثم فإن

5

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1 \quad , \quad yy^{-1} = y^{-1}y = 1$$

كذلك

$$xy.\left(y^{-1}x^{-1}\right) = x\left(yy^{-1}\right)x^{-1} = x1x^{-1} = xx^{-1} = 1$$
$$\left(y^{-1}x^{-1}\right).xy = y^{-1}\left(x^{-1}x\right)y = y^{-1}1y = y^{-1}y = 1$$

أي أن $y^{-1}x^{-1}$ هو معكوس xy ومن ثم فإن $xy \in G_R$

أي أن G_R مغلقة بالنسبة لعملية الضرب وحيث أن عملية الضرب تجميعية على G_R لأنها تجميعية على R وبذلك نكون قد أثبتنا أن G_R زمرة مع عملية الضرب .

أمثلة :

١-كل من

$(Z,+,\cdot)$ ، $(Q,+,\cdot)$ ، $(R,+,\cdot)$ ، $(C,+,\cdot)$

حلقة إبدالية غير منتهية ذات عنصر محايد .

بينما $(E,+,\cdot)$ حيث E مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية حلقة إبدالية لا نهائية ليس بها عنصر محايد ونجد زمر الوحدات هي : Q^+, R^+, C^+

$$G_Z = \{1,-1\}$$

٢-نعلم أن المجموعة Z_n المعرفة كالتالي :

$$Z_n = \{0,1,2,....,n-1\}$$

6

وأن عملية الجمع $\oplus$ المعرفة على Z_n حيث $x \oplus y$ هو

باقي $\frac{x+y}{n}$

وعملية الضرب $\otimes$ المعرفة على Z_n حيث $x \otimes y$ هو

باقي $\frac{xy}{n}$

ونعلم أن $(Z_n, \oplus)$ زمرة إبدالية وأن $\otimes$ عملية تجميعية وتوزيعية من اليمين واليسار بالنسبة لعملية الجمع $\oplus$ وذلك لأن عملية ضرب الأعداد كذلك ،

ومن ثم فإن $(Z_n, \oplus, \otimes)$ حلقة إبدالية منتهية ذات عنصر محايد هو 1 وسوف نرمز للحلقة $(Z_n, \oplus, \otimes)$ بالرمز Z_n للأختصار.

مثال ١:

$$Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$$

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

7

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Z_5 حلقة إبدالية منتهية ذات عنصر محايد

$$G_{Z_5} = \{1, 2, 3, 4\}$$

مثال٢:

$$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$G_{Z_4} = \{1, 3\}$$

ليست زمرة لأن عملية الضرب على Z_4 حلقة ذات عنصر محايد .

٣-إذا كانت :

$$Z(i)=\{a+ib\ :\ a,b\in Z\}$$

فإن Z(i) مع عملية الجمع وعملية الضرب للأعداد

المركبة **حلقة ذات عنصر محايد** هو 1 وتسمى Z(i)

أعداد جاوس (Gaussian inteaers) .

٤-إذا كان p عدد أولي فإن :

$$Q\left(\sqrt{p}\right)=\left\{a+b\sqrt{p}\ :\ a,b\in Q\right\}$$

حلقة إبدالية ذات عنصر محايد هو 1 مع عملية جمع وضرب الأعداد حيث إذا كان :

$$x=a+b\sqrt{p}$$
$$y=c+d\sqrt{p}$$

فإن :

$$(x+y)=(a+c)+(b+d)\sqrt{p}$$
$$xy=(ac+pbd)+(ad+bc)\sqrt{p}$$

٥-إذا كانت $(G,+)$ زمرة إبدالية وعرفنا عملية الضرب على G كالآتي :

$$xy=0$$

لكل $x,y\in G$ فإن $(G,+,\cdot)$ **حلقة ليس بها عنصر محايد** .

