الدرس الأول
الفضاءات المترية
Metric spaces

تعريف :

نفرض أن X مجموعة غير خالية ، $\delta : X \times X \to R$ دالة حقيقية تحقق الشروط التالية :

$$(\delta_1)\ \delta(x,y) \geq 0 \quad , \ \forall\ x,y \in X$$
$$(\delta_2)\ \delta(x,y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y$$
$$(\delta_3)\ \delta(x,y) = \delta(y,x) \quad , \ \forall\ x,y \in X$$
$$(\delta_4)\ \delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \delta(x,z) \quad , \ \forall\ x,y,z \in X$$

تسمى δ عندئذ دالة مسافة أو دالة مترية أو مترك (metric) على X ، كما يسمى الزوج المرتب (X,δ) بالفضاء المتري .

مثال :

نفرض أن X مجموعة غير خالية ، $\delta : X \times X \to R$ دالة معرفة كالتالي:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x = y \\ 1 & \text{if} \quad x \neq y \end{cases}$$

هل δ دالة مترية ؟

الحل :

من تعريف δ نجد أن

$$\delta(x,y) \geq 0 \quad , \ \forall\ x,y \in X$$
$$\delta(x,x) = 0 \quad , \ \forall\ x \in X$$
$$\delta(x,y) = \delta(y,x) \quad , \ \forall\ x,y \in X$$

نفرض أن $x,y,z \in X$ فإنه يوجد لدينا ثلاث احتمالات :

$$a) \quad x = y = z \quad \Rightarrow \delta(x,y) + \delta(y,z) = 0 + 0 = \delta(x,z)$$
$$b) \ x = y , x \neq z \Rightarrow \delta(x,y) + \delta(y,z) = 0 + 1 = \delta(x,z)$$
$$c) \ x \neq y , x \neq z \Rightarrow \delta(x,y) + \delta(y,z) = 1 + 1 = 2 \geq \delta(x,z)$$

واضح من (a)،(b)،(c) أن $\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \delta(x,z)$
وبالتالي فإن δ تشكل دالة مترية على X . ويسمى (X,δ) الفضاء المتري المنقطع أو الواضح (Trivial metric).

مثال :

نفرض أن $\delta : R \times R \to R$ دالة معرفة كالتالي :
$$\delta(x,y) = |x-y| \quad , \ \forall\ x,y \in R$$
هل δ دالة مترية ؟

الحل :

من تعريف δ نجد أن :
$$\delta(x,y) = |x-y| \geq 0 \quad , \ \forall\ x,y \in R$$
$$\delta(x,y) = |x-x| = 0 \quad , \ \forall\ x \in R$$
$$\delta(x,y) = |x-y| = |y-x| = \delta(y,x) \quad , \ \forall\ x,y \in R$$

نفرض أن $x,y,z \in R$ إذن

$$\delta(x,y)+\delta(y,z)=|x-y|+|y-z| \geq |x-z|=\delta(x,z)$$

وبالتالي فإن δ دالة مترية على R وتسمى δ دالة القيمة المطلقة أو الدالة المترية العادية ، ويسمى (R,δ) بالفضاء المتري العادي .

مثال :

نفرض أن $\delta: R^2 \times R^2 \rightarrow R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

حيث $x=(x_1,y_1) \ , \ y=(x_2,y_2) \in R^2$

هل δ دالة مترية ؟

الحل :

من تعريف δ نجد أن

$$\delta(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \geq 0$$

$$\delta(x,x)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=0$$

$$\begin{aligned}\delta(x,y)&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=\delta(y,x)\end{aligned}$$

نفرض أن $x,y,z \in R^2$

حيث $x=(x_1,y_1) \ , \ y=(x_2,y_2) \ , \ z=(x_3,y_3) \in R^2$ إذن

$$\delta(x,y)+\delta(y,z)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$$
$$\geq\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}=\delta(x,z)$$

(وهذا يأتي من الهندسة المستوية حيث أن مجموع أي ضلعين في مثلث أكبر من الضلع الثالث).

وبالتالي فإن δ دالة مترية على R^2 وتسمى δ الدالة الأقليدية في المستوى الديكارتي ، ويسمى (R^2,δ) بالفضاء الاقليدي ذو البعد الثنائي .

مثال :

نفرض أن $\delta: R\times R\to R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad \forall\, x,y\in R$$

هل δ دالة مترية ؟

الحل :

واضح من تعريف δ أن

$$\delta(5,7)=5^2-7^2=25\text{-}49=\text{-}24 \quad <0$$

أي أن $\delta(x,y)=x^2-y^2\leq 0$ لبعض قيم $x,y\in R$. إذن δ لا تحقق δ_1 ومن ثم فإن δ ليست دالة مترية على R .

مثال :

نفرض أن $\delta : R \times R \to R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x, y) = \left| x^2 - y^2 \right| \quad , \quad \forall\; x,y \in R$$

هل δ دالة مترية ؟

الحل :

واضح من تعريف δ أن

$$\delta(5,-5) = \left|5^2 - (-5)^2\right| = |25\text{-}25| = 0$$

أي أن $\delta(x, y) = \left|x^2 - y^2\right| = 0$ لبعض قيم $x,y \in R$ المختلفة .

إذن δ لاتحقق δ_1 ومن ثم فإن δ ليست دالة مترية على R .

مثال :

نفرض أن $\delta : R \times R \to R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} x\text{-}y & \text{if} \quad x \ge y \\ 1 & \text{if} \quad x < y \end{cases} , \quad \forall\; x,y \in R$$

هل δ دالة مترية ؟

الحل :

واضح من تعريف δ أن

$$\delta(5,3) = 5 - 3 = 2 \quad , \quad \delta(3,5) = 1$$

أي أن $\delta(3,5) \ne \delta(5,3)$.

إذن δ لاتحقق δ_3 ومن ثم فإن

δ ليست دالة مترية على R .

المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة
Open sets and closed sets

تعريف :

نفرض أن (X,δ) فضاء متري، $x \in X$, $\varepsilon > 0$. ولنعرف المجموعة $N_\delta(x,\varepsilon) = \{y \in X : \delta(x,y) < \varepsilon\}$. تسمى $N_\delta(x,\varepsilon)$ كرة مفتوحة (Open sphere) مركزها x ونصف قطرها ε . كما أنها تسمى أحيانا جوار كروي .

ومن الواضح أن $N_\delta(x,\varepsilon)$ لا يمكن أن تكون خالية لاحتوائها على x . وتسمى المجموعة $N_\delta(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$ كرة محذوفة المركز ويرمز لها بالرمز $\hat{N}_\delta(x,\varepsilon)$.

مثال :

نفرض أن $\delta : R \times R \to R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y) = |x - y| \quad , \quad \forall\ x,y \in R$$

أوجد $N_\delta(0,2)$.

الحل :

من الواضح أن

$$N_\delta(0,2) = \{y \in R : \delta(0,y) = |0 - y| < 2\}$$
$$= \{y \in R : |y| < 2\} = \{y \in R : -2 < y < 2\}$$
$$= (-2,2)$$

مثال :

نفرض أن $\delta : R^2 \times R^2 \to R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

حيث $x = (x_1, y_1)\ ,\ y = (x_2, y_2) \in R^2$

أوجد $N_\delta((0,0),1)$.

الحل :

من الواضح أن

$$N_\delta((0,0),1) = \left\{(x,y) \in R^2 : \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in R^2 : (x-0)^2 + (y-0)^2 < 1\right\}$$

أي أن $N_\delta((0,0),1)$ هي مجموعة النقط الداخلية لدائرة الوحدة التي مركزها نقطة الأصل .

