ثانيا :

العكس نفرض أن Y محكمة في الفضـاء (X,τ) ، $\zeta=\{G_i\}$ غطاء للمجموعـة Y بمجموعات مفتوحـة من Y ، أي أن
$G_i \in \tau_Y \ , \ Y \subseteq \underset{i}{\cup} G_i$.
ومن تعريف الفضـاء الجـزئـي
نجد أنه لكل $i \in I$ توجد $H_i \in \tau$ بحيث أن
$G_i = Y \cap H_i$ ، أي أن

$$H_i \in \tau, \quad Y \subseteq \underset{i}{\cup} G_i = \cup\left(Y \cap H_i\right) = Y \cap \left(\underset{i}{\cup} H_i\right) \subseteq \underset{i}{\cup} H_i$$

وبالتـالـي فإن العائلـة $\{H_i : i \in I\}$
غطاء مفتوح للمجموعـة Y بمجموعات جزئيـة مفتوحـة من X .

وحيث أن Y محكمة في الفضـاء (X,τ)
فإنه توجد عائلة جزئيـة منتهيـة $\{H_{ij}\}_{j=1}^{n}$ بحيـث أن
$Y \subseteq \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} H_{ij}$. وهذا يؤدي إلـى أن

$$Y \subseteq Y \cap \left(\overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} H_{ij}\right) = \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}}\left(Y \cap H_{ij}\right) = \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} G_{ij}$$

أي أن ζ تحتوي على غطاء جزئي منتهـي للمجموعـة Y
ومن ثم فـإن Y محكمة في الفضـاء الجـزئـي (Y,τ_Y) .

مثال :

كل مجموعة جزئية من الفضـاء المصـمت (X,I) تكون محكمـة .

مثال :

كل مجموعة جزئية من فضاء المكملات المنتهية (X,C) تكون محكمة .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي وكانت $F \subseteq X$. إذا كانت A مجموعة محكمة ، F مجموعة مغلقة فإن $A \cap F$ تكون مجموعة محكمة .

البرهان :

بفرض أن $\zeta = \{G_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة $A \cap F$

أي أن $A \cap F \subseteq \underset{i}{\cup} G_i$.

ومن ثم فإن $A \subseteq \left(\underset{i}{\cup} G_i\right) \cup F^C$.

وحيث أن F مجموعة مغلقة في X فإن

F^C مجموعة مفتوحة

وبالتالي فإن

$$\zeta^* = \{G_i\} \cup \{F^C\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة A ولكن A محكمة .

إذاً يوجد غطاء جزئي منتهي

$\{G_{ij}\}_{j=1}^{n} \cup \{F^C\}$ لمجموعة A

أي أن $A \subseteq \{G_{ij}\}_{j=1}^{n} \cup \{F^C\}$

ومن ثم فإن

$$A \cap F \subseteq \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} G_{ij}$$

و هذا يؤدي إلى أن $A \cap F$ مجموعة محكمة .

(١) بين أنه إذا كان الفضاء (X,τ) محكم ، وكان (X,τ^*) فضاء تبولوجي بحيث أن $\tau^* \subseteq \tau$ فإن (X,τ^*) فضاء محكم أيضاً.

(٢) برهن أن إتحاد عدد منته من المجموعات المحكمة هو مجموعة محكمة .

حل التمارين

(١) بين أنه إذا كان الفضاء (X,τ) محكم ، وكان (X,τ^*) فضاء تبولوجي بحيث أن $\tau^* \subseteq \tau$ فإن (X,τ^*) فضاء محكم أيضاً.

الحل:

نفرض غطاء مفتوح $\zeta = \{G_i : G_i \in \tau^*\}$

وبما أن $\tau^* \subseteq \tau$ إذن $G_i \in \tau$

وبما أن الفضاء (X,τ) محكم إذن توجد عائلة منتهية

$$\zeta = \{G_i : G_i \in \tau, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

إذن وجدنا غطاء منتهي $\zeta = \{G_i : G_i \in \tau^*, i = 1, 2, \ldots, n\}$

إذن (X,τ^*) فضاء محكم.

(2)برهن أن إتحاد عدد منته من المجموعات المحكمـة هو مجموعة محكمـة .

الحل :

نفرض أن $G=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ حيث G عائلة من المجموعات المحكمـة (A_i مجموعة محكمـة)

نفرض غطاء مفتوح للمجموعـة G $(G\subseteq\bigcup\limits_{i=1} O_i)$ هذا الغطاء

سيغطي كل مجموعـة A_i ، $i=1,2,\ldots,n$ ، A_i

محكمة إذن يوجد غطاء منتهي لكل A_i

$$A_1\subseteq\bigcup\limits_{1}^{n} O_i \quad , \quad A_2\subseteq\bigcup\limits_{1}^{m} O_i \quad , \quad \ldots\ldots, A_n\subseteq\bigcup\limits_{1}^{L} O_i$$

$$\rightarrow A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{r} O_i$$

$$\therefore G\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{r} O_i$$

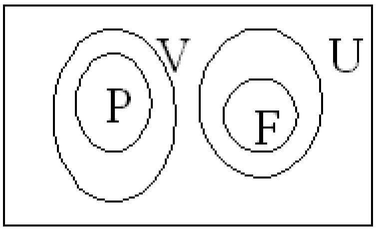
إذن وجد غطاء جزئي منتهي لـ G ←

G محكمة .

الدرس السـادس
الأحكام ومسلمات الفصـل
(Compactness and separation Axioms)

نظرية:

بفرض أن (X,τ) فضـاء -T_2 ، $F \subseteq X$مجموعة جزئيـة محكمـة من X حيث أنه لأي نقطـةp، $F \not\ni p$فإنه توجد مجموعتـان مفتوحتـان U,V في X بحيث تكون $p \in V, F \subseteq U, U \cap V = \varphi$.



البرهان :

نفرض أن $x \in F$ وحيث أن $p \notin F$ فإن $x \neq p$.

حيث أن (X,τ) فضـاء T_2- فإنه توجد

$U_x, V_x \in \tau$ بحيث أن

$x \in U_x, p \in V_x \quad \text{and} \quad U_x \cap V_x = \varphi$.

