الدرس الخامس

أولا كما وعدتكم في الدرس السابق فقد جمعت لكم معظم علاقات Boundary ومن عنده علاقه أخرى فلا مانع أن يضيفها ايضا :

$b(A \cup B) \subseteq b(A) \cup b(B)$

$b(A) \subseteq A^C \leftarrow$ A مفتوحه

$b(A) \subseteq A \leftarrow$ A مغلقه

$b(A) = \varnothing \leftarrow$ A مغلقة و مفتوحه

$b(A^\circ) \subseteq b(A)$

$b(\overline{A}) \subseteq b(A)$

$b(A) = \overline{A} \cap \overline{A^C}$

$b(A) = \overline{A} \cap \overline{A^C}$

$b(A) = X \setminus A^\circ \cap (A^C)^\circ$

$b(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$

$b(A) = b(A^C)$

$\overline{A} = A^\circ \cup b(A)$

الجوارات :

تعريف :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي ، $x_0 \in X$ فإن $V \subseteq X$ تسمى جوار (Neighborhood) للنقطه x_0 إذا وجدت $U \in \tau$ بحيث أن $x_0 \in U \subseteq V$
ويطلق على كل الجوارات للنقطة $x_0 \in X$ منظومة الجوارات (Neighborhood system) ، ويرمز لها بالرمز $N(x_0)$

أي أن :

$$N(x_0) = \{V \subseteq X : \exists\, U \in \tau,\ x_0 \in U \subseteq V\}$$

مثال:

نفرض أن

$$X = \{a, b, c\}$$

ونعرف

$$\tau = \{X, \emptyset \{a\}, \{a, c\}\}$$

تبولوجي على X ، اوجد كل من $N(a)$,$N(b)$

الحل :

ندرس أولا $N(a)$:

١) نوجد جميع المجموعات الجزئيه من X التي تحوي a:
$X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}$

٢) ندرس كل مجموعه من المجموعات السابقه :هل توجد مجموعه مفتوحه تحوي a وهي عباره عن مجموعه محتواه داخل أحد تلك المجموعات الجزئيه السابقه فإن وجدت فتكون المجموعه الجزئيه هي أحد عناصر $N(a)$ أي أن:

أولا : : ندرس X :

واضح أن :

$$a \in X \subseteq X$$

ثانيا : ندرس المجموعه $\{a\}$:

نلاحظ أنه توجد $\{a\} \in \tau$ وتحقق أن :

$$a \in \{a\} \subseteq \{a\}$$

ثالثا: ندرس المجموعه $\{a,b\}$:

نلاحظ أنه توجد $\{a\} \in \tau$ وتحقق أن :

$$a \in \{a\} \subseteq \{a,b\}$$

رابعا: ندرس المجموعه $\{a,c\}$:

نلاحظ أنه توجد $\{a\} \in \tau$ وتحقق أن :

$$a \in \{a\} \subseteq \{a,c\}$$

إذن نستنتج أن :

$$N(a) = \{X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$$

ندرس الآن $N(b)$:

١) نوجد جميع المجموعات الجزئيه من X التي تحوي b:

$$X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}$$

٢) ندرس كل مجموعه من المجموعات السابقه: هل توجد مجموعه مفتوحه تحوي b وهي عباره عن مجموعه محتواه داخل أحد تلك المجموعات الجزئيه السابقه فإن وجدت فتكون المجموعه الجزئيه هي أحد عناصر $N(b)$ أي أن:

أولا : : ندرس X :

واضح أن :

$b \in X \subseteq X$

ثانيا : ندرس المجموعه $\{b\}$:

نلاحظ أنه لا يوجد مجموعه مفتوحه تحوي b وتكون محتواه داخل $\{b\}$

ثالثا: ندرس المجموعه $\{a,b\}$:

نلاحظ أنه لا يوجد مجموعه مفتوحه تحوي b وتكون محتواه داخل $\{a,b\}$

رابعا: ندرس المجموعه $\{b,c\}$:

نلاحظ أنه لا يوجد مجموعه مفتوحه تحوي b وتكون محتواه داخل $\{b,c\}$

إذن نستنتج أن :

$$N(b)=\{X\}$$

مثال:

إذا كان (X,τ) هو الفضاء التبولوجي المنفصل(Discrete topology) ، $A \subseteq X$ ، $x \in A$ فإن $A \in N(x)$

نظريه :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجيا، $A \subseteq X$ ،فإن $A \in \tau$ إذا وفقط إذا كان $A \in N(x)$ لكل $x \in A$

البرهان :

الإتجاه الأول :

نفرض $A \in \tau$ (أي أن A مجموعه مفتوحه) ، $x \in A$

إذن A جوار لكل نقطه من نقاطها وباختيار $U = A$ فإن $x \in A \subseteq A$

ومن ثم فإن $A \in N(x)$ لكل $x \in A$

الإتجاه الثاني :

نفرض أن $A \in N(x)$ لكل $x \in A$ إذن من التعريف :

لكل $x \in A$ توجد $U \in \tau$ بحيث أن :

$$x \in U \subseteq A$$

ومن التعريف المكافئ للمجموعات المفتوحه :

نستنتج أن: $A \in \tau$

تعريف الأساس (Bases) :

نفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي ، $\beta \subseteq \tau$ فإننا نسمي β أساسا (قاعده) (Bases) للتبولوجي τ إذا كان كل عنصر من عناصر τ يمكن كتابته اتحادا لعناصر من β ويسمى كل عنصر من عناصر β مجموعه مفتوحه وأساسيه

مثال :

إذا كان

$$X = \{a,b,c\}$$
$$\beta \subseteq \tau$$
$$\beta = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$$

هل β تشكل أساسا لفضاء تبولوجي على X ؟

الحل:

واضح أن β لا تشكل أساسا لأي تبولوجي على X ، وذلك لأن :

$$\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\}$$

وحيث أن $\{a,b\},\{a,c\}$ مجموعتان مفتوحتان وبناءا على ذلك تكون $\{a\}$ مجموعه مفتوحه ولكن $\{a\}$ لايمكن تمثيله كاتحاد لعناصر من عناصر β

وبالتالي فإن β لا تشكل أساس

مثال:

إذا كان (X,τ) هو الفضاء التبولوجي المنفصل(Discrete topology) على X، فإن $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ تشكل اساسا لـ τ

مثال :

إذا كان

$$X = \{1,2,3,4\}$$
$$\beta = \{\{1\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\}\}$$

هل β تشكل أساسا لتبولوجي على X ؟

الحل :

واضح أن β تشكل أساسا لتبولوجي على X ، وذلك لأن

أولا نوجد τ :

$$\tau = \{X, \emptyset, \{1\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\}\}$$

حيث $\emptyset$ هو الإتحاد التافه لعناصر β

ثانيا نلاحظ أن كل عنصر من عناصر τ يمكن التعبير عنه كاتحاد لعدد من عناصر β

تعريف مكافئ للأساس :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجيا ، $A \subseteq X$ وأن β تشكل أساسا (Bases) للتبولوجي τ فإن $A \in \tau$ إذا وإذا كان فقط لكل $x \in A$ يوجد $B \in \beta$ بحيث أن :

$$x \in B \subseteq A$$

تعريف الأساس الجزئي :

نفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي ، $\gamma \subseteq \tau$ فإننا نسمي γ أساسا جزئيا (قاعده جزئيه) (Subbases) للتبولوجي τ إذا كانت المجموعه الناتجه من التقاطعات المنتهيه لعناصر γ تشكل اساسا β للتبولوجي τ

أي أن كل عنصر من β هو عباره عن تقاطع عدد منته من عناصر γ

مثال :

إذا كانت

$$X = \{a, b, c, d\}$$

$$\gamma = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$$

هل γ تشكل أساسا جزئيا للتبولوجي

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

على X ؟

الحل :

أولا : نحسب β (وهي عباره عن تقاطع عناصر γ مع بعضها البعض) :

$$\beta = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$$

ثانيا : نرى هل β تشكل أساس أم لا :

واضح أنها تشكل أساس للتبولوجي τ على X وذلك لأن كل عنصر من عناصر τ يمكن تمثيله كاتحاد لعناصر β

إذن نستنتج أن :

γ تشكل أساسا جزئيا للتبولوجيτ

ملاحظه توضيحيه :

إذا كان المعطى γ وأريد حساب β فتقاطع عناصر γ مع بعضها البعض وإذا أردت τ فنعمل اتحاد لعناصر β

وهذا مخطط سهمي رسمته لكم وإن شاء الله يكون واضح :

$$\begin{array}{ll} \tau & \\ \uparrow & \cdots(\cup) \\ \beta & \\ \uparrow & \cdots(\cap) \\ \gamma & \end{array}$$

نظريه :

إذا كان γ أساسا جزئيا لكل من التبولوجيين τ^*, τ فإن $\tau^*=\tau$

أي أن التبولوجي المولد بأساس جزئي يكون تبولوجي وحيد

تعريف الفضاءات التبولوجيه الجزئيه :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي ، $A \subseteq X$ فإن التجمع

$\tau_A = \{A \cap V : V \in \tau\}$ يشكل تبولوجي على A ، ويسمى τ_A بالتبولوجي النسبي (Relative topology) على A ،

ويسمى (A, τ_A) بالفضاء التبولوجي الجزئي (Subspace) من الفضاء (X, τ)

وإذا كانت A مجموعه مفتوحه (مجموعه مغلقه) فإننا نسمي (A, τ_A) فضاء جزئي مفتوح (فضاء جزئي مغلق)

مثال:

إذا كانت

$$X = \{a,b,c,d\}$$

وعرف عليها التبولوجي التالي :

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

أوجد τ_A, τ_B إذا كانت $B = \{a,d\}$, $A = \{a\}$ ؟

الحل :

بما أن $B = \{a,d\}$, $A = \{a\}$ إذن :

$$= \{A \cap X, A \cap \emptyset, A \cap \{a\}, A \cap \{c,d\}, A \cap \{a,c,d\}, A \cap \{b,c,d,e\}\}$$
$$= \{A, \emptyset\}$$