مثال :

إذا كانت $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\delta : X \times X \to R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \neq y \\ 0 & \text{if} \quad x = y \end{cases},\ \forall\, x,y \in X$$

أوجد $N_\delta(3,1.04)$, $N_\delta(2,1)$, $N_\delta(3,0.4)$.

الحل :

واضح من تعريف δ أن

$$N_\delta(3,0.4)=\{x\in X:\delta(3,x)<0.4\}$$
$$=\{x\in X:\delta(3,x)=0\}=\{3\}$$
$$N_\delta(2,1)\quad=\{x\in X:\delta(2,x)<1\}$$
$$=\{x\in X:\delta(2,x)=0\}=\{2\}$$
$$N_\delta(3,1.04)=\{x\in X:\delta(3,x)<1.04\}=X$$

تعريف :

نفرض أن (X,δ) فضاء متري ، $A\subseteq X$. نقول إن A مجموعة مفتوحة في (X,δ) ويرمز لذلك بالرمز $A\in\delta$ إذا كان لكل $x\in A$ توجد كرة مفتوحة مركزها x محتواه في A . أي أن :

$$A\in\delta\Leftrightarrow\forall\ x\in A\ ,\ \exists\, N_\delta(x,\varepsilon)\subseteq A$$

مثال :

نفرض أن (R,δ) هو الفضاء العادي المعرف كالتالي :

$$\delta(x,y)=|x-y|\quad,\quad\forall\ x,y\in R$$

فأي من المجموعات التالية (b,c),$[b,c)$,$(b,c]$,$\{a\}$ مجموعة مفتوحة ؟

الحل :

واضح أن $\{a\}$ ليست مجموعة مفتوحة لأنه أيا كان العدد $\varepsilon>0$ فإن $N_\delta(a,\varepsilon)\not\subseteq\{a\}$.

أيضا $(b,c]$ ليست مجموعة مفتوحة لأن كل كرة مفتوحة مركزها c تحتوي على أعداد أكبر من c .

أي أن لكل $\varepsilon > 0$ يكون $N_\delta(c,\varepsilon) \not\subseteq (b,c]$.

بالمثل نجد أن $(b.c]$ ليست مجموعة مفتوحة .

ولكن (b,c) مجموعة مفتوحة لأن لكل $x \in (b,c)$ توجد $N_\delta(x,\varepsilon) = (b,c)$ محتواة في (b,c) .

نظرية :

إذا كان (X,δ) فضاء متري فإن :

$$(1) X, \varphi \in \delta,$$

$$(2) \bigcup_{s\in S} A_s \in \delta \quad , \forall A_s \in \delta$$

$$(3) A_1 \cap A_2 \in \delta \ , \forall A_1, A_2 \in \delta$$

أي أن

(١) δ تحتوي المجموعتين X,φ .

(٢) اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة في δ يكون مجموعة مفتوحة في δ .

(٣) تقاطع أي عدد منته من المجموعات المفتوحة في δ يكون مجموعة مفتوحة في δ .

البرهان :

(١) واضح أن $X, \varphi \in \delta$ لأن φ لا تحتوي على أي عنصر ، وإذا فرضنا جدلا أن φ ليست مجموعة مفتوحة إذن يوجد $x \in \varphi$ بحيث إن أي كرة مفتوحة مركزها x لا يمكن أن تحتوي داخل φ ،
ومن ثم فإن φ ليست خالية ، وهذا يناقض فرضنا .
أي أن φ مجموعة مفتوحة .

وكذلك X مجموعة مفتوحة لأنه إذا كان $x \in X$ فإن أي كرة مفتوحة مركزها x تحتوي داخل X .

(١) نفرض أن $\{A_s \in \delta : s \in S\}$ مجموعة من المجموعات المفتوحة في (X,δ) والمطلوب إثبات أن $W = \bigcup_{s\in S} A_s \in \delta$

. نفرض أن $x \in W$ إذن توجد $s \in S$ بحيث أن $x \in A_s$.

وبما أن $A_s \in \delta$ إذن يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن

$N_\delta(x,\varepsilon) \subseteq A_s$ ،

ومن ثم فإن $N_\delta(x,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{s\in S} A_s = W$.

أي أن $W = \bigcup_{s\in S} A_s \in \delta$.

(٢) نفرض أن $A_1, A_2 \in \delta$ والمطلوب إثبات أن $A_1 \cap A_2 \in \delta$.

نفرض أن $x \in A_1 \cap A_2$ إذن $x \in A_2$, $x \in A_1$.

وبما أن $A_1, A_2 \in \delta$ إذن يوجد

$\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ بحيث أن

$N_\delta(x,\varepsilon_2) \subseteq A_2$, $N_\delta(x,\varepsilon_1) \subseteq A_1$ ،

ومن ثم فإن $N_\delta(x,\varepsilon) \subseteq A_2$, $N_\delta(x,\varepsilon) \subseteq A_1$

حيث $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

إذن $N_\delta(x,\varepsilon) \subseteq A_1 \cap A_2$.

أي أن $A_1 \cap A_2 \in \delta$.

تنويه : المجموعات المفتوحة في أي فضاء متري (X,δ) تشكل تبولوجي على X . ويسمى هذا الفضاء فضاء تبولوجي متري ويسمى δ مولد لذلك الفضاء التبولوجي .

نظرية :

إذا كان (X,δ) فضاء متري ، $N_\delta(x,\varepsilon)$ كرة مركزها x ونصف قطرها ε، $y \in N_\delta(x,\varepsilon)$ فإنه توجد كرة مفتوحة $N_\delta(y,\varepsilon')$ بحيث أن

$$N_\delta(y,\varepsilon') \subseteq N_\delta(x,\varepsilon).$$

أي أنه إذا كانت $N_\delta(x,\varepsilon)$ كرة مفتوحة في (X,δ) فهي مجموعة مفتوحة .

البرهان :

نفرض أن (X,δ) فضاء متري ، $y \in N_\delta(x,\varepsilon)$ إذن

$$\delta(x,y) < \varepsilon.$$

لنفرض أن $\varepsilon' = \varepsilon - \delta(x,y) > 0$, $N_\delta(y,\varepsilon')$ كرة مفتوحة مركزها y ونصف قطرها ε'

والمطلوب إثبات أن $N_\delta(y,\varepsilon') \subseteq N_\delta(x,\varepsilon)$.

نفرض أن $z \in N_\delta(y,\varepsilon')$ إذن

$$\delta(y,z) < \varepsilon' = \varepsilon - \delta(x,y).$$

أي أن

$$\delta(x,y) + \delta(y,z) < \varepsilon$$

وبما أن .

$$\delta(x,z) \le \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

إذن $\delta(x,z) < \varepsilon$ ،

ومن ثم فإن $z \in N_\delta(x,\varepsilon)$.

أي أن $N_\delta(y,\varepsilon') \subseteq N_\delta(x,\varepsilon)$.

نظرية :

إذا كان $N_\delta(x_1,\varepsilon_1), N_\delta(x_2,\varepsilon_2)$ كرتين مفتوحتين في الفضاء المتري (X,δ)، $y \in N_\delta(x_1,\varepsilon_1) \cap N_\delta(x_2,\varepsilon_2)$ فإنه توجد كرة مفتوحة $N_\delta(y,\varepsilon)$ بحيث أن

$$N_\delta(y,\varepsilon) \subseteq N_\delta(x_1,\varepsilon_1) \cap N_\delta(x_2,\varepsilon_2)$$

البرهان :

نفرض أن $y \in N_\delta(x_1,\varepsilon_1) \cap N_\delta(x_2,\varepsilon_2)$ إذن

$y \in N_\delta(x_1,\varepsilon_1)$ ، $y \in N_\delta(x_2,\varepsilon_2)$،

ومن ثم فإنه توجد كرتان مفتوحتان

$$N_\delta(y,\varepsilon_4), N_\delta(y,\varepsilon_3)$$

بحيث إن

$$N_\delta(y,\varepsilon_4) \subseteq N_\delta(x_1,\varepsilon_2) \text{،} N_\delta(y,\varepsilon_3) \subseteq N_\delta(x_1,\varepsilon_1)$$

فإذا كان $\varepsilon = \min(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ فإن .

