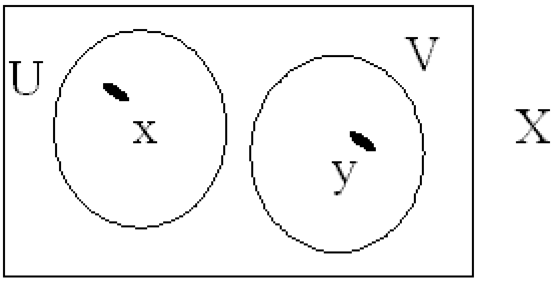
الفضاء - T_2 :

T_2- Space or Housdorff space

نظرية :

يقال أن الفضاء (X,τ) فضاء- T_2 إذا وفقط إذا وجد لكل نقطتين مختلفتين مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين تحتوي إحداهما النقطة الأولى والأخرى تحتوي النقطة الثانية أي أن :

$$X \text{ is } T_2\text{-Space} \Leftrightarrow \forall\, x,y \in X,\ x \neq y\,,\ \exists U,V \in \tau :$$
$$x \in U, y \in V, U \cap V = \varnothing$$



واضح أن كل فضاء – T_2 هو فضاء – T_1 أي أن $T_2 \Rightarrow T_1$
ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح .

مثال توضيحي :

فضاء المتممات المنتهية (X,C) حيث X لا نهائية هو فضاء- T_1 ولكنه ليس فضاء- T_2 .

الحل :

(أ) نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$

فإن $U_x = \{y\}^C , U_y = \{x\}^C$ مجموعات مفتوحة ،

$y \notin \{y\}^C = U_x \ , y \in \{x\}^C = U_y$

وأيضا $x \notin \{x\}^C = U_y \ , x \in \{y\}^C = U_x$

ومن ثم فإن (X,C) فضاء - T_1.

(ب) نفرض العكس ، أي نفرض أن (X,C) فضاء $- T_2$ وعلى هذا فإنه لكل $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$

توجد مجموعتان مفتوحتان U_x, U_y بحيث أن

$U_x \cap U_y = \emptyset \quad , \ x \in U_y, \ \ y \in U_x$

ومن ذلك نستنتج أن

$U_x \subseteq U_y^C$،

وهذا يؤدي إلى أن U_y^C مجموعة منتهية تحتوي على U_x

وبذلك يكون $U_x \subseteq U_y^C$

وهذا تعارض لأن U_x مجموعة غير منتهية ،

ومن ثم فإن (X,C) ليس فضاء - T_2.

ملاحظة :

من الممكن أن نرى بسهولة من (أ) أن (X,C) ليس فضاء- T_2 لأن :

$$U_x \cap U_y = \{y\}^C \cap \{x\}^C = \{x, y\}^C \neq \emptyset$$

مثال :

إذا كان (R,τ) فضاء تبولوجي النهاية العليا فإنه يكون فضاء - T_2 .

الحل :

نعلم أن τ له الأساس :

$$B=\{(a,b]: a,b\in R, a<b\}$$

$$\overline{\quad a-1 \quad a \quad\quad b \quad}$$

ومن الواضح أنه يوجد $U=(a-1,a], V=(a,b]$ مجموعتان مفتوحتان في τ وتحقق أن

$$a\in U,\ \ b\in V\ ,\ \ U\cap V=\emptyset$$

ومن ثم فإن (R,τ) يكون فضاء - T_2.

مثال :

كل فضاء متقطع يكون فضاء- T_2 ولكن الفضاء المصمت الذي يحتوي على أكثر من نقطة لا يكون فضاء- T_2 .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي فإن (X,τ) يكون فضاء – T_2 إذا وفقط إذا كان لكل $x\in X$ فإن $\{x\}=\cap\{F: F\in N_X\}$ حيث F جوار مغلق أي أن تقاطع الجوارات المغلقة للنقطة x يطابق المجموعة $\{x\}$.

البرهان :

اولا :

نفرض أن (X,τ) فضاء- T_2 وأن $x \neq y$ ،
على ذلك توجد مجموعتان مفتوحتان $U_i, V_j \in \tau$ بحيث أن
$x \in U_i$, $y \in V_j$, $U_i \cap V_j = \varnothing$ ،
ومن ثم فإن $U_i \subseteq V_j^C$ وهذا يؤدي إلى

$$x \in U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq \overline{V_j^C} = V_j^C$$

لأن V_j^C مغلقة وبالتالي فإن

$$x \in U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq F_i$$

أي أن F_i جوار مغلق للنقطة x لايحوي y
ومن ثم فإن

$$\{x\} = \cap\{F_i : F_i \in N_X\}$$

ثانيا :

نفرض أن لكل $x \in X$، المجموعة $\{x\}$ يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية :

$$\{x\} = \cap\{F_i : F_i \in N_X\}$$

حيث F_i جوار مغلق للنقطة x

سوف نبرهن أن الفضاء (X,τ) هو فضاء- T_2،

لذلك نفرض أن $x \neq y$ فإنه يوجد
جوار مغلق F يحتوي x و لا يحتوي y وعليه تكون
$V = F^C$ مجموعة مفتوحة تحتوي y ولا تحتوي x
وحيث أن F جوار مغلق يحتوي x فإنه توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي x بحيث أن

وتحقق أن $x \in U \subseteq F$

$U \cap V = \varnothing$

وبالتالي فإن (X, τ) فضاء- T_2.

نتيجة :

الفضاء (X, τ) يكون فضاء- T_2 إذا وفقط إذا كان لكل $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ توجد مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U$, $y \notin \overline{U}$ أي أن

$$X \text{ is } T_2\text{-Space} \Leftrightarrow \forall\, x, y \in X,\ x \neq y,$$
$$\exists U \in \tau:\ x \in U, y \notin \overline{U}$$

البرهان :

الإتجاه الأول :

نفرض أن X فضاء- T_2 ، $x, y \in X$ حيث $x \neq y$

فإنه توجد مجموعتان $U, V \in \tau$ بحيث أن

$x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing$.

إذاً

$$U \cap V = \varnothing \Rightarrow U \subseteq V^c \Rightarrow \overline{U} \subseteq \overline{V^c} = V^c \Rightarrow y \notin \overline{U}$$

الإتجاه الثاني :

بفرض أن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ وأنه توجد مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U$, $y \notin \overline{U}$ إذاً

$$y \in \overline{U}^C = V \Rightarrow V \in \tau\ ,\ y \in V$$

وعليه فإن

$$U \cap V = U \cap \bar{U}^C = \varnothing$$

ومن ثم فإن (X,τ) فضاء- T_2 .

نظرية :

نفرض أن $f,g:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ دالتان متصلتان من الفضاء التوبولوجي (X,τ_1)إلى الفضاء التبولوجي (Y,τ_2) . إذا كان (Y,τ_2)فضاء $-T_2$ فإن المجموعة $A=\{x:f(x)=g(x)\}$ تكون مجموعة مغلقة .

البرهان :

نحاول إثبات أن المجموعة $A^C=\{x:f(x)\neq g(x)\}$مجموعة مفتوحة .

نفرض أن $x\in A^C$ إذاً $f(x)\neq g(x)$

حيث أن (Y,τ_2) فضاء- T_2

فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U,V\in\tau_2$بحيث أن

$$g(x)\in V,\ f(x)\in U\ ,\ U\cap V=\varnothing$$

وحيث أن f, g دالتان متصلتان فإن

$f^{-1}(U), g^{-1}(V)\in\tau_1$ أي أن $x\in f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)=W\in\tau_1$

وهذا يؤدي إلى أن $x\in W\subseteq A^C$

ومن ثم فإن A^C مجموعة مفتوحة .