وبالمثل نجد أن :

$$\tau_B = \{B, \emptyset, \{a\}, \{d\}\}$$

نظريه :

نفرض أن (Y, τ_Y) فضاء تبولوجي جزئي من الفضاء التبولوجي (X, τ)

، $X \supseteq Y \supseteq M$ فإذا كانت $M \in \tau$ فإن $M \in \tau_Y$

البرهان :

بما أن

$$\tau_Y = \{Y \cap H : H \in \tau\} \quad ،$$

$$M \subseteq Y \quad ،$$

$$M \in \tau$$

إذن

$$M = Y \cap M$$

أي أن

$$M \in \tau_Y$$

نظريه :

نفرض أن (Y, τ_Y) فضاء تبولوجي جزئي من الفضاء التبولوجي (X, τ)

، $X \supseteq Y \supseteq M$ فإذا كانت $M \in \Im_X$ فإن $M \in \Im_Y$

البرهان :

بنفس الطريقه السابقه (تمرين للقارئ)

تعريف :

الفراغ (X,τ) يسمى فراغا قابلا للفصل (Seprable space) إذا وجدت مجموعه كثيفه وقابله للعد

تعريف :

الخاصيه p تسمى خاصيه موروثه إذا كان الفراغ (X,τ) يتمتع بهذه الخاصيه وكذلك كل فراغ جزئي منه

التمارين :

السؤال الأول :

صح أو خطأ مع توضيح السبب في كلتا الحالتين :

١) إذا كان A,B جواران للنقطه x فإن $A\cap B$ يكون ايضا جوار للنقطه x

٢) إذا كان A جوار للنقطه x، $A\subseteq B$ $\not\Rightarrow$ Bجوار للنقطه x

٣) $Cl_A(N)=A\cap\overline{N}$

٤) $N^{\circ}\subseteq Int_A(N)\cap A^{\circ}$

السؤال الثاني :

إذا كان (X,D)الفضاء التبولوجي المنفصل ، $Y\subseteq X$، فبين أن الفضاء التبولوجي الجزئي على Y هو الفضاء التبولوجي المنفصل على Y

السؤال الثالث :

إذا كان (X,I) الفضاء التبولوجي غير المنفصل ، $Y \subseteq X$، فبين أن الفضاء التبولوجي الجزئي على Y هو الفضاء التبولوجي غير المنفصل على Y

السؤال الرابع :

اكملي الفراغ :

1)الفراغ المتقطع هو فراغ ----- للفصل لإن ---------

2) الفراغ الغير متقطع هو فراغ ---------- للفصل لإن --------

في إنتظار مشاركاتكم الرائعه

وبإذن الله سيكون الدرس القادم في باب جديد هو الدوال المتصله

حل التمارين

السؤال الأول :

1) إذا كان A,B جواران للنقطة x فإن $A \cap B$ يكون ايضا جوار للنقطه x (عباره صحيحه)

الاثبات :

نفرض أن

$$A,B \in N(x)$$

إذن يوجد

$$U_1, U_2 \in \tau$$

بحيث أن

$$x \in U_1 \subseteq A$$
$$x \in U_2 \subseteq B$$

ومن ثم فان

$$\to x \in U_1 \cap U_2 \subseteq A \cap B$$
$$\because U_1, U_2 \in \tau$$
$$\therefore U_1 \cap U_2 \in \tau$$
$$\Rightarrow A \cap B \in N(x)$$

2) إذا كان A جوار للنقطه x ، $A \subseteq B$ ليس بالضرورة أن B جوار للنقطه x (عباره خاطئه)

لأنه بفرض أن

$$A \in N(x) \quad , \quad A \subseteq B$$

إذن يوجد

$$U \in \tau$$

بحيث أن

$$x \in U \subseteq A$$

ومن ثم فإن

$$\begin{aligned} & x \in U \subseteq A \subseteq B \\ & \Rightarrow B \in N(x) \end{aligned}$$

3) $Cl_A(N) = A \cap \bar{N}$ (عباره صحيحه)

الاثبات :

بما أن $\bar{N} = \cap\{F : N \subseteq F, F \in \Im_X\}$ إذن :

$$\begin{aligned} A \cap \bar{N} &= A \cap \left(\cap\{F : N \subseteq F, F \in \Im_X\}\right) \\ &= \cap\{A \cap F : N \subseteq F, F \in \Im_X\} \\ &= \cap\{A \cap F : A \cap N \subseteq A \cap F = H, H \in \Im_A\} \\ &= \cap\{H : N \subseteq H, H \in \Im_A\} \\ &= Cl_A(N) \end{aligned}$$

4) $N^* \subseteq Int_A(N) \cap A^*$ (عباره صحيحه)

الاثبات :

نفرض ان $x \in N^*$

إذن توجد مجموعه مفتوحه U في X تحوي x بحيث ان

$$x \in U \subseteq N \subseteq A$$

$$\rightarrow x \in A^{\circ}$$

الآن

$$x \in A \quad , x \in U$$

$$\rightarrow \quad x \in U \cap A$$

إذن $A \cap U$ مجموعه مفتوحه في A تحوي x :

$$x \in U \cap A \subseteq N \cap A = N$$

$$\rightarrow x \in N_A^{\circ}$$

وبذلك تتحقق صحة العباره

السؤال الثاني :

إذا كان (X,D) الفضاء التبولوجي المنفصل (Discrete topology) ، $Y \subseteq X$

فبين ان الفضاء التبولوجي الجزئي على Y هو الفضاء التبولوجي المنفصل على Y .

الحل :

نفرض أن

$$A \subseteq Y \subseteq X$$

إذا كان

$$A \subseteq X$$

$$\rightarrow A \in \tau$$

وبالتالي

$$A \cap Y \in \tau_Y$$

ولكن

$$A \cap Y = A$$

أي أن

$$A \in \tau_Y$$

الدرس السادس

الدوال المتصله(المستمرة) Continuous Functions

تعريف :

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,v)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,v) فإننا نقول إن f داله متصلة (مستمره) (Continuous Function) إذا كانت الصوره العكسية لكل مجموعة مفتوحه في (Y,v) هي مجموعة مفتوحه في (X,τ)

أي أن :

$$f^{-1}(V)\in\tau \quad \text{لكل} \quad V\in v$$

(توضيح : سأستخدم الرمز $f:X\to Y$ للدلاله على أن f دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,v).

وايضا اللفظ مجموعه مفتوحه في X للدلاله على انها مجموعه مفتوحة في (X,τ).)

مثال :

إذا كانت

$$X=\{a,b,c,d\} \quad , \quad \tau=\{X,\varphi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

$$X=\{1,2,3,4\} \quad , \quad \tau=\{Y,\varphi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,3,4\}\}$$

وعُرفت الدالتان $f,g:(X,\tau)\to(Y,v)$ كالتالي:

$$f(a)=2 \ , \ f(b)=3 \ , \ f(c)=4 \ , \ f(d)=3$$

$$g(a)=1 \ , \ g(b)=1 \ , \ g(c)=3 \ , \ g(d)=4$$

أي من f,g دالة متصلة ؟

الحل:
من الواضح ان :

$$f^{-1}(Y)=X\in\tau \quad , \quad f^{-1}(\varphi)=\varphi\in\tau$$
$$f^{-1}(\{1\})=\varphi\in\tau \quad , \quad f^{-1}(\{2\})=\{a\}\in\tau$$
$$f^{-1}(\{1,2\})=\{a\}\in\tau \quad , \quad f^{-1}(\{2,3,4\})=X\in\tau$$

أي ان $f^{-1}(V)\in\tau$ لكل $V\in\nu$. إذن f دالة متصله .

بالمثل

$$g^{-1}(Y)=X\in\tau \quad , \quad g^{-1}(\varphi)=\varphi\in\tau$$
$$g^{-1}(\{1\})=\{a,b\}\in\tau \quad , \quad g^{-1}(\{2\})=\varphi\in\tau$$
$$g^{-1}(\{1,2\})=\{a,b\}\in\tau \quad , \quad g^{-1}(\{2,3,4\})=\{c,d\}\notin\tau$$

إذن توجد $\{2,3,4\}\in\nu$ ولكن $g^{-1}(\{2,3,4\})=\{c,d\}\notin\tau$ ، وهذا يؤدي إلى أن g دالة غير متصلة .

مثال:
إذا كانت $f:X\to Y$ دالة من أي فضاء تبولوجي معرف على X إلى الفضاء التبولوجي غير المنفصل (In discrete topology space) على Y هل f دالة متصلة ؟

الحل :
بما أنه في الفضاء التبولوجي الغير منفصل على Y توجد مجموعتان مفتوحتان هما Y,φ فقط ، ومن الواضح أن $f^{-1}(\varphi)=\varphi$, $f^{-1}(Y)=X$ مجموعتان مفتوحتان في X . أي أن f دالة متصلة .

مثال :

إذا كان (R,v) الفضاء التبولوجي العادي على R ، (R,C) فضاء المكملات المنتهيه

(Finite complement topology) على R ،

وكانت $f:(R,C)\to(R,v)$ دالة معرفة كالتالي:

$$f(x)=x \ , \ \forall x\in R$$

أي أن f هي الدالة المحايدة. هل f دالة متصلة ؟

الحل:

بما أن $(1,2)\in v$ إذن $f^{-1}[(1,2)]=(1,2)\notin C$ لأن مكملة $(1,2)$ ليست مجموعه منتهية . أي أن f دالة غير متصلة.

اتصال دالة عند نقطة ما

تعريف:

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,v)$ دالة من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y

فإننا نقول إن f دالة متصلة عند النقطة $x_0\in X$ إذا كان لكل $V\in v$ بحيث إن $f(x_0)\in V$ توجد $W\in\tau$ بحيث أن $x_0\in W$ ، $f(W)\subseteq V$.