ومن ثم فإن العائلـة $\{U_x : x \in F\}$ غطاء مفتوح للمجموعـة F

وبما أن F مجموعة محكمـة فـي X

فإنـه توجد عائلـة جزئيـة منتهيـة

$$\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$$

تغطـي F أي أن

$$F \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} = U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

وبوضع

$$V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap .. \cap V_{x_n} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

نستنتج من ذلك أن $U, V \in \tau$ حيث $p \in V, F \subseteq U;$:

$$U \cap V = \left(U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup .. \cup U_{x_n}\right)\left(V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap .. \cap V_{x_n}\right)$$
$$= \left(U_{x_1} \cap V_{x_1}\right) \cup ... \cup \left(U_{x_n} \cap V_{x_n}\right) = \varphi \cup ... \cup \varphi = \varphi$$

نتيجة :

كل مجموعة جزئية محكمة في الفضاء– T_2 هي مغلقة .

البرهان :

بفرض أن (X, τ) فضاء - T_2، F مجموعة محكمة في X .

المطلوب إثبات أن F مغلقة

وهذا يكافئ أن F^C مجموعة مفتوحة .

لذلك نفرض أن $p \in F^C$ وهذا يعني أن $p \notin F$

ومن ذلك نستنتج أنه توجد $U, V \in \tau$ بحيث أن

$p \in U, F \subseteq V; \quad U \cap V = \varphi$.

وحيث أن $U \cap V = \varphi$ نجد أن

$U \cap F = \varphi$ ومنها

$p \in U \subseteq F^C$.

وهذا يؤدي إلى أن

$F^C = \cup\{U : p \in F^C\}$،

وهي مجموعة مفتوحة لأنها اتحاد لمجموعات مفتوحة .

نتيجة :

إذا كانت A مجموعة جزئية محكمة من الفضاء- T_2 وإذا كانت $p \notin A$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة U لكل $p \notin A$ بحيث يكون $p \in U \subseteq A^C$.

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء- T_2 ومحكما فإنه يكون فضاء طبيعي (Normal).

البرهان :

بفرض أن (X,τ) فضاء $-T_2$ ومحكما.

ولتكن F_1, F_2 مجموعتان مغلقتان بحيث ان

$F_1 \cap F_2 = \varphi$.

وبالتالي فإن F_1, F_2 مجموعات محكمة.

ولكل $p \notin F_1$ فإن $p \in F_2$.

وحيث أن X فضاء - T_2 ، F_1 محكمة فإنه يوجد

مجموعتان مفتوحتان U_p, V_p بحيث يكون

$$F_1 \subseteq U_p ; p \in V_p ; U_p \cap V_p = \varphi$$

وعلى هذا فإن العائلة $\{V_p : p \in F_2\}$

غطاء مفتوح للمجموعة F_2

وحيث أن F_2 محكمة ، فإنه توجد

$V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots, V_{p_n}$ بحيث أن

$$F_2 \subseteq V_{P_1} \cup V_{P_2} \cup .. \cup V_{P_n}$$

وبوضع

$$U = U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap .. \cap U_{p_n}$$

فإن $U, V \in \tau$ ؛ $F_1 \subseteq U$ ؛ $F_2 \subseteq V$ ونجد أن

$$U \cap V = \left(U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup .. \cup U_{p_n}\right)\left(V_{p_1} \cap V_{p_2} \cap .. \cap V_{p_n}\right)$$
$$= \left(U_{p_1} \cap V_{p_1}\right) \cup ... \cup \left(U_{p_n} \cap V_{p_n}\right) = \varphi$$

أي أن X فضاء طبيعي .

نتيجة :

إذا كان (X, τ) فضاء $- T_2$ ومحكماً فإنه يكون فضاء منتظم .

البرهان :

حيث أن X فضاء $- T_2$ ومحكم أي أن

X فضاء طبيعي .

لكن X فضاء $- T_1$ (لأنه فضاء T_2-)

وبالتالي فإن

X فضاء- T_4

ومن ذلك نستنتج أن

X فضاء- T_3

ومن ثم فإن X فضاء منتظم .

وبالتالي فإن :

$T_2 - \text{space} + \text{compact space} = T_3$

نظرية :

إذا كانت F مجموعة جزئية محكمة من الفضـاء المنتظم (X,τ) ، U مجموعة مفتوحة تحتوي F (أي أن $U \supseteq F$) فإنه توجد مجموعة مفتوحة V بحيث يكون $U \supseteq \bar{V} \supseteq V \supseteq F$ أي أن U تحتوي على جوار مغلق للمجموعة F .

نتيجة :

$$T_3 - \text{space} + \text{compact space} = T_4$$

ملاحظة :

كل فضاء محكم ومنتظم يكون طبيعـي .

الإحكام والإتصال :
Compactness and Continuity

نظرية :

إذا كانت $f : X \to Y$ دالة متصلة من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y وكان X فضاء محكم فإن $f(X)$ تكون مجموعة محكمة .

البرهان :

نفرض أن $\zeta = \{G_i : i \in I\}$

غطاء مفتوح للمجموعة $f(X)$. أي أن

$$f(X) \subseteq \bigcup_i G_i$$

ومن ثم فإن

$$X \subseteq \bigcup_i f^{-1}(G_i)$$

وحيث أن f دالة متصلة فإن

العائلة $\{f^{-1}(G_i)\}$ غطاء مفتوح غطاء مفتوح للمجموعة X .

لكن X فضاء محكم ومن ثم فإنه

توجد عائلة جزئية منتهية $\{f^{-1}(G_{ij})\}_{j=1}^{n}$ بحيث تكون

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(G_{ij}) .$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$f(X) = f\left(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(G_{ij})\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{n} ff^{-1}(G_{ij})\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (G_{ij})$$

وعليه فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{G_{ij}\}_{j=1}^{n}$ من ζ تغطي $f(X)$

أي أن $f(X)$ محكمة .

نتيجة :

إذا كانت $f : X \to Y$ دالة متصلة وشاملة من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y وإذا كان X فضاء محكم فإن Y فضاء محكم أيضا .

نظرية :

إذا كانت $f : X \to Y$ دالة أحادية من الفضاء التبولوجي X المحكم إلى فضاء هاوسدروف Y فإن $X \cong f(X)$ ، أي أن $f(X)$ ، X متكافئتان تبولوجياً.

البرهان :

واضح أن الدالة $f : X \to f(X)$ دالة شاملة .
وحيث أن f متصلة وأحادية فإن
$f^{-1} : f(X) \to X$ موجودة .