التمارين

(١) إذا كان (X,τ) فضاء - T_0 ، $\tau \subseteq \tau^*$. أثبت أن (X,τ^*) يكون فضاء - T_0 .

(٢) بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ كون توبولوجي τ على X بحيث يكون :

(i) (X,τ) فضاء - T_0 .

(ii) (X,τ) فضاء - T_1 .

(iii) (X,τ) فضاء - T_2 .

(٣) بين أنه إذا كان (X,τ) فضاء- T_2 حيث X مجموعة لانهائية ، فإنه يوجد عدد لا نهائي من المجموعات المفتوحة المنفصلة .

(٤) إذا كان (X,τ) فضاء- T_0 بحيث أنه توجد نقطة واحدة x كثيفة في X أي أن $\overline{\{x\}}=X$. بين أنه لا توجد نقطة أخرى $y \in X$ تحقق $\overline{\{y\}}=X$.

(٥) بفرض أن (X,τ) فضاء - T_2 . برهن أن كل متتابعة في X لها نقطة نهاية وحيدة .

(6) إذا كان (X,τ) فضاء- T_1 . اثبت أن :
تقاطع المجموعات المغلقة التي تحتوي $x \in X$ يطابق $\{x\}$.

حل التمارين

(١) إذا كان (X,τ) فضاء - T_0 ، $\tau \subseteq \tau^*$. أثبت أن (X,τ^*) يكون فضاء - T_0 .

الحل:

بما أن (X,τ) فضاء - T_0

$$\therefore \forall\, x,y \in X:\ x \neq y\ \exists\, U \in \tau$$

$$\text{s.t. } (x \in U \ \wedge\ y \notin U) \text{ or } (x \notin U \ \wedge\ y \in U)$$

وبما أن $\tau \subseteq \tau^*$ إذن

$$\therefore \forall\, x,y \in X:\ x \neq y\ \exists\, U \in \tau^*$$

$$\text{s.t. } (x \in U \ \wedge\ y \notin U) \text{ or } (x \notin U \ \wedge\ y \in U)$$

إذن (X,τ^*) فضاء- T_0

(٢) بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ كون توبولوجي τ على X بحيث يكون :

(i) (X,τ) فضاء - T_0 .
(ii) (X,τ) فضاء - T_1 .
(iii) (X,τ) فضاء - T_2 .

الحل :

(i) (X,τ) فضاء - T_0 .

$$\tau = \{X,\varphi,\{a\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{b\},\{a,b\}\}$$

(ii) (X,τ) فضاء T_1- .

$$\tau=\{X,\varphi,\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{a,c,d\},\{a,b,d\}$$
$$,\{b,c\},\{a,c\},\{a,b\},\{c,d\},\{b,d\}$$
$$,\{a,d\},\{c\},\{b\},\{d\},\{a\}\}$$

وهو الفضاء المتقطع

(iii) (X,τ) فضاء T_2- .

نفس التبولوجي لفقرة ii

يحقق أنه فضاء T_2 - أيضا

(١) بين أنه إذا كان (X,τ) فضاء- T_2 حيث X مجموعة لانهائية ، فإنه يوجد عدد لا نهائي من المجموعات المفتوحة المنفصلة .

الحل :

نفرض أن عدد المجموعات المفتوحة المنفصلة منتهي

وبما أن (X,τ) فضاء- T_2 فإن :

$$\forall\ x,y\in X,\ \ x\neq y\ ,\ \exists U,V\in\tau:$$
$$\text{s.t.}\qquad x\in U\ ,y\in V\ ,U\cap V=\varnothing$$

وبما أن X لانهائية إذن تحوي عدد لانهائي من العناصر ولكل عنصرين يوجد مجموعتين مفتوحتين منفصلتين

وبما أن عدد العناصر لانهائي إذن عدد المجموعات المفتوحة المنفصلة لانهائي وهذا يناقض الفرض

(4) إذا كان (X,τ) فضاء- T_0 بحيث أنه توجد نقطة واحدة x كثيفة في X أي أن $\overline{\{x\}} = X$. بين أنه لا توجد نقطة أخرى $y \in X$ تحقق $\overline{\{y\}} = X$.

الحل :

بما أن (X,τ) فضاء- T_0 فإن :

$$\forall \ x,y \in X : \ x \neq y \ \rightarrow \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$$

وبما أن $\overline{\{x\}} = X$ إذن $\overline{\{y\}} \neq X$

(5) بفرض أن (X,τ) فضاء - T_2 . برهن أن كل متتابعة في X لها نقطة نهاية وحيدة .

الحل :

نفرض أن : $< a_n > \ = \ < a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n >$ متتالية تتقارب لكل من a,b ، $a \neq b$

معطى أن (X,τ) فضاء - T_2 إذن
توجد مجموعتان مجموعتين مفتوحتين ولتكن G,H بحيث أن
$G \cap H = \varphi$
ولنفرض أن $a \in G \ , \ b \in H$
بإستخدام نهاية المتتابعة لكل جوار مفتوح U لـ x
يوجد جوار $n_0 \in N$ بحيث أنه
لكل $n > n_0$ فإن $a_n \in U$

بما أن a نهاية للمتتابعة $< a_n >$ فإنه يوجد

n_1 بحيث أن $n > n_1$ تحقق أن

$a_n \in G$

وبنفس الطريقة يوجد n_2 بحيث $n > n_2$ تحقق أن

$a_n \in H$

أي أن $a_n \in G, a_n \in H$ بحيث

$n = \max\{n_1, n_2\}$

تحقق أنها $n \in G, H$

و هذا يناقض كون $G \cap H = \varphi$.

(6) إذا كان (X, τ) فضاء- T_1. اثبت أن :
تقاطع المجموعات المغلقة التي تحتوي $x \in X$ يطابق $\{x\}$.

الحل :

نفرض أن F_X مجموعة مغلقة تحوي x و $x \neq y$،

$\bigcap F_X = \{x, y\}$

F_X تحوي y ايضا

وبما أن (X, τ) فضاء- T_1 إذن

لكل $x, y \in X$ و $x \neq y$

يوجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن

$x \notin V,\ y \in V\ ,\ y \notin U\ , x \in U$

$\leftarrow U^C, V^C \in \Im$ بحيث أن

$x \in V^C,\ y \notin V^C\ ,\ y \in U^C\ , x \notin U^C$

$\rightarrow x \notin \bigcap U^C \qquad ,\ y \notin \bigcap V^C$

$\rightarrow \bigcap F_X = \{x\}$

الدرس الرابع

الفضاء المنتظم :

Regular Space

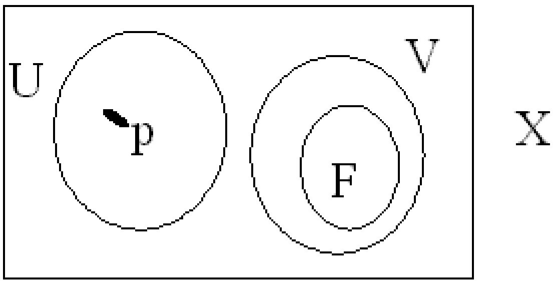
تعريف :

يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه فضاء منتظم (Regular space) إذا وجد لأي مجموعة مغلقة F وأي نقطة p لا تنتمي لمجموعة F مجموعتان مفتوحتان U,V بحيث يكون

$$p\in U,\ \ F\subseteq V\ ,\ U\cap V=\varnothing$$

أي أن :

$$X \text{ is regular } \Leftrightarrow \forall\ F \text{ closed},\ \forall\ p\notin F,$$
$$\exists U,V\in\tau:\ p\in U\ , F\subseteq V,\ U\cap V=\varnothing$$



تعريف:

يقال للفضاء (X,τ) إنه فضاء $-T_3$ إذا كان منتظما وفضاء $-T_1$

أي أن

$$T_3=\text{regular}+T_1$$

ملاحظة :