(أي إذا كان لكل مجموعه مفتوحه V تحوي $f(x_0)$ يوجد مجموعه مفتوحه W تحوي x_0 بحيث أن $f(W)\subseteq V$).

(تنويه: هذا التعريف يكافئ التعريف التالي المستخدم فيه مفهوم الجوار .)

تعريف :

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,v)$ دالة من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y فإننا نقول إن f دالة متصلة عند النقطة $x_0 \in X$ إذا كان لكل جوار $V(f(x_0))$ للنقطة $f(x_0)$ يوجد جوار $W(x_0)$ للنقطة x_0 بحيث أن $f(W)\subseteq V$.

مثال:

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ دالة معرفة على $X=\{a,b,c,d\}$ كالتالي:

$$f(a)=b\ ,\ f(b)=d\ ,\ f(c)=b\ ,f(d)=c$$

حيث $\tau=\{X,\varphi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\}\}$

ابحث اتصال الدالة f عند كل نقطة في X .

الحل:

(١) عند $x_0=a$ فإن $f(a)=b$

اولا : نحدد المجموعات المفتوحه V التي تحوي $f(a)$ (أي كل الجوارات لـ $f(a)$) وهي:

$$\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\},X$$

ثانيا : نحدد المجموعات المفتوحة W التي تحوي a وهي :

$$X,\{a\},\{a,b\}$$

ثالثا : نوجد $f(W)$:

$$\begin{aligned} f(W)=f(X) &= \{b,c,d\} \\ = f\{a\} &= \{b\} \\ = f\{a,b\} &= \{b,d\} \end{aligned}$$

رابعا : ندرس الآن تعريف الاتصال عند نقطه :

نجد أن

$$f(\{a,b\}) \subseteq X$$
$$f(\{a\}) \subseteq \{b\}$$
$$f(\{a\}) \subseteq \{a,b\}$$
$$f(\{a,b\}) \subseteq \{b,c,d\}$$

أي أن لكل $V \in \tau$ بحيث إن $f(a) \in V$ توجد $W \in \tau$ بحيث أن $a \in W$ ، $f(W) \subseteq V$ ، وبذلك نجد ان f دالة متصله عند النقطه $a \in X$.

(بالنسبه للعنصر الاول كتبت شرح تفصيلي لخطوات الحل لأني وجدت البعض اثناء دراستي يستصعب عليهم دراسة الاتصال عند نقطه مع انه بسيط وان شاء الله يكون واضح هنا وإذا هناك أي استفسار في بقية العناصر لأني لن اكتب لها شرح تفصيلي فلا مانع)

2) عند $x_0 = b$ بما أن $f(b)=d$ ، $\{b,c,d\}, X \in \tau$ هما المجموعتان المفتوحتان الوحيدتان التي تحتوي كل منهما على $f(b)$، وايضا توجد المجموعه المفتوحه $\{b\}$ التي تحتوي على b بحيث أن $f(\{b\}) = \{d\} \subseteq V$ لكل مجموعه مفتوحه V تحتوي على $f(b)$. أي أن f دالة متصله عند النقطه $b \in X$.

٣) عند $x_0 = c$ بما أن $f(c)=b$ ، $\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\}, X \in \tau$ كل المجموعات المفتوحة التي تحتوي على $f(c)$ ، والمجموعتان المفتوحتان الوحيدتان التي تحتوي كل منهما على c هما

X ، $\{b,c,d\}$ ولكن $f(\{b,c,d\}) = f(X) = \{b,c,d\} \not\subset \{b\}$. أي أن f ليست دالة متصله عند النقطه $c \in X$.

٤) وبالمثل نجد ان f دالة متصله عند $d \in X$.

التمارين :

السؤال الاول :

إذا كانت $f : X \to Y$ داله معرفه كالتالي :

$$f(x) = y \ , \ \forall x \in X$$

أي أن f دالة ثابته .هل f دالة متصلة ؟

السؤال الثاني :

إذا كانت $f : (X,D) \to (Y,S)$ أي دالة من الفضاء التبولوجي المنفصل (discrete topology space) (X,D) إلى أي فضاء تبولوجي (Y,S) .هل f دالة متصلة ؟

حل التمارين

السؤال الاول :

إذا كانت $f : X \rightarrow Y$ داله معرفه كالتالي :

$$f(x) = y \;,\; \forall x \in X$$

أي أن f دالة ثابته .هل f دالة متصلة ؟

الحل:

واضح أن

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \varphi & \text{if} \quad y \notin V \\ X & \text{if} \quad y \in V \end{cases}$$

وهذا يؤدي إلى أن f دالة متصلة .

السؤال الثاني :

إذا كانت $f : (X,D) \rightarrow (Y,S)$ أي دالة من الفضاء التبولوجي المنفصل (discrete topology space) (X,D) إلى أي فضاء تبولوجي(Y,S) .هل f دالة متصلة ؟

الحل :

بما أن أي مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة في X

إذن $f^{-1}(V) \in D$ لكل $V \in S$. أي أن f دالة متصلة .

الدرس السابع

العلاقة بين تعريف اتصال الدالة عند نقطة وتعريف اتصال الدالة على الفضاء التبولوجي

نظرية :

إذا كانت $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,v)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,v) فإن f تكون متصلة (مستمره) (Continuous Function) إذا وإذا كان فقط f متصلة عند كل نقطة في X.

البرهان :

الاتجاه الأول:

نفرض أن f متصلة عند كل نقطة $x\in X$.

ولتكن V أي مجموعة مفتوحة في Y،

علينا اثبات أن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X،

لنفرض أن $x\in f^{-1}(V)$،

وهذا يعني أن $f(x)\in V$.

لكن f متصلة عند كل نقطة x،

إذن (من تعريف الاتصال عند نقطة): يوجد مجموعة مفتوحة W تحوي x بحيث أن :

$$f(W)\subseteq V$$

$$\rightarrow x\in W\subseteq f^{-1}(V)$$

وبهذا نستنتج (من نظريه سابقه في الدرس الاول) :أن $f^{-1}(V)$ مجموعه مفتوحه في X

إذن f دالة متصلة .

الاتجاه الثاني :

نفرض أن f دالة متصلة .
علينا اثبات أن f متصلة عند كل نقطة $x \in X$ ،
ولتكن V أي مجموعة مفتوحة تحوي $f(x)$ في Y ،
وبما أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X
تحوي x ،
وبإختيار $W = f^{-1}(V)$
نجد أن تعريف الاتصال عند النقطة x متحقق.

نظرية :
تكون $f : X \to Y$ دالة متصلة إذا وإذا فقط كانت الصورة العكسيه لكل مجموعه مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X.

البرهان:

الاتجاه الاول :
لنفرض أن f دالة متصلة ،
ولتكن F أي مجموعة مغلقة في Y ،
وهذا يعني أن F^c مجموعة مفتوحة في Y.
(الآن F^c مجموعة مفتوحة في Y ، f دالة متصلة)
وهذا يعني أن $f^{-1}(F^c)$ مجموعه مفتوحه في X.
لكن

$$f^{-1}(F^c) = \left(f^{-1}(F)\right)^c$$

مجموعه مفتوحة
إذن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X .

الاتجاه الثاني :

نفرض ان الصورة العكسيه لكل مجموعه مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X

ولتكن V أي مجموعة مفتوحة في Y ،

الآن V^c مجموعة مغلقة في Y ،

ومن الفرض فإن $f^{-1}(V^c)$ مجموعة مغلقة في X.

ولكن

$$f^{-1}(V^c) = \left(f^{-1}(V)\right)^c$$

مجموعة مغلقة .

إذن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X ،

وبالتالي فإن f دالة متصلة

نظرية:

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ دالة من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y فإن الشروط التالية تكون متكافئة :

(1) f دالة متصلة.

(2) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

(3) $f(b(A)) \subseteq \overline{f(A)} \cup b(f(A))$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان :

(ملاحظه : لإثبات ثلاث علاقات متكافئه هناك عدة طرق سأستخدم هنا إحداها وليس بالضروري أن تستخدموا نفس طريقتي التاليه فتستطيع إثبات العلاقه مثلا كالتالي من (1) إلى (2) ثم من (2) إلى (3) ثم من (3) إلى (1) او أي طريقه اخرى تحقق المطلوب فكما يقال كل الطرق تؤدي إلى روما)

(و هنا سأبر هن بالطريقه التاليه من (1) إلى (2) ثم من (2) إلى (1)
ثم من (2) إلى (3) ثم من (3) إلى (2))

$(1) \rightarrow (2)$

نفرض أن f دالة متصلة.

وبما أن $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$

إذن و بالتأثير بالدالة العكسية نجد أن:

$$A \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$

(وحيث أنه إذا كان $A \subseteq B$ فإن $\bar{A} \subseteq \bar{B}$)

فنستنتج أن

$$\bar{A} \subseteq \overline{f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)} = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \qquad \cdots \quad (*)$$

(لأن $\overline{f(A)}$ مجموعة مغلقة ، f دالة متصلة)

إذن $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ مجموعة مغلقة.

وبالتأثير على العلاقة (*) بـ f نحصل على:

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

و هو المطلوب إثباته.

$(2) \rightarrow (1)$

نفرض أن $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

و لإثبات أن f دالة متصلة ،

نفرض F أي مجموعة مغلقة في Y ،

علينا إثبات أن $f^{-1}(F)$ مجموعه مغلقة في X ،

أي إثبات أن

$$\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$$

ومعلوم أن

$$f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)} \quad \cdots(1)$$

بقي إثبات أن

$$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$$

ومن الفرض ($f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$) ،

وحيث أن $f^{-1}(F) \subseteq X$ فإن

$$f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq \overline{ff^{-1}(F)} = \overline{F} = F$$

$$\rightarrow f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq F \quad \cdots(*)$$

(لأن F مغلقة)

وبالتأثير بالدالة العكسيه على (*) نحصل على:

$$\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq f^{-1}(F) \quad \cdots(2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$

وبالتالي فإن f دالة متصلة.