٦-إذا كانت R^R هي مجموعة جميع الدوال الحقيقية $R \to R$ وعرفنا عملية الجمع + وعملية الضرب على R^R كالآتي :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

فإن $(R^R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ذات عنصر محايد هو الدالة :

$$h : R \to R \quad , \quad x \to h(x) = 1$$

٧-إذا كانت $(R^R, +, o)$ حيث + عملية جمع الدوال و o هي عملية تركيب الدوال أي أن :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fog)(x) = f(g(x))$$

حلقة ليست إبدالية وذات عنصر محايد هو الدالة :

$$I_R : R \to R \quad , \quad x \to x$$

٨-إذا كانت $M_2(R)$ هي مجموعة المصفوفات المربعة التي من نوع 2×2 التي عناصرها أعداد حقيقية
فإن $M_2(R)$ مع عملية جمع المصفوفات وعملية ضربها حلقة ليست إبدالية و ذات عنصر محايد هو :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10

٩-إذا كانت $(R_1,+,\cdot)(R_2,*,o)$ حلقتين وعرفنا العملية $\oplus$ و $\otimes$ على $R_1 \times R_2$ كالآتي :

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b*d)$$
$$(a,b)\otimes(c,d)=(a\cdot c,bod)$$

لكل $(a,b),(c,d)\in R_1\times R_2$ فإن $(R_1\times R_2,\oplus,\otimes)$ حلقة إبدالية إذا وفقط إذا كان كلاً من R_1,R_2 كذلك .
وتسمى هذه الحلقة حلقة الضرب المباشر (direct product) للحلقتين R_1,R_2 ويرمز لها بالرمز $R_1\otimes R_2$ وسوف نذكر الكثير من خواصها فيما بعد .

ملاحظات :

إذا كان R حلقة و n عدد صحيح موجب و $x\in R$ فإن :

أ) $nx=x+x+x+.....+x$
عدد n من المرات .

ب) $-nx=(-x)+(-x)+.....+(-x)$

عدد n من المرات .

جـ) $x^n=xxx......x$

عدد n من المرات .

خاصية :

إذا كانت R حلقة و $x,y,z\in R$ وكان $n,m\in Z$ فإن :

$$(1)\ (mx)y=m(xy)=x(my)$$

$$(2)\ (mx)(ny)=mn(xy)$$

$$(3)\ x^m\cdot x^n=x^{m+n}$$

$$(4)\ \left(x^m\right)^n=x^{mn}$$

البرهان :

(١) نفرض أن $m>0$ فإن :

$$(mx)y=(x+x+.....+x)y$$

عدد m من المرات

$$=xy+xy+......+xy$$

عدد m من المرات .

$$=m(xy)$$

<u>كذلك</u>

$$x(my)=x(y+y+.....+y)$$

عدد m من المرات

$$=xy+xy+......+xy$$

عدد m من المرات .

$$=m(xy)$$

بذلك فإن

$$(mx)y=x(my)=m(xy)$$

12

وإذا كانت $m < 0$ نضع n=-m فتكون $n > 0$ ومن ثم يكون :

$$(nx)y = x(ny) = n(xy)$$

وحيث أن :

$$mx = (-n)x = n(-x)$$

وذلك لأن $(R,+)$ زمرة إبدالية فإن :

$$(mx)y = n(-x)y = n(-xy)$$
$$= (-n)(xy) = m(xy)$$

ومن ثم يكون :

$$(mx)y = x(my) = m(xy)$$

وإذا كانت m=0 فإن :

$$(0x)y = 0y = 0$$
$$x(0y) = x0 = 0$$
$$0(xy) = 0$$

أي أن :

$$(mx)y = m(xy) = x(my) \quad ,\forall m \in Z$$

(٢) تتحقق هذه العلاقة لأن :

$$(mx)(ny) = m(x(ny))$$
$$= m(n(xy)) = mn(xy)$$

(٣) +(٤) برهانهم يكون بواسطة الإستقراء الرياضي كما هو متعارف ..