لا يوجد ارتباط بين الفضاءات المنتظمة و الفضاءات $-T_1$

مثال توضيحي :

لتكن $X=\{a,b,c\}$ وأن τ تبولوجي معرف على X بالصورة :

$$\tau=\{X,\varphi,\{a\},\{b,c\}\}$$

فإن المجموعات المغلقة في X هي :

$$\Im=\{\varphi,X,\{b,c\},\{a\}\}$$

وأن

$$b\notin\{a\}\Rightarrow\exists\{a\},\{b,c\}\in\tau\ ,\ b\in\{b,c\},\{a\}\subseteq\{a\}$$
$$\{a\}\cap\{b,c\}=\varphi$$
$$c\notin\{a\}\Rightarrow\exists\{a\},\{b,c\}\in\tau\ ,\ c\in\{b,c\},\{a\}\subseteq\{a\}$$
$$\{a\}\cap\{b,c\}=\varphi$$
$$a\notin\{b,c\}\Rightarrow\exists\{a\},\{b,c\}\in\tau\ ,\ a\in\{a\},\{b,c\}\subseteq\{b,c\}$$
$$\{a\}\cap\{b,c\}=\varphi$$

وبالتالي فإن (X,τ) فضاء منتظم ولكنه ليس فضاء – T_1 ولا فضاء – T_2 .

سؤال :

هل من الممكن أيجاد فضاء – T_1 ولكنه ليس منتظم ؟

الحل :

نعم .
فضاء المتممات المنتهيه فضاء – T_1 وهو ليس منتظم

ولإثبات أنه ليس منتظم نفرض العكس

أي ان فضاء المتممات المنتهية (X,C) منتظم

وأن $x,y \in X$ ، حيث X لانهائية

وبالتالي $\{x\}$ مجموعة مغلقة لأنه فضاء $T_1 -$

وأن $y \notin \{x\}$ ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان U,V

بحيث أن

$U \cap V = \varphi \, , y \in U \, , \{x\} \subseteq V$ ،

من تعريف تبولوجي المتممات المنتهية فإن

المجموعات U^C, V^C منتهية

وعليه يكون $U^C \cup V^C$ مجموعه منتهية لكن

$$U \cap V = \varphi \Rightarrow (U \cap V)^C = X = U^C \cup V^C$$

أي أن X مجموعه منتهية وهذا تناقض

أي أن (X,C) فضاء ليس منتظم .

مثال:

كل فضاء مصمت (غير منفصل) (X,I) حيث X تحتوي على أكثر من نقطة هو فضاء منتظم ولا يكون T_0 أو T_1 أو T_2 .

مثال :

كل فضاء متقطع (X,D) هو فضاء منتظم .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي فإن الخواص التالية متكافئة :

(١) X فضاء منتظم .

(2) لكل $x \in X$, $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U$ توجد $V \in \tau$ تحقق :

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

(3) كل جوار للنقطة $x \in X$ يحتوي على جوار مغلق .

نتيجة : (تعريف مكافئ للإنتظام)

الفضاء (X, τ) يكون منتظم إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة G يمكن التعبير عنها بالصورة :

$$G = \cup\left\{W \in \tau : \overline{W} \subseteq G\right\}$$

نتيجة :

الفضاء (X, τ) يكون فضاء منتظم إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مغلقة F فإن تقاطع الجوارات المغلقة للمجموعة F يطابق المجموعة F أي أن :

$$F = \cap\left\{N : \text{جوار مغلق لـ } F \text{ } N\right\}$$

نظرية :

كل فضاء $-T_3$ يكون فضاء $-T_2$.

البرهان :

نفرض أن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$

والفضاء (X, τ) فضاء $-T_3$ ،

حيث أن (X, τ) فضاء $-T_1$ فإن

$\{x\}$ مجموعة مغلقة حيث $y \notin \{x\}$ ،

لكن (X, τ) فضاء منتظم وبذلك توجد مجموعتان $U, V \in \tau$

بحيث يكون

$$U \cap V = \varphi \, , y \in U \, , \{x\} \subseteq V$$

أي أن (X,τ) فضاء -T_2 .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء منتظم فإن العبارات التالية متكافئة :

(١) (X,τ) فضاء- T_2.

(٢) (X,τ) فضاء- T_1 .

(٣) (X,τ) فضاء- T_0.

البرهان :

واضح أن $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

علينا فقط إثبات أن $(3) \Rightarrow (1)$

لنفرض أن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ وأن (X,τ) فضاء-T_0

لذلك يكون إما $x \notin \overline{\{y\}}$ أو $y \notin \overline{\{x\}}$.

بفرض أن $x \notin \overline{\{y\}}$ وحيث أن المجموعة $\overline{\{y\}}$ مغلقة

والفضاء (X,τ) منتظم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$

بحيث أن :

$$x \in U, \overline{\{y\}} \subseteq V$$

وهذا يعني أن (X,τ) فضاء- T_2.

نظرية :

خاصية أن يكون الفضاء منتظما أو T_3 هي خاصية وراثية .

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء منتظم ، (A,τ_A) فضاء جزئي منه ،
ولتكن B مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (A,τ_A)،
$x \in A$ حيث $x \notin B$.
وبالتالي توجد مجموعة مغلقة F في الفضاء الكلي (X,τ)
حيث $B = A \cap F$
وبموجب أن الفضاء الكلي منتظم وأن F مجموعة مغلقة في X
وأن $x \notin F$ فإنه توجد
مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن
$F \subseteq V$, $x \in U$, $U \cap V = \varphi$.
ومن ثم فإنه توجد $U_1, V_1 \in \tau_A$ بحيث يكون
$U_1 = A \cap U$, $V_1 = A \cap V$
حيث
$B \subseteq V$, $x \in U_1$, $U_1 \cap V_1 = \varphi$.
أي أن (A,τ_A) فضاء منتظم .

نظرية :

خاصية أن يكون الفضاء منتظم هي خاصية تبولوجية .

البرهان :

نفرض أن $f : X \to Y$ دالة تبولوجية

من الفضاء المنتظم (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ)

وأن F مجموعة مغلقة في Y

حيث $x \notin F,\ x \in Y$ وحيث أن f دالة تناظر أحادي ومتصلة فإن

$f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X وأن $f^{-1}(x) \notin f^{-1}(F)$.

لكن (X,τ) فضاء منتظم ،

بذلك توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث يكون

$f^{-1}(x) \in U, f^{-1}(F) \subseteq V$ ،.

ولكن $f(U), f(V)$ مجموعتان مفتوحتان في Y ،

حيث

$$x \in f(U), F \subseteq f(V), f(U) \cap f(V) = \varphi$$

أي أن (Y,υ) فضاء منتظم .