(سأتوقف هنا واترك اكمال البرهان من (2) إلى (3) ثم من (3) إلى (2) كتمرين للقارئ و لأرى بعض المحاولات منكم وبعد يومين بإذن الله سأكمل البرهان إذا لم أجد إجابه)

التمارين :

برهن تكافؤ العلاقتين (2) و(3) في النظريه السابقه .

حل التمارين

برهن تكافؤ العلاقتين :

(2) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

(3) $f(b(A)) \subseteq f(A) \cup b(f(A))$ لكل $A \subseteq X$.

الحل:

$(2) \to (3)$

نفرض أن $A \subseteq X$ فإن

$$\bar{A} = A^{\circ} \cup b(A) = A \cup b(A)$$

لأن

$$A^{\circ} \subseteq A \ , \ A \subseteq \bar{A}$$

وحيث أن :

$$b(A) \subseteq \bar{A} \quad \cdots (*)$$

فإنه و بالتأثير بالدالة f على (*) نحصل على :

$$f(b(A)) \subseteq f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

إذن نستنتج أن :

$$f(b(A)) \subseteq f(A) \cup b(f(A))$$

وهو المطلوب إثباته .

$(2) \leftarrow (3)$

نفرض أن $A \subseteq X$ ،
و معلوم أن

$$\bar{A} = A \cup b(A)$$

وبالتأثير بالدالة f نحصل على:

$$\begin{aligned} f(\bar{A}) &= f(A \cup b(A)) \\ &= f(A) \cup f(b(A)) \\ &\subseteq f(A) \cup [f(A) \cup b(f(A))] \\ &= f(A) \cup b(f(A)) \end{aligned}$$

إذن نستنتج أن :

$$f(\bar{A}) \subseteq f(A) \cup b(f(A)) = \overline{f(A)}$$

$$\rightarrow \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

وهو المطلوب إثباته.

الدرس الثامن

الدوال المفتوحة والدوال المغلقة
Open and Closed Functions

تعريف :

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,ν) فإننا نقول أن f دالة مفتوحة (مغلقة) Opened Function (Close) إذا كانت $f(V)$ مجموعة مفتوحة ($f(F)$ مجموعة مغلقة) في (Y,ν) لكل مجموعة مفتوحة V (مجموعة مغلقة F) في (X,τ) . أي أن

$$f(V)\in\nu\left(f(F)\in\Im_Y\right) \text{ لكل } V\in\tau\left(F\in\Im_X\right)$$

مثال:

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ دالة معرفة كالتالي :

$$f(a)=2\ ,\ f(b)=3\ ,\ f(c)=4\ ,\ f(d)=3$$

حيث

$$X=\{a,b,c,d\}\ ,\ \tau=\{X,\varphi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

$$Y=\{1,2,3,4\}\ ,\ \nu=\{Y,\varphi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,3,4\}\}$$

هل f دالة مفتوحة ، دالة مغلقة ؟

الحل:

من الواضح أن

$$f(X)=\{2,3,4\}\in \nu\ ,\ f(\varphi)=\varphi\in \nu$$
$$f(\{a\})=\{2\}\in \nu\quad ,\ f(\{a,b\})=\{2,3\}\notin \nu$$
$$f(\{a,b,c\})=\{2,3,4\}\in \nu$$

إذن f دالة ليست مفتوحة وذلك لوجود $\{a,b\}\in\tau$ ولكن
$f(\{a,b\})=\{2,3\}\notin \nu$.

وكذلك نجد أن

$$\Im_Y=\{Y,\varphi,\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{1\}\}$$
$$\Im_X=\{X,\varphi,\{b,c,d\},\{c,d\},\{d\}\}$$

،

ولكن

$$f(X)=\{2,3,4\}\in\Im_Y\qquad ,\ f(\varphi)=\varphi\in\Im_Y$$
$$f(\{b,c,d\})=\{3,4\}\in\Im_Y\quad ,\ f(\{c,d\})=\{3,4\}\in\Im_Y$$
$$f(\{d\})=\{3\}\notin\Im_Y$$

إذن f دالة ليست مغلقة وذلك لوجود $\{d\}\in\Im_X$ ولكن
$f(\{d\})=\{3\}\notin\Im_Y$.

مثال :

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ دالة معرفة كالتالي :

$$f(a)=1\ ,\ f(b)=1\ ,\ f(c)=1\ ,\ f(d)=2$$

حيث

$$X=\{a,b,c,d\}\ ,\ \tau=\{X,\varphi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

$$Y=\{1,2,3,4\}\ ,\ \nu=\{Y,\varphi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,3,4\}\}$$

هل f دالة مفتوحة ، دالة مغلقة ؟

الحل:

بالأسلوب المتبع نفسه في المثال السابق نجد أن f دالة مفتوحة وذلك لأن $f(V)\in\nu$ لكل $V\in\tau$ ولكنها ليست مغلقة لأن $f(X)=\{1,2\}\notin\Im_Y$.

مثال:

إذا كانت $f,g:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ دالتين من أي فضاء تبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,ν) حيث $Y=\{a,b,c\}$ ، $\nu=\{Y,\varphi,\{a\},\{a,c\}\}$ والمعرفتان كالتالي:

$$f(x)=a\ ,\ g(x)=b\ ,\quad \forall x\in X$$

أي من f,g دالة مفتوحة أو مغلقة أو متصلة؟

الحل :

من الواضح أنه إذا كانت $\varphi \neq A \in \tau$ فإن $f(A)=\{a\} \in \nu$ ، $f(\varphi)=\varphi$ إذن f دالة مفتوحة ،
وكذلك نجد أن

$$f^{-1}(\varphi)=\varphi \, , f^{-1}(Y)=f^{-1}\{a\}=f^{-1}\{a,c\}=X\in \nu$$

إذن f دالة متصلة .

ولكن إذا كانت $F\in \Im_X$ فإن $f(F)=\{a\}\notin \Im_Y$. إذن f دالة ليست مغلقة .

أي أن f دالة متصلة ومفتوحة ولكنها ليست مغلقة .

وبالمثل يمكن إثبات أن f دالة متصلة ومغلقة ولكنها ليست مفتوحة .

مثال:

إذا كانت $f:(R,\upsilon)\to(R,\upsilon)$ دالة ثابتة معرفة كالتالي :

$$f(x)=1 \, , \ \forall x\in R$$

حيث (R,υ) الفضاء العادي على R .هل f دالة مفتوحة أو مغلقة أو متصلة ؟

الحل :

واضح أن

$$f(A)=\{1\}=\left((-\infty,1)\cup(1,\infty)\right)^{C}\in \Im_R$$

لكل $A \in \Im_R$ إذن f دالة مغلقة ،

وكذلك إذا كانت $V \in \upsilon$ فإن

$$f^{-1}(V)=\begin{cases}\varphi \in \upsilon & \text{if} \quad 1 \notin V \\ R \in \upsilon & \text{if} \quad 1 \in V\end{cases}$$

إذن f دالة متصلة .

ولكن إذا كانت $A \in \upsilon$ فإن $f(A)=\{1\} \notin \upsilon$

إذن f دالة ليست مفتوحة .

أي أن f دالة متصلة و مغلقة ولكنها ليست مفتوحة .

نظرية:

إذا كانت $f:(X,\tau) \to (Y,v)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,v) فإن الشروط التالية متكافئة :

١) f دالة مفتوحة .

٢) $f(A^{\circ}) \subseteq (f(A))^{\circ}$ لكل $A \subseteq X$.

٣) $f(A) \in v$ لكل $A \in \beta$ حيث β اساس للتبولوجي τ .

٤) لكل $x \in X$ ، ولكل جوار A لـ x يوجد جوار W لـ f(x) بحيث إن $W \subseteq f(A)$.

البرهان:

$(2) \leftarrow (1)$

نفرض أن f دالة مفتوحة ، $A \subseteq X$. بما أن $A \subseteq A^\circ$ إذن

. $f(A^\circ) \subseteq f(A)$

وبما أن $A^\circ \in \tau$ فإن $f(A^\circ) \in \nu$ وهذا يؤدي إلى أن

$.f(A^\circ) = (f(A^\circ))^\circ \subseteq (f(A))^\circ$

$(3) \leftarrow (2)$

نفرض أن β اساس للتبولوجي τ ، $A \in \beta$ إذن $A^\circ = A$.

من (2) نجد أن

$$f(A) = f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ \subseteq f(A)$$

، ومن ثم فإن $f(A) = (f(A))^\circ$.

أي أن $f(A) \in \nu$.

$(4) \leftarrow (3)$

نفرض أن $x \in X$ ، A جوار لـ x إذن يوجد $V \in \beta$

بحيث أن $x \in V \subseteq A$ ،

ومن ثم فإن $f(x) \in f(V) \subseteq f(A)$.

من (3)نجد أن

$$W = f(V) \in \nu$$

، وهذا يؤدي إلى أن W جوار لـ $f(x)$ ، .

$$W \subseteq f(A)$$

$(1) \leftarrow (4)$

نفرض أن $A \in \tau$ ، $z \in f(A)$ إذن يوجد $x \in X$

بحيث أن $f(x) = z$ ،A جوار لـ x .

من (4) نجد أنه يوجد جوار W_z لـ z

بحيث إن $W_z \subseteq f(A)$ ،

ومن ثم فإن $f(A) = \cup\{W_z : z \in f(A)\} \in \nu$ ،

وهذا يؤدي إلى أن f دالة مفتوحة.

نظرية:

إذا كانت $f : (X,\tau) \to (Y,\nu)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,ν) فإننا نقول أن f دالة مغلقة إذا وإذا كان فقط $\overline{f(A)} = f(\bar{A})$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان :

الاتجاه الاول :

نفرض أن الدالة f مغلقة ، $A \subseteq X$.

بما أن $A \subseteq \bar{A}$ إذن $f(A) \subseteq f(\bar{A})$.