خاصية :

الحلقة R إبدالية إذا كان :

$$x^2 = x \quad , \ \forall x \in R$$

البرهان :

حيث أن :

$$\begin{aligned}(x+x) = (x+x)^2 &= x^2 + x^2 + x^2 + x^2 \\ &= x + x + x + x \\ (x+x) = (x+x) &+ (x+x)\end{aligned}$$

أي أن $(x+x)$ عنصر عديم النماء ومن ثم فإن $x + x = 0$

أي أن $x = -x$ لكل $x \in R$

الآن نفرض $x , y \in R$:

$$\begin{aligned}(x+y) = (x+y)^2 &= x^2 + xy + yx + y^2 \\ &= x + xy + y\,x + y \\ (x+y) = (x+y) &+ xy + y\,x\end{aligned}$$

ومن ثم :

$$xy + y\,x = 0$$

أي أن :

$$xy = -\,y\,x$$

وحيث أن :

$$y\,x = -yx$$

أي أن R إبدالية .

تعريف :

المجموعة الجزئية غير الخالية S من الحلقة $(R,+,\cdot)$ تسمى حلقة جزئية (subring) من R وتكتب $S \le R$ إذا كانت $(S,+,\cdot)$ حلقة

.

أمثلة :

١-إذا كانت $R=(Z,+,\cdot)$ وكانت $H_n=(nZ,+.\cdot)$ فإن $H_n \le R$ لكل عدد صحيح موجب n .

٢-إذا كانت $R=(R,+,\cdot)$ فإن كل من

$$Q\left(\sqrt{p}\right), Z\left(\sqrt{p}\right), Z, Q, H_n$$

حلقة جزئية من R حيث P عدد أولي .

٣- لكل حلقة R حلقتين جزئيتين على الأقل هي
R,{0}
وتسميان الحلقتين الجزئيتين التافهتين .

ملاحظة :

سوف نرمز للحلقة $(Z_n,\oplus,\otimes)$ بالرمز Z_n اختصارا.

٤- من السهل ملاحظة أن $2Z_6,3Z_6 \le Z_6$.

٥- كل من :

$$S=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad a,b,c\in Z\right\}$$

$$T=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, \quad a,b,c\in Z\right\}$$

حلقة جزئية من $M_2(Z)$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{bmatrix}$$

خاصية :

المجموعة الجزئية غير الخالية S من الحلقة R تكون حلقة جزئية إذا وفقط إذا كان لكل $x,y\in S$

أ- $x-y\in S$.

ب- $xy\in S$.

البرهان :

إذا كانت $S \leq R$ فإن $x - y \in S$ ، $xy \in S$ لكل $x, y \in S$ لأن S حلقة .

والعكس حيث أن $S \neq \phi$ فإنه يوجد عنصر $x \in S$ ومن ثم فإن $0 = x - x \in S$ أي أن $0, x \in S$ ومن ثم $-x = 0 - x \in S$.

الآن S مغلقة بالنسبة لعملية الجمع لأنه إذا كان $x, y \in S$ فإن $x, -y \in S$ ومن ثم

$$x - (-y) = x + y \in S$$

وحيث أن عملية الجمع تجميعية وإبدالية على R فإنها كذلك على S أي أن $(S, +)$ زمرة إبدالية .

وحيث أن عملية الضرب توزيعية من اليمين واليسار بالنسبة لعملية الجمع على R فإنها كذلك

بالنسبة لعناصر S بهذا فإن S حلقة ومن ثم $S \leq R$.

خاصية :

إذا كان $S_1, S_2 \leq R$ فكذلك $S_1 \cap S_2 \leq R$.

البرهان :

حيث $0 \in S_1$, $0 \in S_2$ فإن $0 \in S_1 \cap S_2$.

أي أن $S_1 \cap S_2 \neq \phi$ وتتحقق العلاقة لأن :

$$\begin{aligned} & x,y \in S_1 \cap S_2 \rightarrow x,y \in S_1 \wedge x,y \in S_2 \\ & \rightarrow x-y \ , xy \in S_1 \wedge x-y \ , xy \in S_2 \\ & \rightarrow x-y \ , xy \in S_1 \cap S_2 \end{aligned}$$

ملاحظات :

نفرض أن R حلقة فإن :

١-إذا كان $S_1,S_2 \leq R$ فليس من الضروري أن يكون $S_1 \cup S_2 \leq R$.