$N_\delta(y,\varepsilon) \subseteq N_\delta(x_1,\varepsilon_1) \cap N_\delta(x_2,\varepsilon_2)$.

سؤال :

هل تقاطع كرتين مفتوحتين هو كرة مفتوحة ؟

الحل :

لا ، ففي الفراغ المتري المتقطع $\delta : X \times X \to R$

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \neq y \\ 0 & \text{if} \quad x = y \end{cases}, \ \forall\, x,y \in X$$

وحيث أن

$$N_\delta(2,0.5)=\{2\}$$

$$N_\delta(3,0.5)=\{3\}$$

فإن

$$\{2\}\cap\{3\}=\varphi$$

وهذه ليست كرة مفتوحة لعدم وجود مركز لها .

نظرية :

إذا كان (X,δ) فضاء متري فإن مجموعة الكرات المفتوحة في (X,δ)تشكل اساسا لتبولوجي على X.

نظرية:

إذا كان (X,δ) فضاء متري فإن A تكون مجموعة مفتوحة إذا وإذا كان فقط أمكن كتابة A اتحاد لمجموعة الكرات المفتوحة في (X,δ) .

تعريف :

إذا كان (X,δ) فضاء متري، . تسمى كل مجموعة مفتوحة تحتوي على x جوار للعنصر x ، ومن ثم فإن كل مجموعة مفتوحة في (X,δ)تكون جوار لكل نقاطها .

نظرية:

إذا كان (X,δ) فضاء متري، $x\in X$، A جوار لـ x فإنه توجد كرة مفتوحة $N_\delta(x,\varepsilon)$ محتواة في A .

نظرية :

إذا كان (X,δ) فضاء متري فإن :

(١) X,φ مجموعتان مغلقتان .

(٢) اتحاد أي عدد منته من المجموعات المغلقة في (X,δ) يكون مجموعة مغلقة .

(٣) تقاطع أي عدد منته من المجموعات المغلقة في (X,δ) يكون مجموعة مغلقة .

تعريف :

نفرض أن (X,δ) فضاء متري، $\varepsilon > 0,\ x \in X$. ونعرف المجموعة $M_\delta(x,\varepsilon) = \{y \in X : \delta(x,y) < \varepsilon\}$. تسمى $M_\delta(x,\varepsilon)$ كرة مغلقة مركزها x ونصف قطرها ε.

ومن الواضح أن $M_\delta(x,\varepsilon)$ لا يمكن أن تكون خالية لاحتوائها على x . وإذا كانت $\varepsilon = 0$ فإن $M_\delta(x,\varepsilon) = \{x\}$.

نظرية :

إذا كان (X,δ) فضاء متري فإن كل كرة مغلقة في (X,δ) هي مجموعة مغلقة .

نتيجة :

كل فراغ متري هو فراغ تبولوجي لكن العكس غير صحيح .

مثال توضيحي :

$\{X,\varphi\}$ هو تبولوجي ولكن ليس متري
(لا يوجد متري يولده)

سؤال :

حدد ما إذا كانت أي مجموعة منتهية من (R,δ) مغلقة أم لا ؟
حيث (R,δ) هو المتري المعتاد .

الحل :

لتكن $A \subseteq R$ مجموعة منتهية إذن

$$A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

لكل $x \in R$

$$\delta(x,y_1), \delta(x,y_2), \dots\dots, \delta(x,y_i)$$

$$\delta(x,y_i) = \varepsilon_i$$

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}$$

$$N(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} = \varphi$$

$$\therefore d(A) = \varphi$$

إذن x ليست نقطة نهاية لـ A .

و A مجموعة مغلقة لأن $\varphi \subseteq A$.

ملاحظة :

المجموعة المنتهية من المتري المعتاد هي مجموعة مغلقة وأي مجموعة جزئية من R منتهية هي مجموعة مغلقة .

تمارين

(١) هل كل مجموعة مغلقة هي مجموعة منتهية ؟

(2) في الفضاء المتري المتقطع $N(x,\varepsilon)$ هل $\overline{N(x,\varepsilon)}$ هو الكرة المغلقة $N[x,\varepsilon]$؟

(3) في الفراغ المتري المتقطع كل مجموعة وحيدة العنصر مفتوحة أم لا ؟

حل التمارين

(1) هل كل مجموعة مغلقة هي مجموعة منتهية ؟

الحل :

لا ، مثال يثبت ذلك Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) مغلقة ولكنها ليست منتهية .

(2) في الفضاء المتري المتقطع $N(x,\varepsilon)$ هل $\overline{N(x,\varepsilon)}$ هو الكرة المغلقة $N[x,\varepsilon]$ ؟

الحل :

لا في الفراغ المتري المتقطع

$$N(x,1)=\{x\}$$

$$\overline{N(x,1)}=\overline{\{x\}}=\{x\}$$

لأن $\{x\}$ مغلقة .

وحيث أن $N[x,\varepsilon]=X$

نلاحظ أن $x\neq X$

وهذا يثبت خطأ العبارة .

(3) في الفراغ المتري المتقطع كل مجموعة وحيدة العنصر مفتوحة أم لا ؟

الحل :

نعم . لأي $x\in X$

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad x\neq y\\ 0 & \text{if} \quad x=y\end{cases}$$

$$N(x,\varepsilon)=\{x\}$$

بشرط $0<\varepsilon<1$

إذن هي كرة مفتوحة وبالتالي مجموعة مفتوحة .

الدرس الثاني

الدوال المتصلة و التكافؤ التبولوجي في الفضاءات المترية

Continuous function and Homeomorphism in metric spaces

تعريف :

إذا كانت $f:(X,\delta)\to(Y,\sigma)$ دالة من الفضاء المتري (X,δ) إلى الفضاء المتري (Y,σ) فإننا نقول إن f دالة متصلة (مستمرة) (Continuous function) عند النقطة $x_0\in X$ إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\alpha>0$ بحيث أنه إذا كان $x\in X$، $x\in N_\delta(x_0,\alpha)$ فإن $f(x)\in N_\sigma(f(x_0),\alpha)$.

أي أن f دالة متصلة عند النقطة $x_0\in X$ إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\alpha>0$ بحيث أنه إذا كان $x\in X\ ,\ \delta(x,x_0)<\alpha$ فإن $\sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

ويقال أن $f:(X,\delta)\to(Y,\sigma)$ دالة متصلة على X إذا كانت متصلة عند كل $x\in X$.

مثال :

إذا كانت $f:(R,\delta)\to(R^2,\sigma)$ دالة من الفضاء العادي (R,δ) إلى الفضاء الأقليدي ثنائي البعد (R^2,σ) معرفة كالتالي :

$$f(x)=(x,x)\qquad\forall\ x\in R$$

فهل f دالة متصلة ؟

الحل :

نفرض أن $z \in R$ وأن $\varepsilon > 0$. بوضع $\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$. فإذا كان

$\delta(x,z) = |x - z| < \alpha$ فإن

$$\sigma(f(x), f(z)) = \sigma((x,x),(z,z)) = \sqrt{(x-z)^2 + (x-z)^2}$$

$$\leq \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2}$$

$$\leq \sqrt{2}\alpha = \sqrt{2}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon$$

إذن f دالة متصلة .