الفضاء الطبيعي :

Normal Space

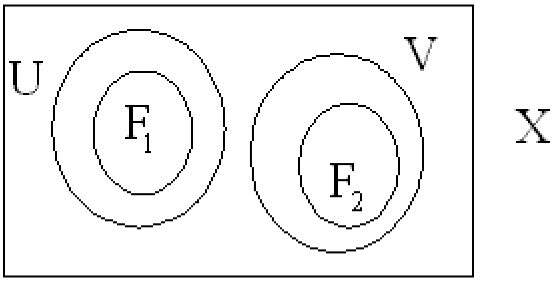
تعريف :

يسمى الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء طبيعي إذا وفقط إذا وجد لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X مجموعتان مفتوحتان وغير متقطعتان إحداهما تحتوي على إحدى المجموعتين المغلقتين بينما تحتوي الثانية على المجموعة الأخرى . أي أن إذا كانت F_1,F_2 مجموعتين مغلقتين في X حيث

$$F_1 \cap F_2 = \varphi$$

فإنه توجد $U,V \in \tau$ بحيث

$$F_1 \subseteq U \ , F_2 \subseteq V \ \ , U \cap V = \varphi .$$



ملاحظة:

لا يوجد ارتباط بين الفضاءات المنتظمة والفضاءات الطبيعية

مثال توضيحي :

لتكن $X=\{a,b,c\}$ ، τ توبولوجي على X حيث :

$$\tau=\{X,\varphi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

واضح أن (X,τ) فضاء طبيعي لأن المجموعات المغلقة في X هي

:

$$\varphi, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$$

لإيجاد مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين يجب أن تكون إحداهما

هي φ ولتكن $F_1 = \varphi$

وبالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان هما φ و X حيث

$$\varphi = F_1 \subseteq \varphi, \quad F_2 \subseteq X$$

من جانب آخر (X, τ) ليس منتظما

حيث توجد مجموعة مغلقة $\{b,c\}$ حيث $a \notin \{b,c\}$

ولا توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان

بحيث تحتوي إحداهما على النقطة a وتحتوي الأخرى على

المجموعة المغلقة $\{b,c\}$

أيضا ليس فضاء T_1- لأن المجموعة $\{a\}$ ليست مغلقة .

سؤال :

هل كل فضاء طبيعي هو فضاء- T_0 .

الحل :

لا، مثال يثبت خطأ العبارة :

بفرض أن

$$X = \{a, b, c\}$$

$$\tau = \{X, \varphi, \{a\}\}$$

من السهل أن نرى أن الفضاء (X, τ) فضاء طبيعي لكنه

ليس فضاء- T_0 لأن $b \neq c$ والمجموعة الوحيدة التي تحتوي b هي

X حيث $c \in X$.

سؤال :

هل كل فضاء طبيعي هو فضاء منتظم ؟

الحل :

لا، مثال يثبت خطأ العبارة :

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ ، τ تبولوجي على X معرف بالصورة :

$$\tau=\{X,\varphi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

من السهل أن نرى أن (X,τ) هو فضاء طبيعي

و لكنه ليس فضاء منتظم لأن $F=\{a,c,d\}$

هي مجموعة مغلقة ، $b\notin F$

ولا توجد مجموعة مفتوحة تحتوي F سوى المجموعة X التي تحتوي b أيضا.

مثال :

بفرض أن X مجموعة غير منتهية فإن فضاء المتممات المنتهية (X,C) لا يكون فضاء منتظم ولا يكون فضاء طبيعي .

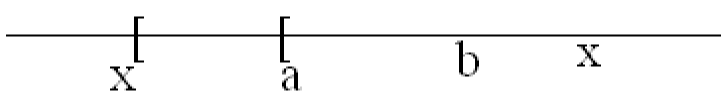
مثال :

ليكن (R,τ) هو تبولوجي النهاية السفلى أي التبولوجي الذي أساسه

$$B=\{[a,b):a,b\in R\}$$

يجب أن نلاحظ هنا إن عناصر الأساس مفتوحة ومغلقة في آن واحد وذلك لأن :

$$\text{let } x\notin[a,b)\Rightarrow x<a \quad \text{or} \quad b\le x$$



الحالة الأولى :

إذا كانت $x<a$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة $[x,a)$ حيث $x\in[x,a)$ ،

الحالة الثانية:

إذا كانت $x \le b$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة $[x,x+1)$ تحتوي x ولا تتقاطع مع $[a,b)$
وهذا يؤدي إلى أن المجموعة $[a,b)$ -R مجموعة مفتوحة
ومن ثم فإن $[a,b)$مجموعة مغلقة ،
من السهل أن نرى أن(R,τ) فضاء منتظم وفضاء طبيعي .

تعريف : (الفضاء - T_4: T_4-Space)

يسمى الفضاء (X,τ) فضاء $- T_4$ إذا كان فضاء طبيعي وكان فضاء- T_1 أيضاً، أي أن :

$$T_4 - \text{space} \equiv T_1 + \text{normal}$$

تعريف :

كل فضاء $- T_4$ هو فضاء - T_3.

البرهان :

بفرض أن (X,τ) هو فضاء - T_4، $F \subseteq X,\ P \in X$ مجموعة مغلقة في X بحيث أن $P \notin F$،
وعليه تكون المجموعة $\{p\}$ مغلقة ،
لأن X فضاء- T_1 وحيث أن X فضاء طبيعي
فإنه توجد مجموعتين مفتوحتين U,V وتحقق
$F \subseteq U\ ,\{p\} \subseteq V\ \ ,U \cap V = \varphi$،
أي أن X فضاء منتظم وهو المطلوب .

نظرية :
كل فضاء متري يكون فضاء طبيعي .

مثال :
لتكن

$$X=\{a,b,c,d\}$$

$$\tau=\{X,\varphi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

حيث أن

$$\Im_X=\{\varphi,X,\{b,c,d\},\{c,d\},\{b,d\},\{d\}\}$$

فإن المجموعتان المغلقتان والغير متقاطعتان هما فقط X,φ وبالتالي فإن (X,τ) فضاء طبيعي . لنأخذ $Y=\{a,b,c\}$ فإن :

$$\tau_y=\{Y,\varphi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$$

$$\Im_Y=\{\varphi,Y,\{b,c\},\{c\},\{b\}\}$$

ومن ذلك نجد أن (Y,τ_Y) لا يكون فضاء طبيعي
لأن $\{b\},\{c\}$ مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتان في Y
ولا توجد مجموعتان مفتوحتان في Y وغير متقاطعتان
وتحويان $\{c\},\{b\}$.

نظرية : (متى يكون الفضاء الطبيعي خاصية وراثية)

كل فضاء جزئي مغلق من فضاء طبيعي يكون فضاء طبيعي .

البرهان :

نفرض أن (X,τ) فضاء طبيعي ، (Y,τ_Y) فضاء جزئي منه
حيث Y مجموعة مغلقة في X ،

نفرض أن $F_1, F_2 \in \Im_Y$ مجموعتان مغلقتان في Y بحيث أن

$$F_1 \cap F_2 = \varphi$$

وبالتالي فإن $F_1, F_2 \in \Im_X$ ،

وحيث أن (X,τ) فضاء طبيعي

فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن :

$$F_1 \subseteq U \ , F_2 \subseteq V \ \ , U \cap V = \varphi$$

وبالتالي فإن :

وتحقق $U_1 = Y \cap U \ \ , V_1 = Y \cap V \in \tau_Y$

$$F_1 \subseteq U \ \cap Y = U_1 \ \ , F_2 \subseteq V \cap Y = V_1$$

$$U_1 \cap V_1 = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V) = \varphi$$

أي أن (Y, τ_Y) هو فضاء طبيعي.

الفضاءات المنتظمة تماما :

Completely regular

تعريف :

يقال أن الفضاء التبولوجي (X, τ) فضاء منتظم تماما إذا كان لكل $x \in X, \ F \in \Im_X$ بحيث أن $x \notin F$ توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث أن

$f(F)=1 , f(x)=0$.

نظرية :

الفضاء المنتظم تماما هو فضاء منتظم .

ملاحظة :

عكس النظرية غير صحيح في الحالة العامه لأنه يمكن بناء فضاء تبولوجي منتظم X ونعرف عليه الدالة الحقيقية الثابته

$f : X \to [0,1]$

بالتالي الفضاء لا يكون منتظم تماما .

الشرط الضروري والكافي لكي يكون الفضاء منتتظم تماما يعطى من النظرية التالية:

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء طبيعي فإن X يكون منتظم تماما إذا وفقط إذا كان منتظم .

تعريف : (فضاء تيخونوف – Tychonoff space)

يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء تيخونوف أو فضاء- $T_{3\frac{1}{2}}$ إذا كان منتظم تماما وكذلك فضاء – T_1 .