فمثلاً $2Z,3Z \leq Z$ بينما $2Z \cup 3Z \not\leq Z$

توضيح:

$$\left.\begin{aligned} 2 \in 2Z \cup 3Z \\ 3 \in 2Z \cup 3Z \end{aligned}\right\} \rightarrow 3-2=1 \notin 2Z \cup 3Z$$

٢-إذا كانت $S \leq R$ فقد تكون R ذات عنصر محايد بينما S ليس لها عنصر محايد.

٣-إذا كانت $S \leq R$ فقد تكون S بها عنصر محايد بينما R ليس بها عنصر محايد .

مثال ذلك :

إذا كانت :

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a,b \in Z \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a \in Z \right\}$$

فإن كل من S_1, S_2 حلقة ونلاحظ أن $S_2 \leq S_1$ و S_1 ليس لها عنصر محايد بينما S_2 لها عنصر محايد هو $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

٤- إذا كان $S \leq R$ فقد يكون R لها عنصر محايد و S أيضاً لها عنصر محايد ولكن العنصرين المحايدين مختلفين ومثال على ذلك الحلقة S_2 في (٣) و $M_2(Z)$.

19

التشاكل الحلقي

Ring homomorphisms

نفرض أن كل من R,S حلقة .

تعريف :

الدالة $f:R\to S$ تسمى تشاكل حلقي إذا كان لكل $x,y\in R$ يتحقق أن :

$$(1)\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$(2)\quad f(xy)=f(x)f(y)$$

تعريف :

إذا كان $f:R\to S$ تشاكل حلقي فإن :

أ- المجموعة

$$\{x\in R:f(x)=0\}$$

تسمى نواة التشاكل f (Kernel) ويرمز لها بالرمز ker f

أي أن :

$$\ker f=\{x\in R:f(x)=0\}$$

ب- المجموعة

$$\{f(x):x\in R\}$$

تسمى صورة التشاكل ويرمز لها بالرمز Im f أي أن :

$$\operatorname{Im} f=\{f(x):x\in R\}.$$

20

نظرية :

إذا كان $f : R \to S$ تشاكل حلقي فإن :

أ- $f(0) = 0$.

ب- $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in R$.

جـ- إذا كان $A \le R$ فإن $f(A) \le S$.

د- إذا كان $B \le S$ فإن $f^{-1}(B) \le R$.

هـ - $\ker f \le R$.

و- $\operatorname{Im} f \le S$.

ز- f متباينة إذا وفقط إذا كان $\ker f = \{0\}$.

البرهان :

أ- تتحقق هذه العلاقة لأن :

$$\begin{aligned}
&0_R + 0_R = 0_R \\
&\to f(0_R + 0_R) = f(0_R) \\
&\to f(0_R) + f(0_R) = f(0_R) \\
&\to f(0_R) = 0_S
\end{aligned}$$

ب- تتحقق هذه العلاقة لأن :

$$-x + x = 0 \to f(-x) + f(x) = f(0) = 0$$

ومن ثم f(-x) هو المعكوس الجمعي للعنصر f(x) أي أن :

$$.f(-x)=-f(x)$$

جـ- حيث أن $A\neq\varphi$ فإن $f(A)\neq\varphi$.

الآن إذا كان $x,y\in f(A)$ فإنه يوجد $a,b\in A$ بحيث أن

$$x=f(a)\ ,\ y=f(b)$$

ومن ثم $a-b\ ,\ ab\in A$ لأن $A\leq R$

وتتحقق النتيجة الآن :

$$x-y=f(a)-f(b)=f(a-b)\in f(A)$$
$$xy=f(a)f(b)=f(ab)\in f(A)$$

د- $f:R\to S$ حيث أن $B\leq S$ فإن $0\in B$

وحيث أن $f(0)=0$ فإن $0\in f^{-1}(B)$ ومن ثم $f^{-1}(B)\neq\phi$

وتتحقق النتيجة لأن :

$$\begin{aligned}
&x,y\in f^{-1}(B)\to f(x),f(y)\in B\\
&\to f(x)-f(y)\ ,\ f(x)f(y)\in B\\
&\to f(x-y)\ ,\ f(xy)\in B\\
&\to x-y\ ,\ xy\in f^{-1}(B)\\
&\to f^{-1}\leq R
\end{aligned}$$

هـ - تتحقق هذه العلاقة من (جـ) لأن :

$$\operatorname{Im} f = f(R) \leq S$$

و- $\ker f = \{x \in R : f(x) = 0\}$, $f^{-1}\{0\} \leq R$

تتحقق هذه العلاقة من (د) حيث

$\{0\} \leq S$ و $\ker f = f^{-1}\{0\}$.