مثال :

إذا كانت $f : (R,\delta) \to (R,\sigma)$ الدالة المحايدة من الفضاء العادي (X,δ) إلى الفضاء المنقطع (Y,σ) المعرف كالتالي:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \neq y \\ 0 & \text{if} \quad x = y \end{cases}$$

فهل f دالة متصلة ؟

الحل :

نفرض أن f دالة متصلة $\varepsilon = 1$ ، $x \neq y$، إذن يوجد $\alpha > 0$ بحيث أنه إذا كان $\delta(x,y) < \alpha$ فإن

$\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon = 1$ ،

وهذا يؤدي إلى أن

$\sigma(x,y) < 1$ حيث إن $f(x)=x$

لكل $x \in R$. إذن $x=y$ وهذا يؤدي إلى تناقض .

أي أن f دالة ليست متصلة.

تعريف :

إذا كانت $f:(X,\delta)\rightarrow(Y,\sigma)$ دالة تناظر أحادي (تقابلية) من الفضاء المتري (X,δ)إلى الفضاء المتري (Y,σ) وكان كل من f,f^{-1} دالة متصلة فإن f تسمى هوميومورفيزما أو دالة تبولوجية ويسمى الفضاءان (X,δ)، (Y,σ) هوميومورفيان أو متكافئان تبولوجياً .

مثال :

إذا كانت $f:(X,\delta)\rightarrow(Y,\sigma)$ دالة فوقية من الفضاء المتري (X,δ) إلى الفضاء المتري (Y,σ) بحيث أن

$$\delta(x,y)=m\sigma(f(x),f(y))$$

لكل $x\in X$. فهل f دالة تبولوجية ؟

الحل :

واضح أن f دالة أحادية ، لأنه إذا كان $f(x)=f(y)$ فإن

$\sigma(f(x),f(y))=0$ ،

ومن ثم فإن

$m\sigma(f(x),f(y))=0$ ، وهذا يؤدي إلى أن

$\delta(x,y)=0$. أي أن $x=y$.

بما أن f دالة فوقية وأحادية فإن f دالة تقابلية .

والآن نحاول إثبات أن كلا من f,f^{-1} متصلة .

نفرض أن $x \in X$، $\varepsilon > 0$. بوضع $\alpha = m\varepsilon$. فإذا كان $\delta(x,y) < \alpha$ فإن

$$\sigma(f(x),f(y)) = \frac{1}{m}\delta(x,y) < \frac{1}{m}\alpha = \frac{1}{m}m\varepsilon = \varepsilon \, .$$

أي أن f دالة المتصلة . وبالمثل نفرض $y \in Y$، $\varepsilon > 0$. وبإختيار $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{m}$.

فإذا كان $\sigma(y,z) < \alpha$ فإن

$$\delta(f^{-1}(y),f^{-1}(z)) = m\sigma(y,z) < m\alpha = m\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$$

أي أن f^{-1} دالة متصلة . وبما أن f دالة تقابلية وأن كلا من f,f^{-1} دالة متصلة .

إذن f دالة تبولوجية .

نظرية :

إذا كانت $f:(X,\delta) \to (Y,\sigma)$ دالة من الفضاء المتري (X,δ) إلى الفضاء المتري (Y,σ) فإن f تكون متصلة عند النقطة $x_0 \in X$ إذا وإذا كان فقط لكل كرة مفتوحة $N_\sigma(f(x_0),\varepsilon)$ مركزها $f(x_0) \in Y$

توجد كرة مفتوحة $N_\delta(x_0,\alpha)$ مركزها $x_0 \in X$ بحيث إن

$$f(N_\delta(x_0,\alpha)) \subseteq N_\sigma(f(x_0),\varepsilon)$$

البرهان :

أولا : نفرض أن f دالة متصلة عند $x_0 \in X$ إذن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\alpha > 0$ بحيث أنه إذا كان $x \in X \, , \ \delta(x,x_0) < \alpha$ فإن

، $\sigma\left(f(x),f(x_0)\right)<\varepsilon$

وهذا يؤدي إلى أنه إذا كان $x\in N_\delta(x_0,\alpha)$ فإن

$f(x)\in N_\sigma\left(f(x_0),\varepsilon\right)$،

ومن ثم فإن $f\left(N_\delta(x_0,\alpha)\right)\subseteq N_\sigma\left(f(x_0),\varepsilon\right)$.

ثانيا : نفرض أن لكل كرة مفتوحة $N_\sigma\left(f(x_0),\varepsilon\right)$ مركزها

$f(x_0)\in Y$

توجد كرة مفتوحة $N_\delta(x_0,\alpha)$ مركزها $x_0\in X$ بحيث إن

، $f\left(N_\delta(x_0,\alpha)\right)\subseteq N_\sigma\left(f(x_0),\varepsilon\right)$

وهذا يؤدي إلى أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\alpha>0$ بحيث إن لكل

$x\in N_\delta(x_0,\alpha)$ فإن

$f(x)\in N_\sigma\left(f(x_0),\varepsilon\right)$.

أي أن لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\alpha>0$ بحيث أنه إذا كان

$\delta(x,x_0)<\alpha$ فإن

$\sigma\left(f(x),f(x_0)\right)<\varepsilon$.

وهذا يؤدي إلى أن f متصلة .

نظرية :

إذا كانت $f:(X,\delta)\to(Y,\sigma)$ دالة من الفضاء المتري (X,δ) إلى الفضاء المتري (Y,σ) فإن f تكون متصلة إذا وإذا كان فقط لكل $x\in X$ جوار W لـ $f(x)$ يوجد جوار V لـ x بحيث إن $f(V)\subseteq W$.

البرهان :

أولا : نفرض أن f دالة متصلة ، $x \in X$، W جوار لـ f(x) . إذن توجد كرة مفتوحة $N_\sigma(f(x),\varepsilon)$ بحيث أن
$N_\sigma(f(x),\varepsilon) \subseteq W$.
بما أن f دالة متصلة إذن توجد كرة مفتوحة $N_\delta(x,\alpha)$ بحيث إن
$f(N_\delta(x,\alpha)) \subseteq N_\sigma(f(x),\varepsilon)$ ،
وهذا يؤدي إلى أنه يوجد جوار $V = N_\delta(x,\alpha)$ بحيث إن
$f(V) \subseteq W$.

ثانيا : نفرض أن $N_\sigma(f(x),\varepsilon)$ كرة مفتوحة في Y إذن
$N_\sigma(f(x),\varepsilon)$ جوار لـ f(x)
ومن ثم فإنه يوجد جوار V لـ x بحيث أن
$f(V) \subseteq N_\sigma(f(x),\varepsilon)$.
بما أن V جوار لـ x إذن V مجموعة مفتوحة تحتوي على x ،
ومن ثم فإنه توجد كرة مفتوحة $N_\delta(x,\alpha)$ بحيث
$N_\delta(x,\alpha) \subseteq V$ ،
وهذا يؤدي إلى أن
$f(N_\delta(x,\alpha)) \subseteq f(V) \subseteq N_\sigma(f(x),\varepsilon)$.
أي أن f دالة متصلة .

نظرية :

إذا كانت $f:(X,\delta) \to (Y,\sigma)$ دالة من الفضاء المتري (X,δ) إلى الفضاء المتري (Y,σ) فإن f تكون متصلة إذا وإذا كان فقط الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مفتوحة في (Y,σ) تكون مجموعة مفتوحة في (X,δ) . أي أن

$f^{-1}(W) \in \delta$ لكل $W \in \sigma$.

البرهان :

أولا : نفرض أن f دالة متصلة ، W مجموعة مفتوحة في (Y, σ) .