سنحاول الآن إثبات أن f^{-1} دالة متصلة ،
لذلك نفرض أن F مجموعة مغلقة في X وبالتالي فإن
F مجموعة محكمة في الفضاء الجزئي $f(X)$ من فضاء
هاوسدورف Y فإن
$f(X)$ يكون فضاء هاوسدورف ومن ثم فإن $f(F)$
مجموعة مغلقة .
لكن

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$$

وبالتالي فإن الصورة العكسية للمجموعة المغلقة F وفق الدالة
العكسية f^{-1} مجموعة مغلقة ، وهذا يؤدي إلى أن

$f : X \to f(X)$ دالـة تبولوجيـة ،
أي أن $X \cong f(X)$.

نتيجة :

خاصية أن يكون الفضاء محكم هي خاصـية تبولوجيـة .

نظرية :

إذا كان X فضاء محكم ، Y فضاء هاوسدورف فـإن الدالـة المتصـلة $f : X \to Y$ تكون مغلقة .

البرهان :

نفرض أن F مجموعة مغلقة فـي X .
وحيث أن X فضاء محكم فإن
$f(F)$ تكون مجموعة محكمـة .
لكن Y فضـاء هاوسدورف
ينتج من ذلك أن $f(F)$ مجموعة مغلقة
ومن ثم فإن
صورة كل مجموعة مغلقة هـي مجموعـة مغلقـة ،
أي أن f دالـة مغلقة .

نتيجة :

إذا كان X فضاء محكم ، Y فضاء هاوسدورف فإن كل دالـة تنـاظر أحادي ومتصـلة $f : X \to Y$ تكون هوميومورفيزم .

البرهان :

حيث أن f تناظر أحادي ومتصلة
فإننا سوف نبرهن فقط على أن $f^{-1} : Y \to X$ متصلة
وهذا يكافئ إثبات أن f دالة مفتوحة .

لذلك نفرض أن G مجموعة مفتوحة في X فإن
G^{C} مجموعة مغلقة في X .
وبالتالي فإن $f\left(G^{C}\right)$ مجموعة مغلقة لكن
$f\left(G^{C}\right) = \left(f\left(G\right)\right)^{C}$.
لأن f دالة تناظر أحادي ولذلك فإن $f(G)$
مجموعة مفتوحة في Y .

بعض أنواع الإحكام :

- الفضاء المحكم محلياً
- الفضاء المحكم تتابعياً
- الفضاء المحكم عدياً

الفضاءات المحكمة محلياً
(Locally compact spaces)

تعريف:

يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) محكم محلياً إذا وجد جوار محكم لكل $p \in X$.

يتضح من التعريف أن كل فضاء محكم يكون فضاء محكم محلياً أي أن :

$$\text{compact} \Rightarrow \text{Locally compact}$$

لأنه إذا كان X محكم فإنه لكل $p \in X$ يوجد جوار محكم وهو المجموعة X .

سؤال :

اثبت صحة أو خطأ العبارة التالية :
كل فضاء محكم محلي هو فضاء محكم .

الحل :

العبارة خاطئة ، مثال يوضح خطأ العبارة :

الفضاء العادي (R,U) محكم محلياً لأنه لكل $p \in R$ يوجد الجوار $[p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ وهذا الجوار مغلق ومحدد وبالتالي طبقا لنظرية هاين – بورل فإن جوار p محكم وعلى ذلك

فإن R محكم محلياً .
ونعلم أن R ليس فضاء محكم لأن
مجموعة الفترات المفتوحة :

$$\zeta = \{\ldots,(-3,-1),(-2,0),(-1,1),(0,2),(1,3),\ldots\}$$
$$=\{(n,n+2) : n \in Z\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة R
ولكنها لا تحتوي على غطاء جزئي منتهي .

مثال :

الفضاء المتقطع (X,D) محكم محلياً لأن لكل $p \in X$ تكون $\{p\}$ جوار محكماً للنقطة p لأن $\{p\}$ مجموعة محكمة (لأنها منتهية).

ملاحظة :

الفضاء المصمت (X,I) محكم محلياً لأن X فضاء محكم .

ملاحظة :

إذا كان (X,τ) الفضاء محكم محلياً وكانت A مجموعة جزئية مغلقة في X فإن A تكون محكمة محلياً.

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء T_2- فإن X يكون فضاء محكم محلياً إذا و فقط إذا كان لكل $p \in X$ يوجد جوار مفتوح V بحيث أن $\bar{V}$ تكون مجموعة محكمة .

البرهان :

حيث أن (X,τ) فضاء محكم محلياً فإن
لكل $p \in X$ يوجد جوار N محكم ،
ومن ثم فإن
$V = N^{\circ}$ جوار مفتوح للنقطة p
وحيث أن N مجموعة محكمة في الفضاء $-T_2$
فإن N مجموعة مغلقة وبالتالي فإن :
$$N^{\circ} \subseteq N \Rightarrow \overline{N^{\circ}} \subseteq \overline{N} = N$$
لكن $\overline{V} = \overline{N^{\circ}}$ مجموعة مغلقة وجزئية من مجموعة محكمة ،
إذاً V مجموعة محكمة .

ومن جانب آخر ،

إذا كان X فضاء- T_2
ولكل $p \in X$ يوجد جوار مفتوح V بحيث تكون
$\overline{V}$ مجموعة محكمة وعلى هذا فإن
$\overline{V}$ جوار محكم للنقطة p
ومن ثم فإن X فضاء محكم محلياً .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء محكم محلياً وكانت $f : X \to Y$ دالة متصلة ومفتوحة فإن $f(X)$ مجموعة محكمة محلياً .

البرهان :

نفرض أن $y \in f(x)$ ، إذاً توجد

$x \in X$ بحيث أن $y=f(x)$.

بما أن X فضاء محكم محلياً

إذاً يوجد جوار محكم N للنقطة x .

لكن حيث أن الدالة f متصلة فإن

$f(N)$ محكمة .

وحيث أن f دالة مفتوحة فإن

$f\left(N^{\circ}\right)$ مجموعة مفتوحة تحتوي y لأن $x \in N^{\circ}$ ،

ومن ثم فإن

$$y = f(x) \in f\left(N^{\circ}\right) \subseteq f(N) = U$$

وبالتالي فإن U جوار محكم للنقطة y ،

أي أن $f(X)$ يكون فضاء محكم محلياً .