وبما أن $\bar{A} \in \Im_X$ إذن $f(\bar{A}) \in \Im_Y$

حيث إن f دالة مغلقة ،

ومن ثم فإن

$$\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right) = f\left(\overline{A}\right).$$

أي أن

$$\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$$

الاتجاه الثاني :

نفرض أن $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$ لكل $A \subseteq X$ ،

$B \in \Im_X$ إذن $f(B) \subseteq \overline{f(B)} \subseteq f\left(\overline{B}\right) = f(B)$ ،

ومن ثم فإن $f(B) = \overline{f(B)}$ ،

وهذا يؤدي إلى أن $f(B) \in \Im_Y$.

أي أن f دالة مغلقة.

التمارين :

السؤال الأول :

إذا كان كل من $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\nu)$ ، $g:(Y,\nu)\rightarrow(Z,\omega)$ دالة متصلة فاثبت أن الدالة $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\omega)$ تكون ايضا دالة متصلة .

السؤال الثاني :

إذا كانت $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\nu)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,ν) فبين أن f تكون دالة متصلة إذا وإذا كان فقط $f^{-1}(B^{\circ})\subseteq\left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$ لكل $B\subseteq Y$.

السؤال الثالث:

إذا كانت $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\nu)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,ν) فبين أن f دالة متصلة إذا وإذا كان فقط $f\left(d(B)\right)\subseteq f(B)\cup d\left(f(B)\right)$ لكل $B\subseteq X$.

حل التمارين

السؤال الأول :

إذا كان كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ ، $g:(Y,\nu)\to(Z,\omega)$ دالة متصلة فاثبت أن الدالة $gof:(X,\tau)\to(Z,\omega)$ تكون ايضا دالة متصلة .

الحل :

نفرض أن G مجموعة مفتوحة في Z بالتالي فإن :

$g^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Y ، لأن g متصلة .

بالتالي $f^{-1}(g^{-1}(G))$ مجموعة مفتوحة في X ، لأن f متصلة.

وبالتالي فإن

$$(gof)^{-1}(G)=f^{-1}(g^{-1}(G))$$

هي مجموعة مفتوحة في X ،

لكن G مجموعة مفتوحة في Z أي أن :

gof متصلة .

السؤال الثاني :

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,ν) فبين أن f تكون دالة متصلة إذا وإذا كان فقط $f^{-1}(B^{\circ})\subseteq(f^{-1}(B))^{\circ}$ لكل $B\subseteq Y$.

الحل :

الاتجاه الأول

نفرض أن f متصلة ، إذا فإن لأي مجموعة مفتوحة $(O \in \nu)$ في Y
نجد أن الصورة العكسية لها $f^{-1}(O)$ مجموعة مفتوحة في X
$\left(f^{-1}(O) \in \tau\right)$.
لأي $B \subseteq Y$ نجد أن B° مجموعة مفتوحة ، وبالتالي فإن الصورة
العكسية لها $f^{-1}\left(B^{\circ}\right)$ مجموعة مفتوحة في X ،
ومن المعلوم أن :

$$B^{\circ} \subset B$$

$$\rightarrow f^{-1}\left(B^{\circ}\right) \subset f^{-1}(B)$$

$$\rightarrow \left(f^{-1}\left(B^{\circ}\right)\right)^{\circ} \subset \left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$$

ولكن ،

$$\left(f^{-1}\left(B^{\circ}\right)\right)^{\circ} = f^{-1}\left(B^{\circ}\right)$$

لأن $f^{-1}\left(B^{\circ}\right)$ مجموعة مفتوحة

$$\therefore f^{-1}\left(B^{\circ}\right) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$$

الاتجاه الثاني :

نفرض أن العلاقة $f^{-1}\left(B^{\circ}\right) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$ متحققة لأي مجموعة
جزئية من Y ،
نفرض أن O مجموعة مفتوحة ونريد إثبات أن صورتها العكسية
مفتوحة في X ،

وحيث أن

$O = O^{\circ}$ (لأن O مجموعة مفتوحة)

$$\rightarrow f^{-1}\left(O^{\circ}\right) = f^{-1}(O) \subseteq \left(f^{-1}(O)\right)^{\circ} \quad \cdots (1)$$

ومن المعلوم أن

$$\left(f^{-1}(O)\right)^{\circ} \subseteq f^{-1}(O) \qquad \cdots (2)$$

إذن من $(1),(2)$ نجد أن :

$$f^{-1}(O) = \left(f^{-1}(O)\right)^{\circ}$$

أي أن $f^{-1}(O)$ مجموعة مفتوحة

وهذا يعني أن f متصلة .

السؤال الثالث:

إذا كانت $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\nu)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,ν) فبين أن f دالة متصلة إذا وإذا كان فقط $f(d(B)) \subseteq f(B) \cup d(f(B))$ لكل $B \subseteq X$.

الحل :

الاتجاه الأول

نفرض أن f متصلة ، إذا فإن المجموعات المفتوحة في Y تكون صورها العكسية مجموعات مفتوحة في X.

لكل $B \subseteq X$ نجد أن

$$\bar{B} = B \cup d(B)$$

$$\rightarrow d(B) \subseteq \bar{B}$$

$$\rightarrow f(d(B)) \subseteq f(\bar{B}) \subseteq \overline{f(B)}$$

ولكن

$$\overline{f(B)} = f(B) \cup d(f(B))$$

وبالتالي نجد :

$$f(d(B)) \subseteq f(B) \cup d(f(B))$$

الاتجاه الثاني :

نفرض أن العلاقة

$$f(d(B)) \subseteq f(B) \cup d(f(B)) \quad \cdots(*)$$

متحققة لكل $B \subseteq X$ ،

ونحاول إثبات أن $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(لإنه بإثبات العلاقه نثبت ان f متصله)

نفرض $A \subseteq X$ ، إذن

$$\bar{A} = A \cup d(A)$$

ومن ثم

$$f(\bar{A}) = f(A \cup d(A)) = f(A) \cup f(d(A))$$

ومن العلاقة (*) نجد

$$f(d(A)) \subseteq f(A) \cup d(f(A))$$

$$f(\bar{A}) = f(A) \cup f(d(A))$$

$$\subseteq f(A) \cup d(f(A))$$

$$= \overline{f(A)}$$

تمنياتي لكم بالإفاده
وإذا كانت هناك أي خطوه في الحل غير مفهومه وتحتاج إلى توضيح فلا بأس عندي في إعادة شرحها بإيضاح اكثر

الدرس التاسع
التكافؤ (التشاكل) التبولوجي
Homeomorphic

تعريف:

نفرض أن $f:(X,\tau)\to(Y,v)$ دالة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,v) فإننا نقول إن f داله تبولوجية أو تشاكل تبولوجي (Homeomorphism) إذا كانت الدالة f تحقق الشروط التالية :

(1) f دالة تقابلية .

(2) f دالة متصلة .

(3) f^{-1} دالة متصلة .

مثال:

إذا كان (X,υ) هو الفضاء التبولوجي العادي المعرف على $X=[0,1]$ ، (Y,υ) هو الفضاء التبولوجي العادي المعرف على $Y=[a,b]$. هل $X\cong Y$ ؟

الحل:

نفرض أن $f:X\to Y$ دالة معرفة كالتالي:

$$f(x)=(b-a)x+a\ ,\quad \forall x\in X$$

من الواضح أن f دالة تقابلية ، f دالة متصلة ، وكذلك الدالة f^{-1} المعرفة كالتالي :

$$f^{-1}(y)=\frac{y-a}{b-a}\ ,\ \ \forall\ y\in Y$$

ايضا دالة متصلة ، ومن ثم فإن $X\cong Y$.

مثال:

إذا كان (X,υ) هو الفضاء التبولوجي العادي المعرف على $X=[a,b]$ ، (Y,υ) هو الفضاء التبولوجي العادي المعرف على $Y=[c,d]$. حيث $a<b$ ، $c<d$ هل $X\cong Y$ ؟

الحل:

نفرض أن $f:X\to Y$ دالة معرفة كالتالي:

$$f(x)=c+\frac{x-a}{b-a}(d-c)\ ,\quad \forall x\in X$$

من الواضح أن f دالة تقابلية ، f دالة متصلة ، وكذلك الدالة f^{-1} المعرفة كالتالي :

$$f^{-1}(y)=a+\frac{y-c}{d-c}(b-a)\ ,\ \ \forall\ y\in Y$$

ايضا دالة متصلة ، ومن ثم فإن $X\cong Y$.

مثال :

إذا كانت (X,τ) أي فضاء تبولوجي ، $f:X\to X$ دالة معرفة كالتالي :

$$f(x)=x\ ,\ \forall\, x\in X$$

هل f دالة تبولوجية ؟

الحل :

واضح أن f دالة تقابلية ، f دالة متصلة ، وذلك لأن $f^{-1}(A)=A\in\tau$ لكل $A\in\tau$ ، وكذلك f^{-1} دالة متصلة وذلك لأن

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(A)=f(A)=A\in\tau$$

لكل $A\in\tau$. أي أن f دالة تبولوجية .

نظرية :

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,v)$ دالة تقابلية من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,v) فإن الشروط التالية متكافئة :

(١) f دالة تبولوجية .

(٢) f دالة متصلة ومفتوحة.

(٣) f دالة متصلة ومغلقة .

(٤) $f(\bar{A})=\overline{f(A)}$ لكل $A\subseteq X$.

تعريف :

إذا كانت P خاصية من خواص المجموعات فإن P تسمى خاصية تبولوجية (Topological property) إذا كان تحقق هذه الخاصية في الفضاء التبولوجي (X,τ) يؤدي إلى تحققها في كل فضاء تبولوجي متكافئ مع (X,τ).

مثال:

هل الطول خاصية تبولوجية ؟

الحل :

لا ، فإذا كان $Y=[0,5]$, $X=[0,1]$ ، وعرف على كل من X, Y التبولوجي العادي فإن X, Y متكافئان تبولوجيا ،
ولكن طول $X=[0,1]$ يساوي 1
وطول $Y=[0,5]$ يساوي 5 .
وبذلك فإن الطول ليس خاصية تبولوجيه .