ونحاول إثبات أن $f^{-1}(W)$ مجموعة مفتوحة في (X, δ)

نفرض أن $x \in f^{-1}(W)$ إذن

$f(x) \in W$ ،

ومن ثم فإنه توجد كرة مفتوحة $N_\sigma(f(x), \varepsilon)$ بحيث إن

$N_\sigma(f(x), \varepsilon) \subseteq W$.

بما أن f دالة متصلة فإنه توجد كرة مفتوحة $N_\delta(x, \alpha)$ بحيث أن

$f(N_\delta(x, \alpha)) \subseteq N_\sigma(f(x), \varepsilon)$.

أي أن $f(N_\delta(x, \alpha)) \subseteq W$ ،

ومن ثم فإن $N_\delta(x, \alpha) \subseteq f^{-1}(W)$.

أي أن لكل $x \in f^{-1}(W)$ توجد كرة مفتوحة $N_\delta(x, \alpha)$ بحيث إن

$N_\delta(x, \alpha) \subseteq f^{-1}(W)$.

إذن $f^{-1}(W)$ مجموعة مفتوحة .

ثانيا : نفرض أن $x \in X$ ، $N_\sigma(f(x), \varepsilon)$ كرة مفتوحة في Y . إذن

$N_\sigma(f(x), \varepsilon)$ مجموعة مفتوحة في Y ، ومن ثم فإن

$f^{-1}(N_\sigma(f(x), \varepsilon))$ مجموعة مفتوحة في X تحتوي على x ،

وهذا يؤدي إلى أنه توجد كرة مفتوحة $N_\delta(x, \alpha)$ بحيث إن

$N_\delta(x, \alpha) \subseteq f^{-1}(N_\sigma(f(x), \varepsilon))$.

أي أن

$f\left(N_{\delta}(x,\alpha)\right) \subseteq N_{\sigma}\left(f(x),\varepsilon\right)$.

إذن f دالة متصلة عند x .

وبما أن x نقطة اختيارية في X إذن f دالة متصلة .

تعريف الفضاء المتري المحدود :

يقال أن الفضاء المتري (X,δ) محدود (Bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث أن $0 \le \delta(x,y) \le k \quad , \forall\ x,y \in X$

وخلاف ذلك يقال أن (X,δ) فضاء متري غير محدود

(Un bounded metric space)

مثال :

لنفرض أن (X,δ) فضاء متري ، ونعرف الدالة $S^{*} : X \times X \to R$ على النحو التالي :

$$S^{*}(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)} \quad , \ , \forall\ x,y \in X$$

اثبت أن (X,δ^{*}) يمثل فضاء متري ثم بين ما إذا كان الفضاء محدود أم لا ؟

الحل :

حيث أن $\delta(x,y) > 0$ فإن $1+\delta(x,y) > 0$

وبالتالي $S^{*}(x,y) \ge 0$

ونجد أنه إذا كان $S^{*}(x,y) = 0$ فإن $\delta(x,y) = 0$ وبالتالي x=y

أما إذا كان x=y فإن $\delta(x,y) = 0$ وبالتالي $S^{*}(x,y) = 0$

$$S^*(x,y)=\frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}=\frac{\delta(y,x)}{1+\delta(y,x)}=S^*(y,x)$$

$$S^*(x,y)+S^*(y,z)=\frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}+\frac{\delta(y,z)}{1+\delta(y,z)}$$

$$\geq\frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)+\delta(y,z)}+\frac{\delta(y,z)}{1+\delta(y,z)+\delta(x,y)}$$

$$=\frac{\delta(x,y)+\delta(y,z)}{1+\delta(x,y)+\delta(y,z)}=\frac{1}{\frac{1}{\delta(x,y)+\delta(y,z)}+1}$$

$$\therefore S^*(x,y)+S^*(y,z)\geq\frac{1}{\frac{1}{\delta(x,z)}+1}=\frac{\delta(x,z)}{1+\delta(x,z)}=S^*(x,z)$$

إذن (X,δ^*) فضاء متري

من تعريف المتري نجد أن

$$S^*(x,y)=\frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}<1 \quad , \; , \forall\ x,y\in X$$

شبه متريه لكنها ليست مترية وعليه نجد أن $0\leq S^*(x,y)<1$

إذن (X,δ^*) هو فضاء محدود .

تعريف المسافة بين نقطة ومجموعة ، والمسافة بين مجموعتين :

ليكن (X,δ) فضاء متري ، $A,B\subseteq X$ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X ولنفرض أن $p\in X$

نعرف المسافة بين $\{p\}$ والمجموعة الجزئية $A \subseteq X$ والتي يرمز لها بالرمز $D(\{p\},A)$ كما يلي :

$$D(\{p\},A)=\inf\{d(p,x):x\in A\}$$

أي أنها أكبر حد سفلي للمسافات الناتجة من بعد النقطة p عن نقاط المجموعة A .

وتعرف المسافة بين مجموعتين A,B (between two sets (Distance

والتي يرمز لها بالرمز $D(A,B)$ كما يلي :

$$D(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A\ ,\ y\in B\}$$

أي أنها أكبر حد سفلي للمسافات الناتجة من بعد نقاط المجموعة A عن نقاط المجموعة B

مثال :

ليكن (R,d) الفضاء المعتاد على R ، وإذا كانت
$A=[-1,2]$, $B=[3,4]$, $C=[1,3]$,$F=(1,2)$,$E=(2,3]$

(i) أوجد $D(A,B)$
(ii) أوجد $D(A,C)$
(iii) أوجد $D(F,E)$

الحل :

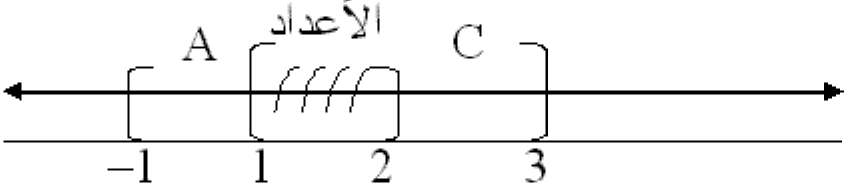
(i) لإيجاد $D(A,B)$ نجد أن المجموعتين A,B على خط الأعداد كما يلي :

واضح أن $A\cap B=\varphi$

ونجد أنه لأي $a \in A\ ,\ b \in B$

$$d(2,3) < d(a,b) < d(-1,4)$$
$$1 < d(a,b) < 5$$
$$\therefore D(A,B) = \inf\{x : x \in (1,5)\} = 1$$

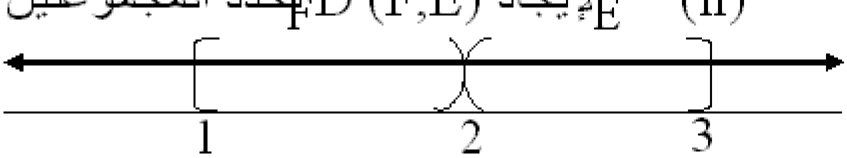
(i) لإيجاد D (A,C) نحدد المجموعتين على خط الأعداد



نجد أن $A \cap C = \{1,2\}$ ، واضح من الشكل أنه لأي
$a \in A\ ,\ c \in C$

$$0 < d(a,c) < d(3,-1)$$
$$0 < d(a,c) < 4$$
$$\therefore D(A,C) = \inf\{x : x \in [0,4]\} = 0$$

(ii) لإيجاد D (F,E) نحدد المجموعتين



واضح أن $F \cap E = \varphi$

ونجد أنه لأي $f \in F \, , \, e \in E$

$$d(2,2) < d(f,e) < d(1,3)$$
$$0 < d(f,e) < 2$$
$$\therefore D(F,E) = \inf\{x : x \in (0,2)\} = 0$$

مثال :

لتكن $X = \{-1,0,1,2\}$ ولنعرف متري $X \times X \to R$ له بالصورة :
$\delta(x,y) = |x-y|$ لكل $x, y \in X$ إذا كانت $A = \{0,1\}$
أوجد