ز- نفرض أن $\ker f = \{0\}$ ونفرض أن $x, y \in R$ فإن

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\rightarrow f(x) - f(y) = 0 \\ &\rightarrow f(x - y) = 0 \\ &\rightarrow x - y \in \ker f \\ &\rightarrow x - y = 0 \\ &\rightarrow x = y \end{aligned}$$

أي أن f متباينة .

والعكس

نفرض أن f متباينة ونفرض أن $x \in \ker f$ فإن $f(x) = 0$

وحيث أن $f(0) = 0$ أي أن

$$f(x) = f(0)$$

وحيث أن f متباينة فإن x=0 أي أن $\ker f = \{0\}$.

23

خاصية :

إذا كانت $f : R \to S$ تشاكل حلقي شامل فإن :

أ- $f(e) = e'$ حيث e عنصر R المحايد و e' عنصر S المحايد

.

ب- إذا كان $x \in R$ عنصر وحده فإن :

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

جـ- إذا كانت R إبدالية فكذلك S .

البرهان:

أ- حيث أن f شامله فإنه لكل $y \in S$ يوجد $x \in R$ يحقق أن $f(x) = y$ ومن ثم نجد أن :

$$f(e)y = f(e)f(x) = f(ex) = f(x) = y$$

وكذلك

$$y\, f(e) = f(x)f(e) = f(xe) = f(x) = y$$

أي أن $f(e) = e'$.

ب- حيث أن :

$$f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = e'$$

$$f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(e) = e'$$

فإن :

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1} .$$

24

جـ_ نفرض أن $y_1, y_2 \in S$ وحيث أن f شامله فإنه يوجد $x_1, x_2 \in R$ يحقق أن $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ ومن ثم يكون :

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= f(x_1) f(x_2) \\ &= f(x_1 x_2) \\ &= f(x_2 x_1) \\ &= y_2 y_1 \end{aligned}$$

أي أن S إبدالية .

تعريف :

التشاكل الحلقي المتباين والشامل يسمى تماثل إذا وجد تماثل بين الحلقتين S,R فإنهما يسميان متماثلين وتكتب $R \cong S$.

أمثلة :

١-دالة الوحدة $x \to x \quad , \quad I : R \to R$

تماثل لكل حلقة R أي أن $R \cong R$.

٢-نفرض أن R حلقة ذات عنصر محايد e وأن $a \in R$ له معكوس فإن :

$$f_a : R \to R \quad , f_a(x) = axa^{-1}$$

تماثل وذلك لأن :

أ- F تشاكل لأن :

25

$$(i)\ f_a(x+y)=a(x+y)a^{-1}$$
$$=axa^{-1}+aya^{-1}$$
$$=f_a(x)+f_a(y)$$

$$(ii)\ f_a(xy)=axya^{-1}$$
$$=axeya^{-1}$$
$$=(axa^{-1})(aya^{-1})$$
$$=f_a(x)f_a(y)$$

ب- f متباينة لأنه لكل $x,y\in R$ نجد أن :

$$f_a(x)=f_a(y)\to axa^{-1}=aya^{-1}$$
$$\to x=y$$

جـ- f شاملة لأنه لكل $y\in R$ نجد أن :

$$x=a^{-1}ya\in R$$

وتحقق أن :

$$f_a(x)=f_a(a^{-1}ya)=aa^{-1}yaa^{-1}$$
$$=eye=y$$

٣-إذا كانت :

$$R=\left\{\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}:a\in R\right\}$$

فإن Rمع عملية جمع وضرب المصفوفات حلقة ونجد أن

. $R\cong R$

تعريف :

الحلقة R تسمى منغمسة أو مغمورة (embedded) في الحلقة S إذا كانت تماثل حلقة جزئية من S .