التمارين :

هل العبارات التالية صحيحة ام خاطئة مع التعليل :

(١) كل دالة متصلة (Continuous Function) هي دالة مفتوحه (Opened Function) .

(٢) المحدودية خاصية تبولوجيه (Topological property) .

(٣) قابلية الفراغ للفصل هي خاصية تبولوجية (Topological property).

(٤) إذا كانت $f:X\to Y$ دالة فوقية ومفتوحة فإن f تكون دالة مغلقة ايضا(Closed Function).

حل التمارين

1\ كل دالة متصلة (Continuous Function) هي دالة مفتوحه (Opened Function) . (عباره خاطئه)

مثال يوضح خطأ العبارة :

$$f : R \to R$$
$$f(x) = 1 \quad \forall x \in R$$

ليست مفتوحة ولكنها متصلة .

2\ المحدودية خاصية تبولوجيه (Topological property) . (عبارة خاطئة)

مثال يوضح خطأ العباره:

إذا كانت $X = [0,1]$ وعرف على كل من X, R التبولوجي العادي فإن $X \cong R$ ،
ولكن X مجموعة محدودة بينما R ليست محدودة .
إذن المحدودية ليست خاصية تبولوجية .

3\ قابلية الفراغ للفصل هي خاصية تبولوجية (Topological property) . (عبارة صحيحة)

الإثبات :

ليكن X, Y فراغان متكافئان تبولوجيا و X فراغ قابل للفصل ،

إذن توجد دالة $f: X \to X$ تقابلية ومتصلة و f^{-1} دالة متصلة .

Xفراغ قابل للفصل إذن

توجد مجموعة $A \subseteq X$ قابلة للعد وكثيفة $(\bar{A} = X)$

الآن :

المجموعة $f(A) \subseteq Y$ قابلة للعد

((علينا إثبات أن $f(A)$ مجموعة كثيفة في Y عن طريق إثبات أن أي مجموعة O مفتوحة في Yتحقق $f(A) \cap O \neq \varphi$))

لتكن $O \subseteq Y$ أي مجموعة مفتوحة في Y حيث أن

f دالة متصلة إذن

$f^{-1}(O)$ مجموعة مفتوحة في X

لكن A مجموعة كثيفة في X إذن

$$A \cap f^{-1}(O) \neq \varphi$$

إذن يوجد

$$a \in A \cap f^{-1}(O)$$

$$\to a \in f(A) \cap O$$

إذن أي مجموعة مفتوحة O في Y تقطع $f(A)$

إذن $f(A)$ كثيفة في Y

وهذا يعني أن Y فراغ قابل للفصل ،

وبالتالي فإن قابلية الفراغ للفصل خاصية تبولوجية .

4\ إذا كانت $f : X \rightarrow Y$ دالة فوقية ومفتوحة فإن f تكون دالة مغلقة ايضا(Closed Function). (العباره صحيحة)

الاثبات :

بفرض أن f دالة مفتوحة وأن $F \subseteq X$ مجموعه مغلقة

فإن F^c مجموعه مفتوحة

وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f\left(F^c\right)$ مجموعة مفتوحة في y

وحيث أن f دالة فوقيه فإن

$$f\left(F^c\right) = \left(f\left(F\right)\right)^c$$

وبالتالي فإن $f\left(F\right)$ مجموعة مغلقة في y

أي أن f دالة مغلقة .

الدرس العاشر
الترابط (الاتصال) في الفضاءات التبولوجية
Connectedness in Topological Spaces

تعريف :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجيا ، $A,B \subseteq X$ فإننا نقول إن A,B منفصلتان إذا كان $B \neq \varphi$ ، $A \neq \varphi$ ، $A \cap B = \varphi$.

تعريف :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجيا فإننا نقول إنه مترابط (connected) إذا كان لا يمكن كتابته اتحادا لمجموعتين مفتوحتين منفصلتين ، أي إذا وإذا كان فقط لا توجد مجموعة مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت في (X,τ) سوى φ, X .

وبالتالي فإن X يكون فراغ غير مترابط
إذا كان :

$$X = A \cup B$$

حيث:

$$A \cap B = \varphi \quad , \quad A,B \neq \varphi \quad A,B \in \tau$$

مثال :

إذا كان

$$X = \{a, b, c, d\}$$
$$\tau_1 = \{X, \varphi, \{a, d\}, \{b, c\}, \{d\}\}$$
$$\tau_2 = \{X, \varphi, \{a, c\}, \{a\}, \{c\}\}$$

فإننا نجد أن (X, τ_1) فضاء غير مترابط لأن

$$X = \{a, d\} \cup \{b, c\}$$
$$\{a, d\} \cap \{b, c\} = \varphi$$
$$\{a, d\}, \{b, c\} \in \tau$$

بينما نلاحظ أن (X, τ_2) فراغ مترابط .

مثال :

الفراغ الغير منفصل (In discrete topology space) هو فضاء مترابط .

تعريف :

إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجيا ، $A \subseteq X$ فإن A تكون مجموعة مترابطه إذا كان (A, τ_A) فضاءً مترابطا .

مثال :

إذا كان $\tau = \{X, \varphi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}\}$ تبولوجيا معرفا على $X = \{a, b, c, d, e\}$ ، $B = \{a, b\}$ ، $A = \{b, d, e\}$. ادرس ترابط كل من X , A, B ؟

الحل :

(1) X فراغ مترابط لأنه لا توجد مجموعتان مفتوحتان اتحادهم يمثل X وتقاطعهم φ وغير خاليتين .

(2) بالنسبة لـ A نحسب اولا τ_A :

$$\tau_A = \{A, \varphi, \{b\}, \{b, c\}\}$$

إذن A مجموعة مترابطة ، لأنه لا توجد أي مجموعات مفتوحات منفصلة في τ_A .

(3) بالنسبة لـ B نحسب اولا τ_B :

$$\tau_B = \{B, \varphi, \{a\}, \{b\}\}$$

إذن B مجموعة غير مترابطة لأن $\{a\}, \{b\}$ مجموعتان مفتوحتان منفصلتان في τ_B ، $B = \{a\} \cup \{b\}$.

مثال:

إذا كانت X مجموعة غير منتهية وعرف عليها تبولوجي المكملة المنتهية C (Finite complement topology). فبين أن (X, C) فضاء مترابط .

الحل:

نفرض العكس أن (X,C) فضاء غير مترابط ،
أي انه يوجد A,B مجموعتان مفتوحتان منفصلتان في C
وكلا من A,B مجموعة غير خالية ،
ومن ثم كل من A^c, B^c مجموعة منتهية .
وبما أن $A \cap B = \varphi$ فإن
$A^c \cup B^c = X$.
أي أن X مجموعة منتهية ،
وهذا يناقض أن X مجموعة غير منتهية ،
وهذا يؤدي إلى أن (X,C) فضاء مترابط .

مثال :

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجيا فإن مجموعة العنصر الواحد والمجموعة الخالية مجموعتان مترابطتان .

تعريف :

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجيا ، $A,B \subseteq X$ مجموعتين غير خاليتين ، فإننا نقول إن A,B متباعدتان إذا كان $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \varphi$.

مثال:

إذا كان $\tau = \{X, \varphi, \{a,b\}, \{c,d\}, \{e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}, \{c,d,e\}\}$ تبولوجيا معرفا على

$$A = \{a,b\}\ ,\ B=\{c,d\}\ \ ,\ C=\{a,e\}\ \ ,\ X = \{a,b,c,d,e\}$$

اوجد المجموعات المتباعدة من بين A,B,C .

الحل :

واضح أن كلا من A,B مجموعة مفتوحة ومغلقة ،

ومن ثم فإن

$$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = A \cap B = \varphi$$

أي أن A,B متباعدتان .

بالمثل نجد أن B,C متباعدتان ،

بينما A,C غير متباعدتين لأن

$$A \cap \bar{C} \neq \varphi$$

التمارين

هل العبارات التالية صحيحة ام خاطئة مع التعليل :

1- أي فضاء منفصل (Discrete topology)يحتوي على أكثر من نقطة هو فضاء غير مترابط .

2- إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجيا ، $A \subseteq X$ مجموعة مترابطه فإن A° مجموعة مترابطة .

3- إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجيا ، $A \subseteq X$ مجموعة مترابطه فإن $b(A)$ مجموعة مترابطة .

حل التمارين

هل العبارات التالية صحيحة ام خاطئة مع التعليل :

1- أي فضاء منفصل (Discrete topology)يحتوي على أكثر من نقطة هو فضاء غير مترابط . (عبارة صحيحة)

لأنه إذا كانت X تحتوي على أكثر من عنصر
وكانت A مجموعة مفتوحة غير خالية
في الفضاء المنفصل (Discrete topology) المعرف على X
فإن A^c أيضا مجموعة مفتوحة غير خالية .
أي أن A, A^c مجموعتان مفتوحتان منفصلتان في X
ولكن
$A \cup A^c = X$.
إذن أمكن كتابة X اتحادا لمجموعتين مفتوحتين منفصلتين ،
ومن ثم فإن X هو فضاء غير مترابط .

2- إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجيا ، $A \subseteq X$ مجموعة مترابطه فإن A° مجموعة مترابطة . (عبارة خاطئة)

مثال يوضح خطأ العبارة :

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\tau = \{X, \varphi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}\}$$

A مترابطة
لأنه لا يمكن كتابتها
كاتحاد مجموعتين مفتوحتين في τ
ولكن

$$A^{\circ} = \{1,2\} = \{1\} \cup \{2\}$$

غير مترابطة
لأنه يمكن كتابتها
كاتحاد مجموعتين مفتوحتين في τ

3- إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجيا ، $A \subseteq X$ مجموعة مترابطه فإن $b(A)$ مجموعة مترابطة . . (عبارة خاطئة)

مثال يوضح خطأ العبارة :

$$X = \{1,2,3,4,5\}$$

$$A = \{1,2,3\}$$

$$\tau = \{X, \varphi, \{1\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,4\}, \{1,3,5\}, \{2,3,4,5\}\}$$

A مترابطة
لأنه لا يمكن كتابتها
كاتحاد مجموعتين مفتوحتين في τ
ولكن

$$b(A) = \{2,3,4,5\} = \{2,4\} \cup \{3,5\}$$

غير مترابطة
لأنه يمكن كتابتها
كاتحاد مجموعتين مفتوحتين في τ

الدرس الحادي عشر
تابع الترابط (الاتصال) في الفضاءات التبولوجية
Connectedness in Topological Spaces

نظرية :

لأي فراغ (X,τ) العبارات التالية متكافئة :

١ - X فراغ غير مترابط .