نتيجة :

خاصية أن يكون الفضاء محكم محلياً هي خاصية تبولوجية .

الفضاءات المحكمة تتابعياً

تعريف :

الفضاء (X,τ) يكون محكم تتابعياً إذا كانت كل متتابعة في X تحتوي متتابعة جزئية تقاربية.

مثال :

كل مجموعة منتهية في الفضاء (X,τ) تكون محكمة تتابعياً .

الحل :

بفرض أن A مجموعة منتهية في الفضاء X ،
$(a_n)=\{a_1,a_2,...,a_m\}$
متتابعة في A . حيث أن
A منتهية فإنه على الأقل عنصر من A
ليكن a_0 يجب أن يظهر بعدد لا نهائي من المرات في المتتابعة ،
ومن ثم فإنه
$\{a_0,a_0,...,a_0\}$ متتابعة جزئية من
(a_n) وهي متقاربة في A إلى a_0 .

مثال :

أي فترة مفتوحة في R ليست محكمة تتابعياً .

الحل :

لتكن $A=(0,1)$
فترة مفتوحة في الفضاء (R,U)
نعتبر المتتابعة

$$(a_n)=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right\}$$

في المجموعة A .
نلاحظ أن (a_n) تتقارب إلى 0
وبالتالي كل متتابعة جزئية منها
تتقارب إلى 0 ولكن $0 \notin A$.
إذاً A ليست محكمة تتابعياً .

الفضاءات المحكمة عدياً
(Countable compact)

تعريف :

الفضاء (X,τ) يسمى محكم عدياً إذا كان كل غطاء مفتوح قابل للعد للمجموعة X يحتوي على غطاء جزئي منتهي .

نظرية :

في أي فضاء تبولوجي تكون الشروط التالية متكافئة :

(1) X فضاء محكم عدياً .

(2) أي عائلة من المجموعات الجزئية القابلة للعد والمغلقة في X تحقق .F.I.P تملك تقاطع غير خالي .

(3) كل مجموعة جزئية غير منتهية من X تملك نقطة تراكم .

(4) كل متتابعة في X تملك نقطة لاصقة .

نظرية :
(بولزانو – فيراشتراس Bolzano-Weierstrass)

كل مجموعة جزئية من R محددة وغير منتهية لها نقطة تراكم .

مثال :

كل فترة محدودة ومغلقة $A=[a,b]$ من R محكمة عدياً .

الحل :

إذا كانت B مجموعة جزئية غير منتهية من A فإن
A تكون محدودة .
طبقاً لنظرية بولزانو – فيراشتراس
فإن B لها نقطة تراكم p وحيث أن A
مغلقة فإن $p \in A$ ،
أي أن A محكمة عدياً .

مثال :

الفترة المفتوحة $A=(0,1)$ ليست محكمة عدياً .

الحل :

نعتبر المجموعة $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$ الجزئية من A ،
فإن B لا نهائية ، B
لها على الأكثر نقطة تراكم 0
حيث $0 \notin A$.

ملاحظـة :

الـعلاقة بين الفضـاءات المحكمة ، المحكمـة تتابعياً والمحكمـة عدياً تعطـى بالصـورة :

محكم تتابعياً $\Leftarrow$ محكم عدياً $\Rightarrow$ محكم

Compact $\Rightarrow$ Countable Compact $\Leftarrow$ Sequentially Compact

نظرية :

إذا كان X فضـاء تبولـوجـي فـإن :

(١) إذا كان X فضاء محكمـاً فإن X محكم عدياً .

(٢) إذا كان X فضاء محكم تتابعياً فإن X محكم عدياً .\

التمارين

1) بين أن خاصية الفضاء محكم تتابعيا خاصية تبولوجية .

2) (X,τ) منتظم ، Aمحكمة ، B مغلقة ، $A \cap B = \varphi$
اثبت يوجد $U,V \in \tau$, $B \subseteq V$, $A \subseteq U$, $U \cap V = \varphi$.

3) إذا كانت A مجموعة جزئية محكمة في فضاء- T_2 ،
برهن أنه إذا كانت $x \notin A$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة V بحيث $x \in V \subseteq A^c$.

4) بين أي مجموعة جزئية غير منتهية من الفضاء المتقطع ليست محكمة.

5) بين أي مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المحكم تتابعيا تكون محكمة تتابعيا .

حل التمـارين

١) بين أن خاصـية الفضاء محكم تتابعيا خاصـية تبولوجيـة .

الحل :

نفرض $f : X \to Y$ دالة تبولوجيـة
اذن f متصلة، f^{-1} متصلة f، تقابل
نفرض X فضاء محكم تتابعيا

ونريد اثبـات أن Y محـكم تتابعيا
نفرض وجود متتابعـة $< A_n >$ في Y
ونريد إثبات أن لـها متتابعـة جزئيـه تقاربيـه
من كون f^{-1} متصـلـة إذن
توجد متتابعة فـي X ولتكن $f^{-1}(< A_n >)$ بحيث
صـورتـها هي المتتابعـة $< A_n >$
و X محكم تتابعيا إذن
توجد متتابعة جزئيـة من $f^{-1}(< A_n >)$
تقاربية وتتقارب إلـى x (نقطة تراكم)
من كون f متصلـه وتقابل إذن
$f(x)$ نقطه تراكم فـي Y للمتتابعة $< A_n >$
إذن وجدت متتابعة تقاربيـة جزئيـه فـي Y
إذن Y فضـاء محكم تتابعيـا

2) (X,τ) منتظم ، Aمحكمة ، B مغلقة ، $A \cap B = \varphi$
اثبت يوجد $U,V \in \tau$, $B \subseteq V$, $A \subseteq U$, $U \cap V = \varphi$.

الحل :

ليكن $a_i \in A$, $a_i \notin B$ ومن كون الفضاء منتظم توجد
$U_i, V_i \in \tau$, $B \subseteq V_i$, $a_i \subseteq U_i$, $U \cap V = \varphi$
بما أن A محكمة

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \leftarrow$$

أي يوجد غطاء جزئي منتهي من الغطاء المفتوح U_i حيث

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

$$\bigcap V_i = V \quad , \quad B \subseteq \bigcap V_i$$

$$U \cap V = \left(\bigcup U_i \right) \bigcap \left(\bigcap V_i \right)$$
$$= (U_1 \cap V_1) \cup (U_2 \cap V_2) \cup \ldots \cup (U_n \cap V_n)$$
$$= \varphi \cup \varphi \cup \ldots = \varphi$$

3) إذا كانت A مجموعة جزئية محكمة في فضاء- T_2 ،
برهن أنه إذا كانت $x \notin A$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة V بحيث $x \in V \subseteq A^c$.