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$$

نظرية :

خاصية أن يكون الفضاء هو فضاء تيخونوف هي خاصية وراثية .

البرهان :

(يكفي أن نبين أنه إذا كان (X,τ) فضاء منتظم تماما فإن أي فضاء جزئي (Y,τ_Y) حيث $Y \subseteq X$ هو أيضا منتظم تماما ،

لذلك نفرض أن E مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) ،

$x \in Y$ حيث $x \notin E$.

وبالتالي فإنه توجد مجموعه مغلقة F

في X بحيث أن

$E = Y \cap F$ وحيث أن $x \notin E$ فإن $x \notin Y \cap F$

ولكن $x \in Y$ ومن ذلك نجد أن $x \notin F$.

وحيث أن (X,τ) فضاء منتظم تماما

فإنه توجد دالة متصلة

$f : X \to [0,1]$ بحيث أن $f(F)=1, f(x)=0$ ،

وبتقييد الدالة f على الفضاء الجزئي Y

تكون دالة متصلة وتحقق

$$f_Y(x) = 0 \quad , \quad f_Y(E) = f_Y(A \cap F) = 1$$

وهو المطلوب .

ملاحظة :

عكس العلاقة $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_4$ ليس صحيح في الحالة العامة لأن صفة كون الفضاء فضاء تيخنوف هي صفة وراثية ولكن صفة كون الفضاء- T_4 ليست وراثية .

فمثلا الفضاء الحقيقي R هو فضاء $- T_4$ وبالتالي فهو فضاء تيخنوف والفضاء الجزئي $[0,1]$ فضاء تيخنوف ايضا .

نظرية :

خاصية أن يكون الفضاء منتظم تماما هي خاصية توبولوجية .

البرهان :

نفرض أن $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ دالة هوميومورفيزم ،
(X,τ) فضاء منتظم تماما لإثبات أن (Y,τ^*) يكون أيضا منتظم
تماما
نفرض أن $F\subseteq Y$ مجموعة مغلقة ، $y\notin F$ حيث $y\in Y$
وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X
تحقق

$$x=f^{-1}(y)\notin f^{-1}(F).$$

لكن (X,τ) فضاء منتظم تماما فإنه توجد دالة متصلة
$g:X\to[0,1]$ بحيث تكون

$$g\left(f^{-1}(F)\right)=1\quad,\ g(x)=0$$

وحيث أن f دالة هوميومورفيزم فإن f^{-1} دالة متصلة ومن ذلك نجد
أن $h=gof^{-1}:Y\to[0,1]$
دالة متصلة وتحقق :

$$h(y)=gof^{-1}(y)=g\left(f^{-1}(x)\right)=0,$$

$$h(F)=gof^{-1}(F)=g\left(f^{-1}(F)\right)=1$$

أي أن (Y,τ^*) فضاء منتظم تماماً.

تعريف :

(الفضاءات الطبيعية تماماً – Completely normal)

يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء طبيعي تماماً إذا كان لكل مجموعتين منفصلتين A,B من X توجد مجموعتين مفتوحتين U,V بحيث تكون $U \cap V = \varphi$, $B \subseteq V$, $A \subseteq U$.

(ومن التعريف يتضح أن كل فضاء طبيعي تماماً هو فضاء طبيعي وذلك لأن أي مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين منفصلتين)

فضاء- T_5:

(T_5-space)

تعريف :

يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه فضاء – T_5 إذا كان فضاء طبيعي تماماً وكان فضاء- T_1، أي أن :

$$T_5 = T_1 + \text{completely normal space}$$

وبالتالي يمكن استنتاج أن :

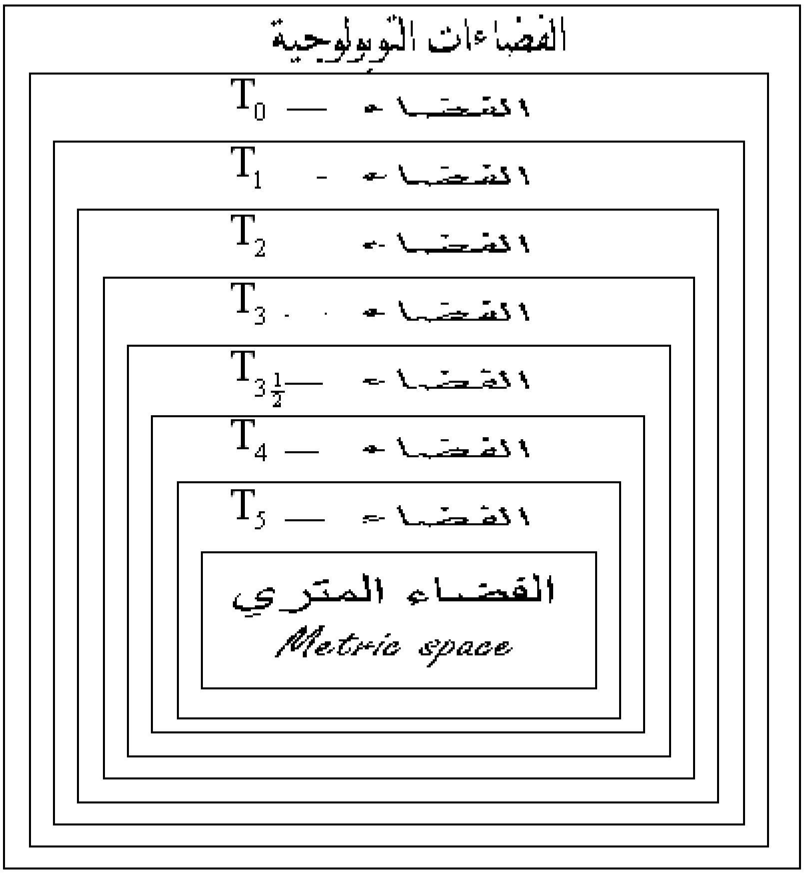
$$T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

نظرية :

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون فضاء طبيعي تماماً إذا وفقط إذا كان أي فضاء جزئي (Y,τ_Y) منه فضاء طبيعي .

ملاحظه :

عكس العلاقة $T_5 \Rightarrow T_4$ ليس صحيح في الحالة العامة لأن أي فضاء جزئي من فضاء $-T_5$ يكون فضاء$-T_4$ ولكن أي فضاء جزئي من فضاء $-T_4$ليس من الضروري أن يكون فضاء $-T_5$.



التمارين

(١) إذا كانت

$$X=\{a,b,c\}$$

$$\tau=\{X,\varphi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$

(i) هل (X,τ) فضاء منتظم .

(ii) هل (X,τ) فضاء طبيعي.

(iii) هل (X,τ) فضاء منتظم تماماً .

(٢) ليكن X فضاء تبولوجي ، B أساس للتبولوجي τ على X . B يسمى أساس منتظم إذا وجد لأي عنصر $x\in B$ مجموعة مفتوحة U تحقق $x\in U\subseteq\overline{U}\subseteq B$. اثبت أن الفضاء (X,τ) يكون فضاء منتظم إذا كان للفضاء X أساس منتظم .

(٣) اثبت أن كل فضاء منتهي ومنتظم فإنه يكون طبيعي.

(٤) لتكن $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in N\right\}$ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R.

بفرض أن

$$\tau=\{G\subseteq R:G=U-A_i\ ,\ U\in u,\ A_i\subseteq A\}$$

حيث (R,u) هو الفضاء العادي .

(I) اثبت أن τ تبولوجي على R .

(II) أثبت أن (R,τ) فضاء- T_2 .

(iv) اثبت أن (R,τ) فضاء غير منتظم .