$(i) D(\{-1\}, A)$
$(ii) D(\{0\}, A)$

الحل :

(i) من التعريف

$$D(\{-1\}, A) = \inf\{d(-1,a) : a \in A\}$$
$$d(-1,0) = |-1-0| = 1$$
$$d(-1,1) = |-1-1| = 2$$
$$\therefore D(\{-1\}, A) = \inf\{1,2\} = 1$$

(ii) من التعريف

$$D(\{0\},A)=\inf\{d(0,a):a\in A\}$$
$$d(0,0)=|0-0|=0$$
$$d(0,1)=|0-1|=1$$
$$\therefore D(\{0\},A)=\inf\{0,1\}=0$$

تنويه :

$$D(\{x\},A)=\begin{cases}0 & , x\in A\\ 1 & , x\notin A\end{cases}$$

مثال :

في الفضاء المتري المتقطع $\delta: X\times X\to R$ اوجد المسافة بين أي مجموعتين غير خاليتين من X والمسافة بين مجموعة $A\subseteq X$ ، والنقطة $p\in X$ ؟

الحل :

(١) المسافة بين المجموعتين $D\ (A,B)$ نلاحظ أن

$$D(A,B)=\begin{cases}1 & , A\cap B=\varphi\\ 0 & , A\cap B\neq\varphi\end{cases}$$

(٢) المسافة بين مجموعة A ونقطة p

$$D(\{p\},A)=\begin{cases}0 & , p\in A\\ 1 & , p\notin A\end{cases}$$

مثال :

إذا كانت $a=(-2,1)$, $b=(3,4)$ نقطتان في R^2 احسب المسافة بين a,b في كل الفضاءات المترية الآتية :

(١) بالنسبة للفضاء المتري المعتاد على R^2

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \sqrt{(-2-3)^2+(1-4)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \end{aligned}$$

(٢) بالنسبة لـ Taxicap metric

$$\begin{aligned} d(a,b) &= |x_1-x_2|+|y_1-y_2| \\ &= |-2-3|+|4-1| \\ &= 5+3=8 \end{aligned}$$

(٣) بالنسبة لـ max metric

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\} \\ &= \max\ \{|-2-3|+|1-4|\} \\ &= \max\ \{5,3\}=5 \end{aligned}$$

(٤) بالنسبة للفضاء المتقطع

$$d(a,b)=\begin{cases}1 & , a \neq b \\ 0 & , a=b\end{cases}$$

$$\therefore d(a,b)=1$$

تعريف قطر المجموعة والمجموعة المحدودة :

يعرف قطر المجموعة A (diameter) الذي يرمز له بالرمز $\delta(A)$ كما يلي :

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

وهذا يعني أنه اصغر حد علوي (Lower upper bound) للمسافات بين نقاط A

وتسمى المجموعة A محدودة إذا كانت $\delta(A)<\infty$

وتسمى غير محدودة إذا كان $\delta(A)=\infty$

مثال :

في الفضاء المتري المعتاد إذا كانت $A=[3,10)$,$B=[3,7]$,$C=[3,5)$, $H=\{0,1,2,3,\ldots\}$

حدد أي من هذه المجموعات محدودة .

الحل :

نوجد أولا القطر للمجموعة المراد دراستها

لأي $x,y\in A$ نجد أن

$$0<d(x,y)<d(10,3)$$

$$0<d(x,y)<7$$

$$\therefore \delta(A)=\sup\{x:x\in[0,7]\}=7$$

$\delta(A)<\infty$ ، بالتالي A مجموعة محدودة .

لأي $x,y\in B$ نجد

$$0 < d(x,y) < |7-3|$$
$$0 < d(x,y) < 4$$
$$\therefore \delta(B) = \sup\{x : x \in [0,4]\} = 4$$

$\delta(B) < \infty$ ، وبالتالي B مجموعة محدودة .

لأي $x, y \in C$ نجد

$$0 < d(x,y) < 2$$
$$\therefore \delta(C) = \sup\{x : x \in [0,2]\} = 2$$

$\delta(C) < \infty$ ، بالتالي C مجموعة محدودة .
لأي $x, y \in H$ نجد أن

$$\delta(H) = \sup\{d(x,y) : x, y \in H\}$$
$$0 < d(x,y) < \infty$$

$\delta(H) = \infty$ ، وبالتالي H مجموعة غير محدودة .

مثال :

ليكن $X=\{3,4,5,6,7,9\}$ مجموعة معرف عليها المتري المتقطع
أوجد $\delta(A), \delta(B)$ إذا كانت $B=\{5\}$, $A=\{4,6\}$؟

الحل :

لإيجاد $\delta(A)$ نحدد المسافة بين جميع عناصر A وتصاغ على النحو التالي:

	4	6
4	0	1
6	1	0

وبذلك نجد أن

$$\delta(A) = \sup\{0,1\} = 1$$

لإيجاد $\delta(B)$ نحدد المسافة بين عناصر B وهي مساوية للصفر .

إذن

$$\delta(B) = \sup\{0\} = 0$$

التمارين

(١) إذا كان $x,y \in R$ ، δ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y) = |3x - 2y|$$

فهل δ تمثل دالة مترية ؟

(٢) إذا كانت $X=\{1,2,3,4,5\}$ ، $\delta : X \times X \rightarrow R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 3 & \text{if} \quad x \neq y \\ 0 & \text{if} \quad x = y \end{cases} \qquad \forall x,y \in R$$

فهل δ تمثل دالة مترية ؟

(٣) إذا كان $x,y \in R$ ، δ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y) = \max(1, \delta(x,y))$$

فهل δ تمثل دالة مترية ؟

حل التمارين

(١) إذا كان $x, y \in R$ ، $\delta : R \times R \to R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x, y) = |3x - 2y|$$

فهل δ تمثل دالة مترية ؟

الحل :

ليست مترية لأن

$$\delta(2,1) = |4 - 3| = 1$$

$$\delta(1,2) = |2 - 6| = 4$$

$$\delta(2,1) \neq \delta(1,2)$$

(٢) إذا كانت $X=\{1,2,3,4,5\}$ ، $\delta : X \times X \to R$ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 3 & \text{if} \quad x \neq y \\ 0 & \text{if} \quad x = y \end{cases} \qquad \forall x, y \in R$$

فهل δ تمثل دالة مترية ؟

الحل :

$$\delta(x, y) \geq 0 \quad , \quad \delta(x, x) = 0$$

نفرض $x \neq y$ فإن

$$\delta(x,y)=3=\delta(y,x)$$
$$\delta(x,z)\le \delta(x,y)+\delta(y,z)$$

هذه العلاقة متحققة ماعدا في حالة :

$$\delta(x,z)=3 \quad , \quad \delta(x,y)=0 \quad , \quad \delta(y,z)=0$$

و هذا يترتب عليه أن :

$$\delta(x,z)=3 \neq 0+0=\delta(x,y)+\delta(y,z)$$

و هذا الإحتمال لا وجود له لأن

$$\left.\begin{array}{l}\delta(x,y)=0\rightarrow x=y\\ \delta(y,z)=0\rightarrow y=z\end{array}\right\}\rightarrow x=z$$

(١) إذا كان $x,y\in R$ ، δ دالة معرفة كالتالي :

$$\delta(x,y)=\max(1,\delta(x,y))$$

فهل δ تمثل دالة مترية ؟

الحل :

الدالة ليست مترية حيث $\delta(x,y)\ge 1$

أي لا تساوي الصفر أبدا

$$\delta(x,x)=\max(1,\delta(x,x))=\max(1,0)=1$$

الدرس الثالث

مسلمات الفصل
Separation Axioms

الفضاء- T_0:

T_0-Space or Kolmogorff

تعريف :

يسمى الفضاء (X,τ) فضاء- T_0 إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall\, x,y \in X\,,\, x \neq y,\ \exists\, U \in \tau : x \in U,\ y \notin U \ \text{or}\ \ y \in U, x \notin U$$

أي أن لكل نقطتين مختلفتين x , y في X توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحداهما ولا تحتوي على الأخرى .