الحل :

X فضاء- T_2 ، $A \subseteq X$ محكمة بحيث أن
$x \notin A$ إذن توجد $U, V \in \tau$ بحيث
$U \cap V = \varphi \;,\; A \subseteq U \;,\; x \in V \;,$
وبالتالي فإن
$x \in V \subseteq U^c \quad s.t. \quad U^c \subseteq A^c$
ومن ثم فإن $x \in V \subseteq A^c$ وهو المطلوب

4) بين أي مجموعة جزئية غير منتهية من الفضاء المتقطع ليست محكمة.

الحل :

(X,τ) فضاء متقطع $A \subseteq X$ مجموعة جزئية غير منتهية
$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}$ مجموعات مفتوحة
إذن $\{a_i\}$ غطاء مفتوح لـ A
إذن لا يمكن إيجاد غطاء جزئي منتهي لـ A
إذن ليست محكمة.

5) بين أي مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المحكم تتابعيا تكون محكمة تتابعيا .

الحل :

نفرض ان X فضاء محكم تتابعيا وان $A \subseteq X$ و A مجموعة مغلقة إذن

A تحوي جميع نقاط التراكم لها

نفرض أن $\{a_0,....,a_n\}$ متتابعة في A

إذا $\{a_0,....,a_n\}$ متتابعة في X

وبما أن X فضاء محكم تتابعياً

إذا توجد متتابعة جزئية تقاربية وتتقارب إلى x

إذا x نقطة من نقاط تراكم A

إذا توجد متتابعة جزئيه تقاربيه في A

إذن A محكمة تتابعيا

الدرس السابع
الترابط

(تنويه : قد سبق ذكر تعريف الفضاءات المترابطه وامثله عديده عليها في تبولوجي 1 وهذا الدرس يعتبر بمثابة تكمله له)

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء $-T_1$ فإن أي مجموعتين منتهيتين غير خاليتين وغير متقاطعتين في X منفصلتين .

البرهان :

بفرض أن $A,B \subseteq X$ ومنتهية حيث
$$A \cap B = \varphi \quad , \quad A \neq \varphi \quad , \quad B \neq \varphi$$
لكن كل مجموعة منتهية في فضاء $-T_1$ تكون مغلقة
لأنها إتحاد لمجموعات منتهية وحيدة العنصر
وهذا بدوره يؤدي إلى أن A,B مجموعات مغلقة
وعليه تكون A,B منفصلتان لأن
$$A \cap \overline{B} = A \cap B = \varphi \quad , \quad \overline{A} \cap B = A \cap B = \varphi \; .$$

تعريف :

في أي فضاء تبولوجي (X,τ) إذا وجدت المجموعتين المفتوحتين G,H في X بحيث أنه لأي مجموعة جزئية A من X يكون :

$$(i)\; A \cap G \neq \varphi \;,\; A \cap H \neq \varphi$$
$$(ii)\; (A \cap G) \cap (A \cap H) = \varphi$$
$$(iii)\; (A \cap G) \cup (A \cap H) = A$$

فإن المجموعة $G \cup H$ تسمى مجموعة انفصال(disconnection) للمجموعة A أو G,H مجموعتي إنفصال .

نظرية :

في أي فضاء تبولوجي (X,τ) ، $A \subseteq X$ إذا كانت $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة A فإن $A \cap H$, $A \cap G$ مجموعتين منفصلتين .

البرهان :

حيث أن $G \cup H$ مجموعة انفصال فإن $G,H \in \tau$ حيث

$$(A \cap G) \cap (A \cap H) = \varphi$$

والآن نثبت أن كلاً من المجموعتين $A \cap H$, $A \cap G$ لا تحتوي على نقاط تراكم للأخرى

لذلك نفرض أن :

$$p \in (A \cap G)' \ , \ p \in A \cap H$$

وحيث أن H مجموعة مفتوحة تحتوي p فإنها تحتوي على نقطة على الأقل من $A \cap G$ تختلف عن p

أي أن

$$(A \cap G) \cap H \neq \varphi$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أنه

إذا كانت $p \in (A \cap H)'$ فإن

$$p \notin A \cap G$$

ومن ثم فإن $A \cap H$, $A \cap G$ مجموعات منفصلة .

مثال :

لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$ ، $\tau=\{X,\varphi,\{3\},\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$

فإن المجموعة $A=\{1,4,5\}$ غير مترابطة

لأن المجموعتين المفتوحتين

$H=\{3,4,5\}, G=\{1,2,3\}$

في الفضاء (X,τ) ،

$H \cup G$ مجموعة انفصال للمجموعة A لأن :

$$A\cap G=\{1\}\neq\varphi \ , \ A\cap H=\{4,5\}\neq\varphi$$

$$G\cap H\neq\varphi \ , \ (A\cap G)\cap(A\cap H)=\varphi$$

$$(A\cap G)\cup(A\cap H)=A$$

نظرية :

المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) تكون مترابطة في الفضاء الكلي إذا وفقط إذا كانت A مترابطة في الفضاء الجزئي (A,τ_A).

البرهان :

نفرض أن A مجموعة غير مترابطة في الفضاء الكلي (X,τ)

وبالتالي فإن

$H \cup G$ مجموعة انفصال للمجموعة A في X .

والآن $G,H\in\tau$ ولذلك فإن

$$A\cap G,\ \ A\cap H\in\tau_A$$

وطبقاً لهذا فإن كلاً من $A\cap G,\ \ A\cap H$ مجموعة انفصال للمجموعة A في الفضاء الجزئي (A,τ_A) ومن ثم فإن

A مجموعة غير مترابطة في (A,τ_A).

وعلى العكس ،

لتكن A غير مترابطة في الفضاء الجزئي (A, τ_A)

ولنفرض أن $G^*, H^* \in \tau_A$ مجموعة انفصال للمجموعة A

ولذلك فإنه توجد $G, H \in \tau$ بحيث أن

$G^* = A \cap G \ , \ H^* = A \cap H$.