أمثلة :

١-الحلقة Z منغمسة في الحلقة $M_2(Z)$ لأنها تماثل الحلقة الجزئية

$$R=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}: a\in Z\right\}$$

من $M_2(Z)$.

٢-الحلقة الجزئية S من الحلقة R منغمسة في R .

٣-كل حلقة R منغمسة في نفسها.

الحلقات التامة والحقول

Imtegral domains and fields

تعريف :

العنصر غير الصفري x في الحلقة R يسمى قاسم للصفر (zero divisor) إذا وجد عنصر غير الصفر $y \in R$ يحقق أن :

$$xy=0$$

أمثلة :

١-كل من 2,3,4 قاسم للصفر في الحلقة Z_6 .

٢-كل من 2,4,5,6,8 قاسم للصفر في Z_{10} .

٣-الحلقة Z_p حيث p عدد أولي لا تحتوي على قاسم للصفر .

٤- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ قاسم للصفر في الحلقة $M_2(Z)$.

٥-كل من الحلقات $\mathbb{C}, \mathbb{R}, Q, Z, E, Q(\sqrt{p})$ خالية من قواسم الصفر .

تعريف:

الحلقة الإبدالية ذات العنصر المحايد الخالية من قواسم الصفر تسمى حلقة تامة (integral domains).

28

أمثلة :

١-كل من الحلقات $\mathbb{C},\mathbb{R},Q,Z,E,Q\left(\sqrt{2}\right)$ حلقة تامة .

٢- الحلقة E ليست تامة لأنه ليس بها محايد .

٣-الحلقة Z_n حيث n عدد ليس أولي ليست تامة لأنها ليست خالية من قواسم الصفر .

٤- الحلقة الجزئية من الحلقة التامة ليس شرطاً أن تكون تامة .

٥-الحلقة الإبدالية ذات العنصر المحايد $Z(i)$ تامه لأنه إذا كان :

$$x=a+ib \quad , \quad y=c+id$$

فإن :

$$\begin{aligned}
xy=0 &\to (a+ib)(c+id)=0 \\
&\to (a+ib)(a-ib)(c+id)(c-id)=0 \\
&\to \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=0 \\
&\to a^2+b^2=0 \quad \text{or} \quad c^2+d^2=0 \\
&\to (a=0 \ \wedge \ b=0) \quad \text{or} \quad (c=0 \ \wedge \ d=0) \\
&\to x=0 \quad \text{or} \quad y=0
\end{aligned}$$

٦-الحلقة $M_2(Z)$ ليست تامه لأنها ليست إبدالية وبالإمكان وجود مصفوفتين حاصل ضربهم صفر فيها قاسم صفر .

29

نظرية :

الحلقة R خالية من قواسم الصفر إذا وفقط إذا كان قانون الحذف من اليمين ومن اليسار متحقق .

البرهان :

نفرض أنR خالية من قواسم الصفر وأن $a \in R$ عنصر غير الصفر فإن :

$$\begin{aligned} ba = ca &\rightarrow (b-c)a = 0 \\ &\rightarrow b-c=0 \\ &\rightarrow b=c \end{aligned}$$

كذلك :

$$\begin{aligned} ab = ac &\rightarrow a(b-c) = 0 \\ &\rightarrow b-c=0 \\ &\rightarrow b=c \end{aligned}$$

ولإثبات العكس

نفرض أن قانوني الحذ متحققين في R وأن

ab=0

إذا كانت b=0 فإن ab=a(0) ومنها b=0 .

إذا كانت $b \neq 0$ فإن ba=b(0) ومنها a=0 .

ab=0b أي أن R خالية من قواسم الصفر .

تعريف :

الحلقة R ذات العنصر المحايد تسمى حلقة قسمة (شبه حقل) إذا كان كل عنصر غير الصفر له معكوس .