التعريف بلغة الجوارات :

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون T_0 إذا وفقط إذا كان لكل نقطتين مختلفتين يوجد جوار لأحدهما لا يحوي النقطة الأخرى .

مثال:
بفرض أن

$$X = \{a,b,c\}$$

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}\}$$

هل (X,τ) فضاء - T_0؟

الحل :

(X,τ) فضاء T_0،
لأنه من أجل $a,b \in X$ توجد $\tau \in \{a\}$ بحيث أن $b \notin \{a\}$. كذلك
من أجل $a,c \in X$ توجد $a \in \{a\}, c \notin \{a\}$ وأخيرا من أجل
$b,c \in X$ توجد $b \in \{b\}, c \notin \{b\}$.

مثال :
بفرض أن

$$X = \{a,b,c\}$$

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b,c\}\}$$

هل (X,τ) فضاء - T_0؟

الحل :

واضح أن (X,τ) ليس فضاء $- T_0$ لأنه لا توجد $U \in \tau$ بحيث أن
$c \notin U \text{ , } b \in U$ أو $b \notin U \text{ , } c \in U$.

مثال :
هل الفضاء المتقطع (X,D) هو فضاء - T_0؟
الحل :

من تعريف التبولوجي المتقطع $D=P(X)$ نجد أنه لكل $x,y \in X$
بحيث أن $x \neq y$ توجد مجموعة مفتوحة $\{x\}$ بحيث أن
$x \in \{x\}$ ولكن $y \notin \{x\}$.
إذاً (X,D) فضاء- T_0.

مثال :
هل فضاء النقطة المختارة (X,P) هو فضاء - T_0؟

الحل :

نفرض أن $x, y \in X$ ، $x \neq y$ وحيث أن :

$$P = \{\phi, U \subseteq X : p \in U\}$$

فيكون لدينا الإحتمالان الأول : $x \neq y \neq p$

إذاً توجد مجموعة مفتوحة $U=\{x,p\}$ بحيث يكون

$y \notin \{x,p\}, x \in \{x,p\}$.

والإحتمال الثاني :

إحدى النقطتين تساوي p ولتكن $x=p$ ، إذاً توجد مجموعة مفتوحة هي $\{p\}$ بحيث يكون $y \notin \{p\}, p \in \{p\}$

إذاً (X,P) هو فضاء - T_0 .

مثال :

هل فضاء المتممات المنتهية (X,C) فضاء T_0 ؟

الحل :

نفرض أن $x, y \in X$ ، $x \neq y$ ومن تعريف التبولوجي C فإن

$$P = \{\phi, U \subseteq X : U^C \text{ finite}\}$$

نجد أن $\{x\}$ مجموعة منتهية وبالتالي فإن $U = X - \{x\} \in C$ مجموعة مفتوحة لا تحتوي x أي $x \notin U$ وتحقق $y \in U$.

إذاً (X,C) فضاء - T_0 .

مثال :

بفرض أن $\tau = \{\phi, R, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$ هل (R, τ) فضاء - T_0 ؟

الحل :

لكل $x, y \in R$ بحيث أن $x < y$

توجد مجموعة مفتوحة $E_X = (x, \infty)$ تحوي y ولكن $x \notin E_x$.

إذاً (R, τ) فضاء-T_0 .

نظرية :

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي فإن العبارات التالية متكافئة :

(١) X فضاء - T_0 .

(٢) $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ لكل $x, y \in X$ حيث $x \neq y$.

(٣) لكل $x \in X$ فإن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة .

البرهان :

$$(1) \Rightarrow (2):$$

نفرض أن (X, τ) فضاء- T_0 وأن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$.

إذاً توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحدى النقطتين x ,y

ولا تحتوي على الأخرى

ولتكن (مثلاً) $x \in U$ ، $y \notin U$

وبذلك يكون $U \cap \{y\} = \phi$

وهذا يعني أن $x \notin \overline{\{y\}}$ ولكن $x \in \overline{\{x\}}$.

وبالمثل يمكن إثبات أن $y \notin \overline{\{x\}}$

ومن ثم فإن $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

$(2) \Leftarrow (3)$:

من (2) يكون لدينا (لكل $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$)
$x \notin \overline{\{y\}}$ أو $y \notin \overline{\{x\}}$.

نفرض أن

$z \in \{x\}'$ إذاً $z \neq x$ (لأن $x \notin \{x\}'$) .

وعليه نحصل على $x \notin \overline{\{z\}}$ لكن $\overline{\{z\}} \subset \overline{\{x\}}$

(وذلك لأن $z \in \overline{\{z\}}, z \in \{x\}' \Rightarrow z \in \overline{\{x\}}$)

وحيث أن $\overline{\{x\}} = \{x\} \cup \{x\}'$.

إذاً $z \in \overline{\{z\}} \subseteq \{x\}'$.

وعليه فإن $\{x\}' = \cup \left\{ \overline{\{z\}} : z \in \{x\}' \right\}$.

أي أن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة .

$(3) \Leftarrow (1)$:

بفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإن إما
$y \in \{x\}'$ أو $y \notin \{x\}'$.

(أ) إذا كانت $y \in \{x\}'$ فإنه يوجد مجموعة مغلقة F بحيث
$F \subseteq \{x\}'$ ، $y \in F$.

إذاً V=X-F ، V مجموعة مفتوحة تحتوي x ، $y \notin V$.

(ب)إذا كانت $y \notin \{x\}'$ فإن $y \notin \overline{\{x\}}$ وعليه فإن

$y \in X - \overline{\{x\}} = V$ ،

V مجموعة مفتوحة تحتوي y ولا تحتوي x .

في كلتا الحالتين (X,τ) فضاء $-T_0$.

تعريف :

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي . يقال لخاصية ما بأنها خاصية وراثية (hereditary property) إذا وفقط إذا تحققت لأي فضاء جزئي (A,τ_A)، $A \subseteq X$ طالما هي محققة في الفضاء الكلي (X,τ) .

نظرية :

خاصية أن الفضاء $- T_0$ هي خاصية وراثية .

البرهان :

نفرض أن (X,τ) فضاء T_0 ، (A,τ_A) فضاء جزئي منه وأن $x, y \in A$ بحيث أن $x \neq y$.

إذاً $x, y \in X$

وحيث أن (X,τ) فضاء - T_0،

إذاً توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحداهما ولا تحتوي الأخرى

ولتكن $x \in U, y \notin U$ ،

ولكن $V = A \cap U$ مجموعة مفتوحة في A وتحقق أن $x \in V, y \notin V$.

إذاً (A,τ_A) فضاء - T_0 .