ولكن

$$A \cap G^* = A \cap (A \cap G) = A \cap G$$

$$A \cap H^* = A \cap (A \cap H) = A \cap H$$

وبالتالي فإن $G \cup H$

مجموعة انفصال للمجموعة A في الفضاء الكلي (X, τ)

وعليه تكون A مجموعة غير مترابطة في X .

ملاحظة :

(1) بفرض أن (X, τ) فضاء غير مترابط ، $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة X فإن

$$X = (X \cap G) \cup (X \cap H),$$

$$(X \cap G) \cap (X \cap H) = \varphi$$

لكن

$$X \cap G = G \ , \ X \cap H = H$$

لذلك فإن X تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا وجدت مجموعتين G, H غير خاليتين ومفتوحتين بحيث أن

$X = G \cup H \ , \ G \cap H = \varphi$.

(2) إذا كانت X مجموعة غير مترابطة ، $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة X فإن الراسم :

$$f : X = G \cup H \to (Y, D)$$

حيث $Y=\{0,1\}$ معرف عليها التبولوجي المتقطع والمعرف بالصورة :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \text{if } x\in G \\ 1 & ; \text{if } x\in H \end{cases}$$

يكون راسم متصل .

نظرية :

الصورة المتصلة للمجموعة المترابطة تكون مجموعة مترابطة .

البرهان :

بفرض أن $f : X \to Y$ دالة متصلة

من الفضاء (X,τ) المترابط إلى الفضاء التبولوجي (Y,τ^*) .

نثبت أن $f(X)$ مجموعة مترابطة .

لذلك نفرض أن $f(X)$ مجموعة غير مترابطة ،

G,H مجموعتي انفصال للمجموعة $f(X)$ فإن :

$$f(X)\subseteq G\cup H \;\;,\;\; G\cap H=\varphi$$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$X\subseteq f^{-1}(G)\cup f^{-1}(H) \;\;,\;\; f^{-1}(G)\cap f^{-1}(H)=\varphi$$

وحيث أن

$$f^{-1}(G),f^{-1}(H)$$

مجموعتين جزئيتين مفتوحتين وغير متقاطعتين فإن

$$f^{-1}(G),f^{-1}(H)$$

مجموعتي انفصال للمجموعة X

وهذا تعارض لأن X مجموعة مترابطة ،

ومن ثم فإن $f(X)$ مجموعة مترابطة .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) الفضاء (X,τ) مترابط .

(٢) لا يمكن التعبير عن X كإتحاد لمجموعتين غير خاليتين مغلقتين وغير متقاطعتين .

(٣) المجموعتان X,φ هما فقط المجموعتان المفتوحتان والمغلقتان في X .

(٤) لأي مجموعة جزئية فعلية $A \neq \varphi$ من X يكون $b(A) \neq \varphi$.

(٥) إذا كانت $A=\{x,y\}$ ومعرف عليها التبولوجي المنفصل فإنه لا يوجد راسم $f : X \to A$ يكون متصل وشامل .

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2):$

نفرض العكس ،

أي توجد مجموعتين مغلقتين A,B بحيث أن :

$$X = A \cup B \;,\; A \cap B = \varphi \;,\; A \neq \varphi \;,\; B \neq \varphi$$

وبالتالي فإن A^C, B^C مجموعتين مفتوحتين حيث

$$A^C \cup B^C = X \;,\; A^C \cap B^C = \varphi$$

وهذا تعارض

لأن X فضاء مترابط .

$(2) \Rightarrow (3):$

نفرض العكس

أي توجد مجموعة جزئية A من X مفتوحة ومغلقة

بحيث أن

$$A \neq \varphi \;,\; A \neq X$$

فإن هذا بدوره يؤدي إلى أن

$$A \neq \varphi \quad , \quad A^C \neq \varphi$$

وحيث أن

$$X = A \cup A^C \quad , \quad A \cap A^C = \varphi$$

وعليه تكون المجموعتين A, A^C
غير متقاطعتين ومغلقتين وإتحادهما يساوي X
وهذا تعارض من الفرض (2)
ومن ثم فإن X, φ هما المجموعتان الوحيدتان
المغلقتان والمفتوحتان في X .

$$(3) \Rightarrow (4):$$

نفرض أن A مجموعة جزئية فعلية من X وغير خالية
بحيث أن $b(A) = \varphi$
لكن

$$b(A) = \bar{A} \cap \overline{A^C} = \bar{A} \cap \left(A^\circ\right)^C = \varphi \text{ ،}$$

وعليه تكون

$$\bar{A} \subseteq A^\circ$$

ومن ثم فإن

$$A \subseteq \bar{A} \subseteq A^\circ \subseteq A \text{ .}$$

أي أن

$$\bar{A} = A \quad , \quad A^\circ = A$$

وتكون A مجموعة مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت
وهذا تعارض مع الفرض (3) .

$$:(5) \Leftarrow (4)$$

بفرض أنه يوجد راسم $f : X \to A$ يكون متصل وشامل

وحيث أن $A=\{x,y\}$

ومعرف عليها التوبولوجي المنفصل ،

فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة ومغلقة

وهي مجموعة جزئية فعلية من A .

حيث أن f راسم متصل فإن

$$B = f^{-1}(\{x\})$$

مجموعة مفتوحة ومغلقة في X ،

وعليه يكون :

$$b(B) = \bar{B} \cap \overline{B^c} = B \cap B^c = \varphi$$

وهذا تعارض مع الفرض (4) .

ومن ثم فإن مثل هذا الراسم غير موجود .

$$:(1) \Leftarrow (5)$$

نفرض أن (X,τ) غير مترابط ،

أي توجد مجموعتين غير خاليتين G,H و مفتوحتين في X

بحيث أن :

$$X = G \cup H \quad , G \cap H = \varphi$$

الراسم $f : X = G \cup H \to \{a, b\} = A$

المعرف بالصورة :

$$f(x) = \begin{cases} a & ; \text{ if } \ a \in G \\ b & ; \text{if } \ b \in H \end{cases}$$

يكون متصل و شامل

(لأن A معرف عليها التبولوجي المنفصل)

و هذا تناقض مع الفرض

وبالتالي فإن (X,τ) مترابط .

نظرية :

إذا كانت A,B مجموعتان مترابطتان وغير منفصلتان في الفضاء التبولوجي (X,τ) فإن $A \cup B$ تكون مترابطة .