٢ - X يمثل كاتحاد مجموعتان غير خاليتان ومنفصلتان ومغلقتان .

٣ - X يمثل كاتحاد مجموعتان غير خاليتان ومنفصلتان ومتباعدتان .

٤ - توجد دالة متصلة وفوقية من الفراغ X إلى الفراغ المتقطع على المجموعة $\{a,b\}$.

٥ - توجد مجموعة جزئية فعلية من X مفتوحة ومغلقة معا.

٦ - توجد مجموعة جزئية فعلية A من X بحيث أن

$$\overline{A} \cap \overline{A^c} = \varphi$$

البرهان:

(سأستخدم هنا طريقة الإثبات التالية : $(2) \to (1)$ ثم $(3) \to (1)$ ثم $(4) \to (1)$ ثم $(5) \to (1)$ ثم $(6) \to (1)$)

$$(1) \rightarrow (2)$$

ليكن X فراغ غير مترابط

$X = A \cup B$ ،

حيث

$$A, B \in \tau \quad , \quad A \cap B \neq \emptyset \quad , \quad A, B \neq \emptyset$$

نلاحظ أن $A^c = B$

إذن B مجموعة مغلقة

$$B^c = A$$

إذن A مجموعة مغلقة

وبذلك يتحقق (2) .

$$(1) \rightarrow (3)$$

ليكن X فراغ غير مترابط

$X = A \cup B$ ،

حيث

$$A, B \in \tau \quad , \quad A \cap B \neq \emptyset \quad , \quad A, B \neq \emptyset$$

A, B مجموعتان مغلقتان $(B^c = A \ , \ A^c = B)$

$$A = \bar{A} \quad B = \bar{B}$$

و بالتعويض

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$$

وبذلك يتحقق (3) .

$$(1) \to (4)$$

ليكن X فراغ غير مترابط

$X = A \cup B$ ،

حيث

$$A, B \in \tau \quad , \quad A \cap B \neq \varnothing \quad , \quad A, B \neq \varnothing$$

نعرف الدالة

$$f : X \to \{a, b\}$$

$$\nu = \{\{a, b\}, \varphi, \{a\}, \{b\}\}$$

بالصورة :

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{if} \quad x \in A \\ b & \text{if} \quad x \in B \end{cases}$$

الآن

$A, B \neq \varnothing \leftarrow f$ دالـــة فوقيـــة onto

الآن ندرس اتصال الدالة

$$f^{-1}(\{a, b\}) = X \quad \in \tau$$

$$f^{-1}(\{\varnothing\}) = \varnothing \quad \in \tau$$

$$f^{-1}(\{a\}) = A \quad \in \tau$$

$$f^{-1}(\{b\}) = B \quad \in \tau$$

إذن متصلة ،

وبذلك تتحقق (4) .

$(1)\rightarrow(5)$

ليكن X فراغ غير مترابط

، $X = A \cup B$

حيث

$A, B \in \tau \quad , \quad A \cap B \neq \varnothing \quad , \quad A, B \neq \varnothing$

نلاحظ أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة لأن $B^c = A$

وبذلك يتحقق (5) .

$(1)\rightarrow(6)$

ليكن X فراغ غير مترابط

، $X = A \cup B$

حيث

$A, B \in \tau \quad , \quad A \cap B \neq \varnothing \quad , \quad A, B \neq \varnothing$

نلاحظ أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة لأن $B^c = A$

نلاحظ أن B مجموعة مفتوحة ومغلقة لأن $A^c = B$

(A مغلقة) $A=\bar{A}$

(B مغلقة) $B = A^c$

$\bar{B}=B=\overline{A^c}$

وبالتعويض

$A \cap B = \varnothing$

$\bar{A} \cap \overline{A^c} = \varphi$

وبذلك يتحقق (6) .

نظرية :

إذا كان X فضاء تبولوجي مترابط ، $f : X \to Y$ دالة متصلة وفوقية فإن الفضاء Y يكون فضاء مترابط .

البرهان :

نفرض العكس أن Y فضاء غير مترابط ،

$$Y = A \cup B$$

حيث

$$A \cap B \neq \varnothing \quad , \quad A,B \neq \varnothing$$

، A,B مجموعتان مفتوحتان في Y .

الآن $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ مجموعتان مفتوحتان في X ،

لأن f دالة متصلة

ومن كون f دالة فوقية

$$f^{-1}(A) \neq \varnothing, f^{-1}(B) \neq \varnothing$$

$$X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

إذن

X فراغ غير مترابط .

إذن الفرض خاطئ

وبالتالي أن Y فضاء مترابط.

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجيا ، V,W مجموعتين متباعدتين في X ، A مجموعة جزئية مترابطة في X بحيث أن $A \subseteq V \cup W$ فإن $A \subseteq V$ أو $A \subseteq W$.

البرهان:

نفرض أن

$A \cap W \neq \varphi \quad , \quad A \cap V \neq \varphi$

بما أن V,W مجموعتان متباعدتان في X

إذن

$$Cl_A(A \cap V) \cap (A \cap W) = \left(A \cap \bar{V}\right) \cap (A \cap W)$$
$$= A \cap \left(\bar{V} \cap W\right) = A \cap \varnothing = \varnothing$$

وايضا

$$Cl_A(A \cap W) \cap (A \cap V) = \left(A \cap \bar{W}\right) \cap (A \cap V)$$
$$= A \cap \left(\bar{W} \cap V\right) = A \cap \varnothing = \varnothing$$

ومن ثم فإن $A \cap W$, $A \cap V$

مجموعتان متباعدتان في A .

وبما أن $A \subseteq V \cup W$

إذن

$$(A \cap V) \cup (A \cap W) = A \cap (V \cup W) = A.$$

وهذا تناقض

لكون A مجموعة مترابطة .

إذن $A \cap V = \varphi$ أو $A \cap W = \varphi$.

أي أن

$A \subseteq V$ أو $A \subseteq W$.

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجيا ، A_s مجموعة جزئية مترابطة في X لكل $s \in S$ بحيث إن $\bigcap_{s\in S} A_s \neq \varphi$ فإن $\bigcup_{s\in S} A_s$ مجموعة مترابطة في X .

البرهان :

نفرض العكس أن $\bigcup_{s\in S} A_s$ مجموعة جزئية

غير مترابطة .

إذن توجد مجموعتان متباعدتان V,W بحيث أن

$\bigcup_{s\in S} A_s = V \cup W$ ،

ومن ثم فإن $A_s \subseteq V \cup W$ لكل $s \in S$.

بما أن A_s مجموعة جزئية مترابطة في X

إذن

$A_s \subseteq V$ لكل $s \in S$.

أي أن

$\bigcup_{s\in S} A_s \subseteq V$ ،

وهذا يؤدي إلى أن $W = \varphi$ ،

وهذا تناقض

لكون V,W مجموعتين متباعدتين .

إذن $\bigcup_{s\in S} A_s$ مجموعة جزئية مترابطة .

نظريه :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجيا ، فإذا كانت A مجموعة مترابطة في X فإن $\overline{A}$ تكون مجموعة مترابطة .

البرهان:

(تنويه :سأستخدم من العبارات 6 المتكافئة السابقة الذكر العباره رقم 4)

لنفرض أن $f:\overline{A}\to\{a,b\}$ دالة متصلة من $\overline{A}$ إلى الفراغ المتقطع على $\{a,b\}$

(علينا اثبات أن f ليست دالة فوقية)

الآن : $f|_A : A\to\{a,b\}$

معطى أن A مجموعة مترابطة ،

إذن

$f|_A$ لايمكن أن تكون دالة فوقية .

بمعنى أن $f(A)=\{a\}$ مثلا

وبما أن f دالة متصلة إذن

$$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}=\overline{\{a\}}=\{a\}$$

وبالتالي فإن

$$f(\overline{A})=\{a\}$$

(ذكرنا انها متساوية لأنها مستحيل أن تكون جزئية ولو كانت جزئية فلن يكون ذلك إلا φ)

إذن f ليست فوقية

وبالتالي $\overline{A}$ مترابطة .

نظرية:

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجيا ، $A,B \subseteq X$ بحيث أن $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. فإذا كانت A مجموعة مترابطة فإن B تكون مجموعة مترابطة .

البرهان :

نفرض العكس ان B مجموعة غير مترابطة
إذن
توجد مجموعتان متباعدتان V,W في B
حيث أن
$B = V \cup W$.
بما ان A مجموعة مترابطة ،
$A \subseteq V \cup W$
إذن
$A \subseteq V$ أو $A \subseteq W$.
وبفرض ان $A \subseteq V$
إذن
$B = \bar{A} \cap B = Cl_B(A) \subseteq Cl_B(V)$.
وبما أن V,W مجموعتان متباعدتان في B
إذن
$Cl_B(V) \cap W = \varphi$ ،
ومن ثم فإن
$B \cap W = \varphi$
، وهذا يؤدي إلى أن $W = \varphi$
وهذا تناقض
لأن V,W مجموعتين متباعدتين .
إذن B مجموعة مترابطة .

التمارين

برهن ما يلي :

١ -الفراغ R مع التبولوجي المعتاد هو فراغ مترابط .

٢ -الترابط خاصية تبولوجية .

حل التمارين

برهن ما يلي :

١ -الفراغ R مع التبولوجي المعتاد هو فراغ مترابط .