الفضاء- T_1:

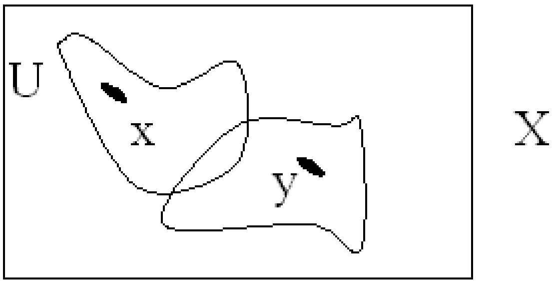
T_1-space

تعريف :

يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه فضاء- T_1 إذا كان لكل $x,y\in X$ حيث $x\neq y$ توجد مجموعتان مفتوحتان U,V بحيث أن
$x\notin V,\ y\in V\ ,\ y\notin U\ ,x\in U$

أي أن

$$X \text{ is } T_1\text{-Space } \Leftrightarrow (\forall\ x,y\in X,\ \ x\neq y)(\exists U,V\in\tau)$$
$$(x\in U, y\notin U)\,\&\,(y\in V, x\notin V)$$



من التعريف يتضح أن الفضاء- T_1 هو فضاء- T_0 .
أي أن : $T_1\Rightarrow T_0$

ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح

مثال توضيحي :
نفرض أن

$$X=\{a,b\}$$
$$\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$$

فإن فضاء $-T_0$ ولكنه ليس فضاء- T_1 لأن X المجموعة الوحيدة التي تحتوي b وأيضا تحتوي a .

مثال :

الفضاء المتقطع هو فضاء $-T_1$ولكن الفضاء المصمت ليس فضاء - T_1 .

مثال :

نفرض أن

$$X=\{a,b\}$$

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$$

هل (X,τ) فضاء- T_1؟

الحل :

واضح أن (X,τ) فضاء- T_1

لأنه توجد

$$\{a\},\{b\}\in\tau$$

بحيث أن

$$a\notin\{b\},\ b\in\{b\}\ ,\ b\notin\{a\}\ ,\ a\in\{a\}$$

نظرية :

بفرض أن فضاء تبولوجي فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) X فضاء- T_1 .

(٢) المجموعة $\{x\}$ مغلقة لكل $x\in X$.

(٣) لكل $x\in X$ فإن $\{x\}'=\phi$.

البرهان :

$(1) \Leftarrow (2)$:

ليكن X فضاء- T_1
والمطلوب إثبات أن المجموعة $\{x\}$ مغلقة لكل $x \in X$ ؟
لذلك نفرض أن $y \in \{x\}^C$
وهذا يؤدي إلى أن $x \neq y$
وحيث أن X فضاء- T_1،
فإنه توجد مجموعة مفتوحة U بحيث $x \notin U, y \in U$
أي أن $y \in U \subseteq \{x\}^C$،
ومن ثم فإن $\{x\}^C$ مجموعة مفتوحة
(لأنها إتحاد مجموعات مفتوحة)
وهذا يؤدي إلى أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة .

$(2) \Leftarrow (1)$:

نفرض أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة لكل $x \in X$ ونحاول إثبات أن X فضاء - T_1، لذلك نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإنه ينتج أن $\{x\}^C, \{y\}^C$مجموعات مفتوحة وأيضاً $y \in \{x\}^C, x \in \{y\}^C$
ومن ثم فإن $\{x\}^C, \{y\}^C \in \tau$
بحيث أن :
$y \notin \{y\}^C,\ x \in \{y\}^C\ ,\ x \notin \{x\}^C\ , y \in \{x\}^C$
وهذا يعني أن X فضاء - T_1.

$$(2) \Leftarrow (3):$$

نفرض أن $x \in X$ فإنه ينتج من (2) أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة أي أن $\overline{\{x\}} = \{x\}$ لكن $\overline{\{x\}} = \{x\} \cup \{x\}'$.
إذاً $\{x\} = \{x\} \cup \{x\}'$ وحيث أن $x \notin \{x\}'$ فإن $\{x\}' = \phi$.

$$(3) \Leftarrow (1):$$

نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$، من (3) نجد أن

$$\{x\}' = \phi$$

وهذا يؤدي إلى أن $y \notin \{x\}'$

أي توجد مجموعة مفتوحة U_y تحوي y وتحقق

$$U_y \cap \{x\} = \phi$$

ومن ثم فإن $y \in U_y, x \notin U_y$

بالمثل $\{y\}' = \phi$ تؤدي إلى أنه توجد مجموعة مفتوحة V_x تحقق $V_x \cap \{y\} = \phi$

ومن ثم فإن $y \notin V_X, x \in V_X$

وبالتالي فإن (X, τ) فضاء- T_1.

نتيجة :

إذا كان (X, τ) فضاء $- T_1$ فإن كل مجموعة جزئية منتهية من X ليس لها نقاط نهاية . أي أن لكل $A \subseteq X$ حيث X فضاء- T_1، A مجموعة منتهية فإن $A' = \phi$.

البرهان:

نفرض أن A مجموعة جزئية منتهية من X ولتكن

$$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

ومن ثم فإن $A=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$

وحيث أن X فضاء- T_1 فإن $\{x_i\}'=\varnothing$ ، $i=1,2,3,\ldots,n$

وبذلك نحصل على :

$$A'=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}'=\bigcup_{i=1}^{n}\varnothing=\varnothing$$

نتيجة :

إذا كانت X مجموعة منتهية ، (X,τ) فضاء T_1- فإن (X,τ) يكون فضاء متقطع .

البرهان :

نفرض أن $A\subseteq X$

ونحاول إثبات أن A مجموعة مغلقة

حيث أن X منتهية فإن A منتهية

ولكن X فضاء T_1- وبالتالي فإن $A'=\varnothing$

وبذلك تكون A مغلقة ،

ومن ثم فإن كل مجموعة جزئية من X

تكون مفتوحة ومغلقة

ومن ذلك يكون (X,τ) هو الفضاء المتقطع .

نظرية :

خاصية أن يكون الفضاء – T_1 هي خاصية وراثية .

نظرية :

خاصية ان يكون الفضاء – T_1 هي خاصية تبولوجية .

البرهان :

نفرض أن (X,τ_1) فضاء – T_1
وأن (Y,τ_2) فضاء تبولوجي ، $f: X \to Y$ دالة تبولوجية ،
نحاول إثبات أن (Y,τ_2) فضاء- T_1.

لذلك نفرض أن $x, y \in Y$ بحيث أن $x \neq y$
وحيث أن f دالة تقابل فإن
$$f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$$
وبما أن (X,τ_1) فضاء- T_1 إذاً يوجد $U, V \in \tau_1$
بحيث أن
$$f^{-1}(x) \in U \ , \ f^{-1}(y) \notin U \ \text{ and } \ f^{-1}(y) \in V \ , \ f^{-1}(x) \notin V$$
ومن ثم فإن
$$x \in f(U) \ , \ y \notin f(U) \ \text{ and } \ y \in f(V) \ , \ x \notin f(V)$$
وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(U), f(V) \in \tau_2$
وهذا يؤدي إلى أن (X,τ_2) فضاء - T_1.

نظرية :

الفضاء (X,τ) يكون T_1 إذا وفقط إذا كان تقاطع كل المجموعات المفتوحة التي تحتوي P لكل $P \in X$ تطابق $\{p\}$ أي أن :

$$X \text{ is } T_1\text{-Space} \Leftrightarrow \cap\{G : P \in G \in \tau\} = \{p\}$$

البرهان :

أولا : ليكن X فضاء- T_1 ونفرض أن $p \neq q$;

$$\cap\{G : G \in \tau\} = \{p,q\}$$

ومن ثم فإن كل مجموعة مفتوحة تحتوي p تحتوي أيضا q ،
وبالتالي فإن
X ليس لها فضاء $-T_1$ وهذا تعارض .

ثانيا : نفرض أن $p,q \in X$ حيث $p \neq q$. إذاً

$$\cap\{G_p : p \in G \in \tau\} = \{p\} \quad , \quad \cap\{G_q : q \in G_q \in \tau\} = \{q\}$$

وعليه توجد مجموعتان مفتوحتان G_p, G_q بحيث أن

$$q \in G_q, p \notin G_q, q \notin G_p, p \in G_p$$

ومن ثم فإن X فضاء - T_1.