حل التمارين

(١) إذا كانت

$$X=\{a,b,c\}$$

$$\tau=\{X,\varphi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$

(i) هل (X,τ) فضاء منتظم .

(ii) هل (X,τ) فضاء طبيعي.

(iii) هل (X,τ) فضاء منتظم تماماً .

الحل :

(i) هل (X,τ) فضاء منتظم .

لا لأن $\{a,c\}$ حيث $b\notin\{a,c\}$ مغلقة ولا توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان بحيث تحوي إحداهما العنصر وتحوي الأخرى المجموعة المغلقة .

(ii) هل (X,τ) فضاء طبيعي.

لا ، لأن

$$\Im=\{X,\varphi,\{a,c\},\{c\},\{a\}\}$$

$$\{c\}\cap\{a\}=\varphi$$

لكن لا توجد مجموعتان مفتوحتان في X تحويان $\{c\},\{a\}$ وتقاطعهم يساوي φ

(iii) هل (X,τ) فضاء منتظم تماما .

بما أنه ليس منتظم إذن ليس منتظم تماما .

(2)ليكن X فضاء تبولوجي ، B أساس للتبولوجي τ على X . B يسمى أساس منتظم إذا وجد لأي عنصر $x \in B$ مجموعة مفتوحة U تحقق $B \subseteq \overline{U} \subseteq U \in x$. اثبت أن الفضاء (X,τ) يكون فضاء منتظم إذا كان للفضاء X أساس منتظم .

الحل :

نفرض C مجموعة مغلقة ، $x \notin C$

$\leftarrow$ C^C مجموعة مفتوحة ، $x \in C^C$

$$C^C \in \tau \to C^C = \bigcup B_i \ , B_i \in \beta$$

$$x \in C^C \to x \in B_i$$

من تعريف الأساس المنتظم لأي $x \in B_i$ توجد مجموعة مفتوحة U تحقق

$$x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq B_i$$

$$\to \cup U \subseteq \cup \overline{U} \subseteq \cup B_i = C^C$$

$$\to C \subseteq \cap \overline{U}^C \subseteq \cap U^C$$

$$\because \ \overline{U}^C \in \tau \to C \subseteq \cap \overline{U}^C = V$$

$$U \cap V = U \cap \left(\cap \overline{U}^C\right) = U \cap \overline{U}^C = \varphi$$

(3)اثبت أن كل فضاء منتهي ومنتظم فإنه يكون طبيعي.

الحل:

لتكن $F_1, F_2 \in \Im_X$ بحيث $F_1 \cap F_2 = \varphi$ فإن لكل $x \in F_1 \ , x \notin F_2$ ومعطى أن X فضاء منتظم ، $x \notin F_2$ فإنه توجد مجموعتين مفتوحتين $U, V \in \tau$ بحيث أن $x \in V \ , \ F_2 \subseteq U$ وبما أن

X فضاء منتهي و أي مجموعة جزئية تكون منتهية

إذن F_1 مجموعة منتهية $F_1=\{x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n\}$ ولكل $x_i\in F_1$

نجد $x_i\notin F_2$ إذن يوجد U,V_i بحيث $x_i\in V_i$, $F_2\subseteq U$

$$V_i\cap U=\varphi$$

وهذا يعني

$$\cup\{x_i\}\subseteq\cup V_i$$

$$F_1\subseteq\cup V_i$$

$$U\cap(\cup V_i)=\cup(U\cap V_i)=\cup\varphi=\varphi$$

إذن X فضاء طبيعي.

(4) لتكن $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in N\right\}$ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R.

بفرض أن

$$\tau=\{G\subseteq R:G=U-A_i\ ,\ U\in u,\ A_i\subseteq A\}$$

حيث (R,U) هو الفضاء العادي .

(I) اثبت أن τ تبولوجي على R .

(II) أثبت أن (R,τ) فضاء- T_2.

(i) اثبت أن (R,τ) فضاء غير منتظم .

الحل :

(I) اثبت أن τ تبولوجي على R .

1- $R,\varphi\in\tau$

2- $\cup G_i\in\tau$

$$G_i=U_j-A_{ji}\rightarrow\bigcup_{j=1}G_i=(U_1-A_{1i})\cup(U_2-A_{2i})\cup\ldots\ldots$$

$$=(U_1\cup U_2\cup\ldots\ldots)-\overset{\min}{A_i}\in\tau$$

حيث $U_j \subseteq U$

-3

$$G_1 \cap G_2 = (U_1 - A_i) \cap (U_2 - A_i)$$
$$= (U_1 \cap U_2) - A_i \in \tau$$

إذن τ تبولوجي على R .

(II) أثبت أن (R,τ) فضاء- T_2 .

بما أن التبولوجي (R,U) هو T_2 إذن لكل $x,y \in R$ ، $x \neq y$
يوجد مجموعتان مفتوحتان $U,V \in \tau$ بحيث
$$x \in U, y \in V \ , \ U \cap V = \varphi$$
$$\rightarrow x,y \neq \frac{1}{n} \ , \ n \in N$$
لتكن $G_1, G_2 \in \tau$:

$$G_1 = U - A_1 \qquad , \qquad G_2 = V - A_1$$
$$\rightarrow x \in U - A_1 = G_1 \ , \quad y \in V - A_1 = G_2$$
$$G_1 \cap G_2 = (U - A_1) \cap (V - A_1) = (U \cap V) - A_1 = \varphi$$

إذن وجدت $G_1, G_2 \in \tau$ بحيث أن

$$x \in G_1 \wedge y \in G_2 \quad , \quad G_1 \cap G_2 = \varphi$$

وإذا كان $y=\frac{1}{j}$ ، $x=\frac{1}{i}$ ، $i, j\in N$:

يوجد في التبولوجي العادي $U, V \in G$ بحيث أن :

$$\frac{1}{i}\neq\frac{1}{j}$$

$$\frac{1}{i}\in U \ \wedge \ \frac{1}{j}\in V \ , \ U\cap V=\varphi$$

ولنفرض أن :

$$G_1 = U - A_{i+1} \qquad , \qquad G_2 = V - A_{j+1}$$

$$\to \frac{1}{i}\in G_1 , \quad \frac{1}{j}\in G_2$$

$$\to (G_1\cap G_2) = (U - A_{i+1})\cap(V - A_{j+1})$$

$$= (U\cap V) - A_n$$

حيث $n=\max\{i+1, j+1\}$

إذن وجدت $G_1, G_2 \in \tau$ مفتوحتان ومنفصلتان بحيث أن :

$$\frac{1}{i}\in G_1 , \quad \frac{1}{j}\in G_2 \qquad , \quad G_1\cap G_2=\varphi$$

إذن (R,τ) فضاء- T_2.

(i) اثبت أن (R,τ) فضاء غير منتظم .

$$\tau=\{G\subseteq R : G=U-A\}$$

$$\Im=\left\{R,\varphi,G^{c}=(U-A)^{c}=U^{c}\cup A\right\}$$

نفرض أن $x\notin G^{c}$

حتى يكون منتظم نفرض أن H $x\in H$ بحيث

$$G^{c}\subseteq F \quad ,H\cap F=\varphi$$

المجموعة الوحيدة التي تحوي G^{c} هي R

$$H\cap R\neq\varphi$$

إذن (R,τ) فضاء غير منتظم

الدرس الخامس
الفضاءات المحكمة (المتراصة)
Compact spaces

تعريف :

يقال أن العائلة $\zeta = \{G_i : i \in I\}$ من المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية X بأنها غطاء (Cover) للمجموعة A إذا كانت :

$$A \subseteq \underset{i}{\cup} G_i = G_1 \cup G_2 \cup ....$$

وإذا كانت عناصر العائلة ζ مجموعات مفتوحة يقال عندئذ أن ζ غطاء مفتوح (Open cover) للمجموعة A .