البرهان :

نفرض العكس

أي أن $A \cup B$ غير مترابطة .

ولتكن U,V مجموعتان منفصلتان في الفضاء التبولوجي (X,τ)

وتحققان العلاقات الآتية :

$$(V \cap U) \cap (A \cup B) = \varphi \quad , \quad A \cup B \subseteq V \cup U$$

وهذا يؤدي إلى أن :

$$V \cap U = \varphi \ , \ A \subseteq V \cup U$$

ومن ذلك نجد أن .

إما أن تكون $A \subseteq V$ أو $A \subseteq U$.

وبنفس الطريقة نجد أن

إما تكون $B \subseteq V$ أو $B \subseteq U$.

لنفرض أن $A \subseteq U$ وإذا كانت $B \subseteq V$

فإن

$$B \subseteq V - U \text{ ، } A \subseteq U - V$$

وهذا يعني أن A,B مجموعتين منفصلتين و هذا تناقض .

إذاً يجب أن تكون $B \subseteq U$ وعليه فإن

$$A \cup B \subseteq U$$

وبالتالي فإن

$$(A \cup B) \cap V = \varphi$$

وهذا يعني أن $A \cup B$ مجموعة مترابطة .

بديهية :

إذا كانت A,B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين ومنفصلتين من الفضاء التبولوجي (X,τ) فإن $A \cup B$ تكون مجموعة غير مترابطة .

البرهان :

حيث أن A,B مجموعتين منفصلتين فإن

$$A \cap \overline{B} = \varphi \quad , \quad \overline{A} \cap B = \varphi$$

وبفرض أن

$$G = \left(\overline{B}\right)^{C} \quad , \quad H = \left(\overline{A}\right)^{C}$$

فإن G,H مجموعات مفتوحة حيث :

$$(A \cup B) \cap G = A \quad , \quad (A \cup B) \cap H = B$$

وهاتين المجموعتين غير متقاطعتين وإتحادهما هو المجموعة $A \cup B$.

لذلك فإن G,H مجموعتي انفصال للمجموعة $A \cup B$

ومن ثم فإن $A \cup B$ مجموعة غير مترابطة .

بديهية :

بفرض أن A,B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التبولوجي (X,τ) ، $B \subseteq A$. إذا كانت B مجموعة مترابطة ، $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة A فإن أما

$$B \cap H = \varphi \quad \text{or}\ B \cap G = \varphi \quad \text{and} \quad B \subseteq G \quad \text{or} \quad B \subseteq H$$

البرهان :

حيث أن

$$G \cup H \text{ ، } B \subseteq A$$

مجموعة انفصال للمجموعة A فإن :

$$A \subseteq G \cup H \quad \Rightarrow \quad B \subseteq G \cup H,$$

$$G \cap H \subseteq A^{C} \Rightarrow \quad G \cap H \subseteq B^{C}$$

لذلك إذا كانت كل من

$$B \cap H \neq \varphi \ , \ B \cap G \neq \varphi$$

مجموعات غير خالية فإن

$B \cup G$ تكون مجموعة انفصال للمجموعة B

ولكن B مجموعة مترابطة .

إذاً

$$B \cap H = \varphi \ \text{ or } \ B \cap G = \varphi \ \Rightarrow \ B \subseteq G \ \text{ or } \ B \subseteq H$$

نتيجة :

لتكن $\{A_i\}_{i \in N}$ عائلة من المجموعات القابلة للعد والمترابطة في الفضاء التبولوجي (X, τ) بحيث أن A_i, A_j غير منفصلتان لكل $i, j \in N$ فإن $A = \underset{i \in I}{\cup} A_i$ تكون مجموعة مترابطة .

البرهان :

باستخدام الإستنتاج الرياضي يمكن إثبات أن المجموعة

$B_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i$ مترابطة .

وبالتالي يكون لدينا العائلة $\{B_i\}$ من المجموعات المترابطة

ومن ذلك تكون $A = \underset{i \in N}{\cup} B_i = \underset{i \in N}{\cup} A_i$ مترابطة .

الترابط المحلي

تعريف :

(locally connected)

يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) مترابط محلياً عند النقطة $p \in X$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوي p تحتوي على مجموعة جزئية مترابطة تحوي p أي أن كل المجموعات المفتوحة التي تحوي p هي أساس محلي عند p .

ويقال أن الفضاء مترابط محلياً إذا كان مترابط محلياً عند كل نقطة .
من ذلك نجد أن X فضاء مترابط محلياً إذا كان من أجل أي مجموعة مفتوحة (جوار) N حيث $p \in N$ لكل $p \in X$ توجد مجموعة مفتوحة مترابطة W بحيث أن $p \in W \subseteq N$.

(لا توجد علاقة بين الفضاءات المترابطة والفضاءات المترابطة محلياً)

مثال :

كل فضاء متقطع (X,D) مترابط محلياً
لأنه إذا كانت $p \in X$ فإن
$\{p\}$ مجموعة مفتوحة مترابطة
محتواة في أي مجموعة مفتوحة تحتوي p .
لاحظ أن X فضاء ليس مترابط
إذا كانت X تحتوي على اكثر من نقطتين .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء مترابط محلياً ، Y مجموعة جزئية مفتوحة في X فإن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) يكون مترابط محلياً .

البرهان :

بفرض أن $p \in Y$ ، N
جوار للنقطة p في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) .
إذاً توجد مجموعة مفتوحة U في X
بحيث أن
$Y \cap U \subseteq N$.
لكن Y مجموعة مفتوحة في X
فإنه ينتج من ذلك أن
$U \cap Y$ مجموعة مفتوحة في X
وعليه تكون
N جوار للنقطة p في X ،
وحيث أن
X فضاء مترابط محلياً
فإنه يوجد جوار مترابط W في X بحيث أن
$W \subseteq N$.
والآن $V = W \cap Y \subseteq Y \cap U = N$.
حيث أن
V جوار مترابط للنقطة p في Y ،
فإن (Y,τ_Y) فضاء مترابط محلياً .

نتيجة :

المركبات المترابطة في أي فضاء مترابط محلياً تكون مجموعات مفتوحة .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي فإن العبارات التالية متكافئة :
(١) X مترابط محلياً.
(٢) مركبة أي فضاء جزئي مفتوح في X هي مجموعة مفتوحة .
(٣) المجموعات المترابطة في X تشكل أساس للفضاء X .