نفرض العكس :

ان R فراغ غير مترابط

$$R = A \cup B$$

حيث

$$A,B \in \tau \quad , \quad A \cap B=\varnothing \quad , \quad A,B \neq \varnothing$$

$$A^c = B \quad , \quad B^c = A$$

إذن A^c, B^c مجموعتان مغلقتان

لتكن

$$a<b \quad , \quad a \in A \quad , \quad b \in B$$

نعرف مجموعة

$$A'=A \cap [a,b]$$

A' مجموعة مغلقة ومحدودة

إذن اصغر حد علوي لها c ، $b \neq c$

$$(c,b] \subseteq B$$

$$[c,b] \subseteq \bar{B} = B$$

$$c \in B$$

لكن

$c \in A$ وبالتالي فإن

$$A \cap B \neq \varnothing$$

وهذا تناقض

إذن R فراغ مترابط.

2-الترابط خاصية تبولوجية .

ليكن X,Y فراغان متكافئان تبولوجيا

$$f : X \to Y$$

دالة متصلة أحادية وفوقية

ليكن X فراغ مترابط

نريد إثبات أن Y فراغ مترابط .

نفرض أن Y

فراغ غير مترابط

$$Y = A \cup B$$

حيث

$$A,B \in \upsilon \quad , \quad A \cap B = \emptyset \quad , \quad A,B \neq \emptyset$$

ونجد ان

$f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ مفتوحة في X

لأن f دالة متصلة

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$$

لأن f دالة

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \neq \emptyset$$

لأن f دالة فوقية

إذن

$$X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

وهذا يعني أن

X غير مترابط

وهذا تناقض

إذن نتوصل للمطلوب.

الدرس الثاني عشر
المركبات
Components

تعريف:

إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X فإن A
تسمى مركبة Component لـ X
إذا كانت A مجموعة مترابطة في X
ولاتوجد مجموعة جزئية مترابطة
في X تحتوي على A .

مثال :

إذا كان

$$\tau = \{X, \varphi, \{a\}, \{b,c\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

تبولوجي معرف على

$$X = \{a,b,c\}$$

اوجد مركبات الفضاء التبولوجي X.

(خطوات الحل :

١ ـ نحدد جميع المجموعات الجزئية من X .
٢ ـ نحدد المجموعات المترابطة .

3-نختار من المجموعات المترابطه السابق إيجادها في رقم 2 المجموعات المترابطة الغير محتواه في أي مجموعة مترابطة في X).

الحل :

١ -المجموعات الجزئية من X هي :

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X$$

٢ -نحدد المجموعات المترابطة :

(1) $\{a\},\{b\},\{c\}$ جميعها مجموعات مترابطة لأنها وحيدة العنصر .

(2) ندرس هل $A=\{a,b\}$ مجموعة مترابطة أم لا :

$$\tau_A=\{A,\varphi,\{a\},\{b\}\}$$

وحيث أننا استطعنا كتابة A كاتحاد لمجموعتين غير خاليتين وغير متقاطعتين وينتميان إلى τ_A

فإن A مجموعة غير مترابطة .

(3) ندرس هل $B=\{a,c\}$ مجموعة مترابطة أم لا :

$$\tau_A=\{B,\varphi,\{c\},\{a\}\}$$

وحيث أننا استطعنا كتابة B كاتحاد لمجموعتين غير خاليتين وغير متقاطعتين وينتميان إلى τ_B

فإن B مجموعة غير مترابطة .

(4) ندرس هل $C=\{b,c\}$ مجموعة مترابطة أم لا :

$$\tau_C=\{C,\varphi,\{b\}\}$$

وحيث أننا لا نستيطع كتابة C كاتحاد لمجموعتين غير خاليتين وغير متقاطعتين وينتميان إلى τ_C

فإن C مجموعة مترابطة .

(5) X ليست مترابطة .

إذن المجموعات المترابطه في X هي :

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{b,c\}$$

3-مركبات الفضاء التبولوجي هي :

(نختار المجموعات المترابطه السابق إيجادها في رقم 2 ولكن الغير محتواه في أي مجموعة مترابطة) :

$$\{a\},\{b,c\}$$

نظرية :

لأي فراغ (X,τ) فإن :

١ -كل عنصر $a\in X$ ينتمي إلى مركبة واحدة فقط ونرمز لها بالرمز C_a .

2- لأي عنصرين $a,b\in X$ فإن C_a,C_b إما أن تكون متطابقتان أو منفصلتان.

3- كل مجموعة جزئية من X مترابطة تقع داخل مركبة واحدة .

4- كل مركبة هي مجموعة مغلقة .

5- X فراغ مترابط إذا وفقط إذا كان له مركبة واحدة فقط .

6- إذا كانت C مركبة لـ X و A, B مجموعتان متباعدتان
بحيث أن $X = A \bigcup B$ فإن $C \subseteq A$ أو $C \subseteq B$

البرهان :

١ نفرض العكس

$$a \in C_1, a \in C_2$$

$$a \in C_1 \bigcap C_2 \neq \varphi$$

$$\to C_1 \cup C_2$$

من نظرية مجموعات مترابطة

$$C_1 \subseteq C_1 \cup C_2$$

$$C_2 \subseteq C_1 \cup C_2$$

وهذا يناقض كون C_1, C_2 مركبان .

٢ نفرض العكس C_a, C_b غير منفصلتان

$$C_a \bigcap C_b \neq \varphi$$

$$\to C_a \bigcap C_b$$

مجموعات مترابطة

$$C_a \subseteq C_a \cup C_b$$

وهذا يناقض كون C_a مركبة .

3- نفرض أن

$a \in C, a \in C'$

C, C' مركبتان

$C \cap C' \neq \varphi$

$\rightarrow C \cup C'$

مترابطة لكن

$a \subseteq C \cup C'$

هذا تناقض .

4- بما أن A مترابطة

وان $A \subseteq \bar{A}$ فإن

$\bar{A}$ مترابطة

لكن A مركبة أي هي اكبر مجموعة مترابطة

إذن

$\bar{A} \subseteq A$

وعلى ذلك $A = \bar{A}$

أي A مجموعة مغلقة .

5- إذا كان X فراغ مترابط فإن

أي مجموعه $A \subseteq X$ مترابط

تحقق أن $A \subseteq X$

إذن A لا يمكن أن تكون مركبة

إذن فقط X هي المركبة (له مركبة واحدة) .

6- لتكن C مركبة لـ X علينا إثبات أن $C = \bar{C}$ (معلوم أن

$C \subseteq \bar{C}$)

وحيث ان C مجموعة مترابطة فإن

$\bar{C}$ مجموعة مترابطة

ولكن C مركبة إذن

$$C = \bar{C}$$

وبالتالي فإنه لا يمكن ان يكون $C \subseteq \bar{C}$

لأن C مركبة .

مثال:

بين أن كل مجموعة تحتوي على عدد قياسي واحد هي مركبة للفضاء الجزئي Q من الفضاء العادي R.

الحل :

نفرض أن $A \subseteq Q$ تحتوي على اكثر من عنصر ،

ونفرض أن $x,y \in A$ بحيث أن $x < y$.

إذن يوجد عدد غير قياسي z

بحيث أن

$$x < z < y$$

(وهذا يأتي من حقيقة أن بين كل عددين قياسيين يوجد عدد غير قياسي) .

نفرض أن

$$W = (-\infty, z) \cap A \quad , \quad V = (z, \infty) \cap A$$

إذن V, W

مجموعتان مفتوحتان في A ،

$$V \cup W = A \text{ و } V \cap W = \varphi \quad , \quad V \neq \varphi \quad , \quad W \neq \varphi$$

حيث إن

$(-\infty, z), (z, \infty)$ مجموعتان مفتوحتان في R.

أي أن A مجموعة غير مترابطة ،

ومن ثم يمكن القول بأن أي مجموعة تحتوي على أكثر من عدد قياسي تكون

مجموعة غير مترابطة ،
وهذا يؤدي إلى أن كل مجموعة تحتوي على عدد قياسي واحد
هي مجموعة مترابطة .
أي أن مجموعة كل المجموعات التي تحتوي على عنصر واحد
من Q تمثل مركبات لـ Q .

نظرية:

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي فإن مجموعة مركبات X تشكل تجزيئا لـ X .

البرهان :

أولا :

نفرض أن $x \in X$ ، $\{A_x : x \in X\}$
مجموعة مركبات X (مجموعات جزئية مترابطة في X.)
والتي تحتوي كل منها على x.
إذن $X = \bigcup\{A_x : x \in X\}$.

ثانيا:

نفرض أن A,B مركبتين مختلفتين لـ X،
$A \cap B \neq \varphi$.
إذن $A \cup B$ مجموعة مترابطة .
بما أن Aمركبة لـ X
، $A \cup B$ مجموعة مترابطة تحتوي A
إذن
، $A = A \cup B$

ومن ثم فإن $A \subseteq B$.

وهذا تناقض لكون B مركبة لـ X.

إذن

$A \cap B = \varphi$ ،

ومن ثم فإن مجموعة مركبات X تشكل تجزيئا لـ X .

تمرين :

إذا كان

$$\tau = \{X, \varphi, \{b, c\}, \{a, d, e\}\}$$

تبولوجي معرف على

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

اوجد مركبات الفضاء التبولوجي X

حل التمرين :

إذا كان

$$\tau = \{X, \varphi, \{b,c\}, \{a,d,e\}\}$$

تبولوجي معرف على

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

اوجد مركبات الفضاء التبولوجي X

واضح أن $A=\{b,c\}$ مجموعه مترابطة

لأن $\tau_A = \{A, \varphi\}$

هو الفضاء غير المنفصل على A ،

ومن الواضح أيضا أن A مركبة لـ X .

بالمثل نجد أن $B=\{a,d,e\}$ مركبة لـ X ،

ومن ثم فإن A,B هما مركبتا X رغم ان (X, τ) فضاء غير مترابط

لأن A,B مجموعتان منفصلتان ،

$A \cup B = X$.