إذا كانت ζ غطاء للمجموعة A وكانت $\zeta^* = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$ عائلة جزئية من ζ ومنتهية فإن ζ^* تسمى غطاء جزئي منتهي للمجموعة A إذا تحقق أن :

$$A \subseteq \underset{i}{\cup} G_i = G_1 \cup G_2 \cup .... = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} G_i$$

أو نقول أن ζ تحتوي على غطاء جزئي منتهي (finite subcover) للمجموعة A إذا كان (X, τ) فضاء تبولوجي فإن $\zeta \subseteq P(X)$ فإن ζ تسمى غطاء للمجموعة X إذا كان اتحاد عناصر ζ يساوي X ، أي أن

$$X = \cup\{G_i : G_i \in \zeta \ , \forall\, i \in N\}$$

وتسمى ζ غطاء مفتوح إذا كانت عناصر ζ مجموعات مفتوحة .

ملاحظة :

إذا كانت العائلة ζ غطاء للمجموعة X فإن لكل $x \in X$
توجد $\zeta \ni G_{i_0}$ بحيث يكون $x \in G_{i_0}$.

تعريف :

الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى فضاء محكم (compact) إذا كان لكل غطاء مفتوح للفضاء X يوجد غطاء جزئي منتهي للفضاء X .

$$x \in X = \cup\{G_i : G_i \in \zeta \ , \forall\ i \in N\}$$

$$X \text{ is compact} \iff \forall\ \zeta=\{G_i : i \in N,\ G_i \in \tau\};\ \ X=\cup_i G_i ;$$

كما أن (X,τ) يكون فضاء غير محكم إذا وجد غطاء مفتوح للفضاء X لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي .

مثال :

كل فضاء تبولوجي منتهي يكون محكم .

الحل :

نفرض (X,τ) فضاء تبولوجي، X مجموعة منتهية ولتكن

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

إذا كانت $\zeta = \{G_i : i \in N\}$ غطاء مفتوح للفضـاء X فإنه لكل $x_j \in X$ توجد مجموعـة $G_{ij} \in \zeta$ بحيث أن $x_j \in G_{ij}$ ومن هذا نجد أن :

$$x_1 \in G_{i1} \ , \ x_2 \in G_{i2}, \ldots, x_n \in G_{in}$$

ومن ثم فإن

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \ldots \cup G_{in}$$

أي أن $\zeta^* = \{G_{ij}\}_{j=1}^{n}$ غطاء جزئي منتهي للمجموعـة X .

مثال :

فضاء المكملات المنتهيـة (X,C) فضاء محكم .

الحل :

(i) إذا كانت X منتهيه فإن X محكمة مباشرة .

(ii) بفرض أن X لا نهائية وأن $\zeta = \{G_i : i \in N\}$ غطاء مفتوح للمجموعـة X . إذا كانت $G_0 \in \zeta$ فإن G_0^c مجموعة منتهيـة ولتكن $G_0^c = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ وحيث أن ζ غطاء للمجموعـة X فإنه توجد $G_{ij} \in \zeta$ بحيث تكون :

$$a_1 \in G_{i1} \ , \ a_2 \in G_{i2}, \ldots, a_n \in G_{in}$$

ومن هذا نجد أن

$$G_0^c \subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \ldots \cup G_{in}$$

ومن ثم فإن

$$X = G_0 \cup G_0^c \subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \ldots \cup G_{in}$$

ولكن

$$G_{i1} \cup G_{i2} \cup \ldots \cup G_{in} \cup G_0 \subseteq X$$

إذاً

$$X = G_0 \cup G_{i1} \cup G_{i2} \cup \ldots \cup G_{in}$$

أي أن ζ تحتوي على غطاء جزئي منتهي وبالتالي فإن الفضاء X محكم .

مثال:

أي فضاء متقطع (X,D) وغير منتهي هو فضاء غير محكم .

الحل :

نعتبر $\zeta = \{\{p\} : p \in X\}$ حيث أن $\{p\}$ مجموعة مفتوحة لكل $p \in X$
فإن ζ غطاء مفتوح للمجموعة X
ولا يحتوي على غطاء جزئي منتهي
وعلى هذا فإن X غير محكمة .

مثال :

الفضاء المصمت (X,I) هو فضاء محكم.

الحل :

حيث أن $I = \{X, \varphi\}$ فإن أي غطاء مفتوح للمجموعة X يجب أن يكون على الصورة $\zeta = \{X\}$
وهو غطاء منتهي لأنه لا يحتوي إلا عنصر واحد هو X .

مثال :

بين أن فضاء النقطة المستبعدة (X,E) بدون النقطة p هو فضاء محكم .

الحل :

حيث أن
$$E_p = \{\varphi, U \subseteq X : p \notin U\}$$
وإذا كانت ζ غطاء مفتوح للمجموعة X، $p \in X$ فإنه
توجد $G_{i0} \in \zeta$ بحيث تكون
$p \in G_{i0}$.
لكن المجموعة X هي
المجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحتوي p ولهذا فإن
$X \in \zeta$ لكل غطاء مفتوح ζ للمجموعة X .
وبالتالي فإن $\{X\}$ غطاء جزئي منتهي
إذاً X فضاء محكم .

مثال :

بين أن فضاء النقطة المختارة (X,P) هو فضاء غير محكم .

الحل :

نعلم أن
$$P_p = \{\varphi, U \subseteq X : p \in U\}.$$
وبفرض أن X لا نهائية .
إذا كانت $\zeta = \{\{p,x\} : x \in X\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X فإنه
لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي

لأن X لا نهائية
وبالتالي فإن X غير محكم .

مثال :
الفضاء العادي (R,U) غير محكم .

تعريف :

يقال أن عائلة المجموعات $\zeta=\{G_i : i\in N\}$ لها خاصية التقاطع المنتهي Finite Intersection Property (F.I.P) إذا كان تقاطع أي عائلة جزئية منتهية $\{G_{i1},G_{i2},\ldots,G_{in}\}$ هو مجموعة غير خالية .

أي أن

$$G_{i1}\cap G_{i2}\cap\ldots\cap G_{in}\neq\varphi$$

ويقال أن ζ لها خاصية التقاطع الغير خالي إذا كان

$$\cap\{G_i : G_i\in\zeta\}\neq\varphi$$

مثال توضيحي:

العائلة $\zeta=\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right) : n\in N\right\}$

تملك خاصية التقاطع المنتهي

لأن تقاطع أي عائلة جزئية منتهية هو مجموعة غير خالية لأن

$$(0,r_1)\cap(0,r_2)\cap\ldots\cap(0,r_m)=(0,r)\neq\varphi$$

حيث $r=\min\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$.

ونلاحظ هنا أن ζ نفسها لها خاصية التقاطع الخالي لأن :

$$\cap\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right):n\in N\right\}=\varphi$$

مثال :

العائلة $\zeta=\{(-\infty,n]:n\in Z\}$

لها خاصية التقاطع الخالي لأن :

$$\cap\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right):n\in Z\right\}=\varphi$$

ولكن ζ تحقق F.I.P.

لأن تقاطع عدد منتهي منها هو مجموعة غير خالية حيث :

$$(-\infty,\frac{1}{n_1}]\cap(-\infty,\frac{1}{n_2}]\cap\ldots\cap(-\infty,\frac{1}{n_m}]=(-\infty,r)$$

حيث أن

$$r=\min\left\{\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2},\ldots,\frac{1}{n_m}\right\}$$

نظرية :

في أي فضاء تبولوجي الخواص الآتية متكافئة :

(١) X فضاء محكم .

(٢) كل عائلة من المجموعات المغلقة في X تحقق F.I.P. لها تقاطع غير خالي .