تعريف :

الحلقة الإبدالية F ذات العنصر المحايد تسمى حقل

إذا كان كل عنصر غير الصفر له معكوس يساوي الحقل هو حلقة قسمة إبدالية تساوي حلقة القسمة الإبدالية تسمى حقل .

من هذا التعريف نستنتج أنه إذا كان $(F,+,\bullet)$ حقل فإن (F,+) زمره إبدالية كذلك $(F^{*},\bullet)$ زمرة إبدالية

وأن الضرب توزيعي من اليمين ومن اليسار بالنسبة للجمع وكذلك كل حقل حلقة .

أمثلة :

١-كل من Q,R,C حقل .

٢-Z ليست حقلاً لأنه ليس كل عنصر غير الصفر له معكوس فقط 1,1- له معكوس .

٣-$Q\left(\sqrt{p}\right)$ حيث p عدد أولي حقل .

٤-Z_p حقل لكل عدد أولي p .

31

نظرية:

كل حلقة تامة منتهية حقل .

البرهان :

نفرض أن :

$$R = \{a_1, a_2, \ldots.., a_n\}$$

حلقة تامة ، ونفرض أن $x \in R$ عنصر غير الصفر فإن العناصر

$$xa_1, xa_2, \ldots.., xa_n$$

مختلفة مثنى مثنى لأنه إذا كان :

$$xa_i = xa_j$$

فإن

$$x\left(a_i - a_j\right) = 0$$

وحيث أن R خالية من قواسم الصفر فإن

$$a_i - a_j = 0$$

ومنها $a_i = a_j$ وهذا يناقض الفرض ،

الآن العنصر المحايد 1 ينتمي إلى R ومن ثم فإن :

$1 = xa_i$ لأحد قيم i وهذا يعني أن $x = a_i^{-1}$ وبذلك فإن كل عنصر غير الصفر له معكوس ومن ثم فإن R حقل .

تعريف :

المجموعة الجزئية غير الخالية E من الحقل $(F,+,\bullet)$ تسمى حقل جزئي من F إذا كان $(E,+,\bullet)$ حقل .

أمثلة :

١-Q حقل جزئي من R,C .
٢-R حقل جزئي من C .
٣-$Q\left(\sqrt{p}\right)$ حقل جزئي من R لكل عدد أولي p .
٤-Z_3 ليست حقل حقل جزئي من Z_5 لأن Z_5 حقل أولي أي لا يحوي حقل جزئي فعلي منه .
٥- $Q\left(\sqrt{3}\right)$ ليست حقل جزئي من Q .

نظرية :

المجموعة الجزئية غير الخالية E من الحقل $(F,+,\bullet)$ حقل جزئي من F إذا وفقط إذا كان :

$$xy^{-1} \in E$$
$$x - y \in E$$

لكل $xy \in E$.

البرهان :

تتحقق هذه النظرية لأن :

$$\left(E^*,\cdot\right)\le\left(F^*,\cdot\right) \quad , \quad \left(E,+\right)\le\left(F,+\right)$$

إذا وفقط إذا كان

$$.xy^{-1}\in E^* \quad , \quad x-y\in E$$

خاصية :

إذا كان كل من E_1,E_2 حقل جزئي من الحقل F فكذلك $E_1\bigcap E_2$, $E\neq F$.

تعريف :

الحقل الذي لا يحوي حقلاً جزئياً فعلياً يسمى حقل أولي .

أمثلة :

١- Z_p حقل أولي لكل عدد أولي p .

٢- R حقل ليس أولي لأنه يحوي حقل جزئي فعلي Q , $.Q\left(\sqrt{p}\right)$

٣- C حقل ليس أولي لأنه يحوي حقل جزئي فعلي Q, R .

٤- Q حقل أولي لأنه إذا كان S حقل جزئي من Q فإن $I \in S$.

نفرض أن $\frac{a}{b} \in Q$ أي أن

$a, b \in Z$ وأن $b \neq 0$

ومن ثم فإن $a.b \in S$ ومنها $\frac{a}{b} \in S$ وبهذا فإن $S = Q$.

٥- إذا كان الحقل S هو تقاطع الحقول الجزئية الفعلية للحقل F فإن S حقلاً أولياً .

35