البرهان :

$$(2) \Leftarrow (1)$$

بفرض أن X فضاء محكم ، $\zeta = \{F_i : i \in N\}$ عائلة من المجموعات المغلقة في X تحقق F.I.P.
ولنفرض جدلا أن :

$$\underset{i}{\cap}\{F_i : i \in N\} = \varphi$$

من ذلك نحصل على أن العائلة
$\{F_i^c : i \in N\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X
وبالتالي يوجد غطاء جزئي منتهي

$$\{F_{ij}^c : i \in N \ , j = 1,2,\dots,n\}$$

للمجموعة X
لأن X فضاء محكم .

إذاً $X = \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} F_{ij}^c = X - \left(\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}} F_{ij}\right)$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}} F_{ij} = F_{i1} \cap F_{i2} \cap \dots \cap F_{in} = \varphi$$

وهذا تناقض مع الفرض أن ζ تحقق F.I.P. ومن ذلك نحصل على :

$$\underset{i}{\cap}\{F_i : i \in I\} \neq \varphi$$

$$(1) \Leftarrow (2)$$

بفرض أن أي عائلة من المجموعات المغلقة في X تحقق .F.I.P
لها تقاطع غير خالي .
ولنفرض جدلا أن X فضاء غير محكم ،
وبالتالي يوجد غطاء مفتوح $\zeta = \{G_i : i \in I\}$ للمجموعة X
لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي وليكن
$\{G_{ij}\}_{j=1}^{n}$ أي أن

$$X \neq G_{i1} \cap G_{i2} \cap \ldots \cap G_{in}.$$

ومن ثم فإن

$$X - \left(\bigcup_{j=1}^{n} G_{ij} \right) = \bigcap_{j=1}^{n} \left(X - G_{ij} \right) \neq \varphi \quad ; \; \forall \; n \in N$$

ولكن $\{ G_i^c : G_i \in \zeta \}$ عائلة من المجموعات المغلقة تحقق
F.I.P.
وطبقا للفرض (2) فإن

$$\bigcap_{i} \{ G_i^c : G_i \in \zeta \} \neq \varphi$$

أي أن

$$X - \bigcup_{i} \{ G_i : G_i \in \zeta \} \neq \varphi$$

وهذا تعارض مع كون أن ζ غطاء للمجموعة X
ومن ثم فإن X فضاء محكم .

المجموعات الجزئيـة المحكمـة :
(Compact Subsets)

تعريف :

المجموعة الجزئية $A \subseteq X$ من الفضاء التبولوجي (X,τ) تكون محكمة إذا كان كل غطاء مفتوح للمجموعة A يحتوي على غطاء جزئي منتهي ، أي أن

$$A \subseteq X \text{ is compact } \Leftrightarrow \forall A \subseteq \bigcup_{i=1} G_i \quad , G_i \in \tau \ ;$$

$$\exists \{G_{ij}\}_{j=1}^{n} \ ; \text{ such that } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}$$

نظرية :

كل مجموعة منتهية فيأي فضاء تبولوجي تكون محكمة .

نظرية : (هاين- بورل Heine – Borel)

أي مجموعة جزئية K من R تكون محكمة إذا وفقط إذا كانت محدودة ومغلقة .

ملاحظة :

من نظرية هاين بورل نستنتج أن كل غطاء مفتوح لأي فترة مغلقة ومحدودة

يحتوي على غطاء جزئي منتهي وأن كلاً من شرطي الإغلاق والمحدودية ضروري .

مثال :

إذا كانت $A=(0,1)$ فإن A ليست محكمة لأن

$$\zeta=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right):n\in N\right\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة A .

$$A\subset\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\ldots$$

ولكن ζ لا تحتوي على غطاء جزئي منتهي .
من أجل ذلك نفرض أن:

$$\zeta^*=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_m,b_m)\}$$

عائلة جزئية منتهية من ζ . إذا كانت

$$0<\varepsilon=\min(a_1,a_2,\ldots,a_m)$$

فإن

$$(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)\cup\ldots\cup(a_m,b_m)\subset(\varepsilon,1)$$

ولكن $(0,\varepsilon]\cap(\varepsilon,1)=\varphi$.

وبالتالي فإن ζ^* لا تغطي A وبذلك تكون A غير محكمة .

توضيح :

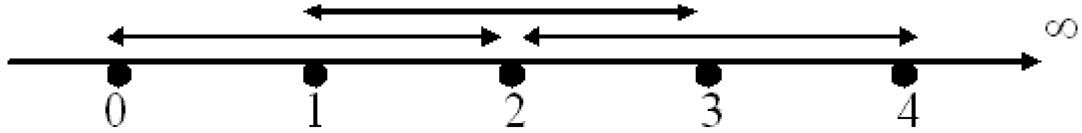
إذا تم إستبعاد فترة واحدة ولتكن $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ فإن العدد $\frac{1}{3}$ مثلا لايوجد له غطاء .

مثال :

المجموعة $A=[1,\infty)$ غير محكمة لأن

$$\zeta=\{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة A لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي .



نظرية :

كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء محكم تكون محكمة .

البرهان :

بفرض أن (X,τ) فضاء محكم ، F مجموعة جزئية مغلقة في X
والمطلوب إثبات أن F محكمة

ولذلك نفرض أن $\zeta=\{G_i\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F
أي أن
$F\subseteq \bigcup_i G_i$.

عندئذ تكون F^C مجموعة مفتوحة حيث :

$$X = F \cup F^C \subseteq \left\{\bigcup_i G_i\right\} \cup \left\{F^C\right\}$$

وبالتالي فإن

$$\left\{\bigcup_i G_i\right\} \cup \left\{F^C\right\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة X .

ومن ذلك ينتج أنه يوجد غطاء جزئي منتهي للمجموعة X

هو $\left\{G_{i1} \cup G_{i2} \cup .. \cup G_{im}\right\} \cup \left\{F^C\right\}$

لأن X فضاء محكم .

لكن

$$F \cap F^C = \varphi, \quad F \cup F^C = X$$

وهذا يعني أن

$F \subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup .. \cup G_{im}$ ،

أي أن F مجموعة محكمة .

نظرية :

الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) من الفضاء (X, τ) يكون محكما إذا وفقط إذا كانت Y محكمة في الفضاء (X, τ) .

البرهان :

أولا :

نفرض أن (Y, τ_Y) هو فضاء جزئي من الفضاء (X, τ)

بحيث أن

Y مجموعة محكمة في الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) .

المطلوب إثبات أن Y
محكمة في الفضاء (X,τ)

ولذلك نفرض $\zeta=\{G_i : i\in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y
(حيث $G_i\in\tau$ لكل $i\in I$) بمجموعات مفتوحة من X
أي أن $Y\subseteq \underset{i}{\cup} G_i$.

ومن ذلك نجد أن

$$Y\subseteq Y\cap\left(\underset{i}{\cup} G_i\right)=\cup\left(Y\cap G_i\right)=\underset{i}{\cup} H_i$$

حيث

$$H_i=Y\cap G_i\in\tau_Y$$

وبالتالي فإن العائلة $\{H_i : i\in I\}$
غطاء للمجموعة Y بمجموعات مفتوحة من Y ،
ومن ثم فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{H_{ij}\}_{j=1}^{n}$
بحيث أن :

$$\begin{aligned}Y&\subseteq H_{i1}\cup H_{i2}\cup\ldots\ldots\cup H_{in}\\&=\left(Y\cap G_{i1}\right)\cup\left(Y\cap G_{i2}\right)\cup\ldots\cup\left(Y\cap G_{in}\right)\\&\subseteq G_{i1}\cup G_{i2}\cup\ldots\ldots\cup G_{in}\end{aligned}$$

وهذا يعني أن Y محكمة في الفضاء (X,τ).