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$:

بفرض أن X فضاء مترابط محلياً
و أن Y مجموعة جزئية مفتوحة في X
بالتالي يكون
(Y,τ_Y) فضاء مترابط محلياً .
وحيث أن Y مجموعة مفتوحة فإن
مركبة Y مجموعة مفتوحة في Y .

$(2) \Rightarrow (3)$:

بفرض أن G مجموعة مفتوحة في X
وأن مركبات G مفتوحة في X
وحيث أن المركبات مترابطة فهي عبارة عن اتحاد من المجموعات المفتوحة المترابطة
وبالتالي فهي أساس للفضاء X .

$(3) \Rightarrow (1)$:

بفرض أن N جوار مفتوح للنقطة $p \in X$.
من (3) فإن
N هي عبارة عن اتحاد من المجموعات المفتوحة المترابطة
وبالتالي فإن X مترابطة محلياً عند p .

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي فإن العبارات التالية متكافئة :

(١) X مترابط محلياً.

(٢) إذا كانت A مجموعة جزئية من X ، C مركبة مترابطة للمجموعة A فإن $b(C) \subseteq b(A)$.

(٣) المركبة المترابطة لأي مجموعة مفتوحة في X تكون مفتوحة .

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$:

لتكن $x \notin b(A)$
حيث
$x \in b(C) = \overline{C} \cap \overline{X - C}$.
من ذلك نجد أن
$x \in \overline{C}$
وهذا يؤدي إلى أن
$x \in \overline{A}$ لكن
$\overline{A} = A^{o} \cup b(A)$
وعليه يكون $x \in A^{o}$
ومن (1) يوجد جوار مترابط V للنقطة x بحيث
$x \in V \subseteq A \subseteq A^{o}$.
وبالتالي $C \cup V$ مجموعة مترابطة .
لكن C مركبة مترابطة فإن
$C \cup V = C$
وهذا يعني أن
$x \in V \subseteq C$ أو $V \cap \overline{X - C} = \varphi$

ومن ذلك نستنتج أن $x \notin \overline{X-C}$ ،
وهذا تعارض مع الفرض.

$(2) \Leftarrow (3)$:

لتكن U مجموعة مفتوحة ، C مركبة مترابطة لها .
من (2) نحصل على أن
$$b(C) \subseteq b(A)$$
ومنها نجد أن :

$$\begin{aligned} b(C) \cap C \subseteq b(U) \cap U &= \left(\bar{U} \cap \overline{X-U}\right) \cap U \\ &= \left(\bar{U} \cap U\right) \cap \overline{X-U} \\ &= U \cap \overline{X-U} = U \cap \left(X - U^{o}\right) = \varphi \end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على أن :

$$C \cap \left(X - C^{o}\right) = C \cap \bar{C} \cap \overline{X-C} = C \cap b(C) = \varphi$$

أي أن $C \subseteq C^{o}$
ومنها C مجموعة مفتوحة .

$(3) \Leftarrow (1)$:

بفرض أن N جوار للنقطة $p \in X$
وبالتالي توجد مجموعة مفتوحة V بحيث
$x \in V \subseteq N$.
إذا كانت C هي المركبة المترابطة التي تحتوي p في المجموعة N .
من (3) تكون C مجموعة مفتوحة .

مثال :

بفرض أن $f : I \to X$ مساراً من a إلى b ،
$g : I \to X$ مساراً من b إلى c
فإن الدالة fog حيث أن

$$fog(s) = \begin{cases} f(2s) & ; \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & ; \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

هي مساراً من a إلى c .

ملاحظة :

يتضح مما سبق أن العلاقة المعرفة على المجموعة X حيث (X, τ) فضاء تبولوجي بالصورة :

$$a \sim b \iff \exists \text{ path } f : I \to X$$

هي علاقة تكافؤ تجزئ X إلى فصول تكافؤ $C(x)$ لكل $x \in X$ حيث $C(x) = \{y \in X : x \sim y\}$.

تعريف :

فصول التكافؤ الناشئة من علاقة التكافؤ السابقة تسمى المركبات المسارية (path connected) للفضاء X .

تعريف :

يقال أن الفضاء (X, τ) مترابط مساريا (pathwise connected)
إذا وجدت له مركبة مسارية واحدة فقط
وتسمى المجموعة الجزئية $A \subseteq X$ مترابطة مسارياً
إذا كان الفضاء الجزئي (A, τ_A) مترابط مسارياً

مثال :

الفضاء العادي (R,U) مترابط مساريأ
لأن الدالة $f : I \to R$ والمعرفة بالصورة
$$f(x) = (1-x)a + bx \; ; \; \forall \, x \in I \quad , \; a,b \in R$$
هي دالة خطية فهي متصلة وتحقق :
. $f(0)=a$, $f(1)=b$
وعليه فإن f مسار من a إلى b .

مثال :

الفضاء المتقطع (X,D) حيث
X تحتوي على أكثر من عنصر غير مترابط مساريأ
لأن أي دالة $f : I \to X$ تكون غير متصلة
والسبب يرجع لكون أن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة في X
ولكن $f^{-1}(\{x\}) = \{0\}$
ليست مجموعة مفتوحة في I .

مثال :

الفضاء المصمت X الذي يحتوي على أكثر من عنصر
يكون مترابط مساريأ
لأن أي دالة $f : I \to X$ تكون متصلة .

نظرية :

كل فضاء مترابط مساريا يكون مترابط .

البرهان :

بفرض أن (X,τ) فضاء مترابط مساريا

فإن لكل $x \in X$ يوجد مساراً $f : I \to X$

حيث

$$f_x(0) = x_0 \;\; ; \;\; f_x(1) = x$$

وحيث أن I فضاء مترابط (لأن I فترة) ،

f دالة متصلة فإن

$f_x(1)$ مترابطة لكل $x \in X$.

لكن $X = \underset{x \in X}{\cup} f_x(I)$.

وعليه تكون X مترابطة

لأنها اتحاد مجموعات مترابطة غير متقاطعة مثنى مثنى .

نظرية :

المركبة المسارية $C(x)$ لكل نقطة x في الفضاء التبولوجي (X,τ) هي أكبر مجموعة مترابطة مساريا في X تحتوي النقطة x.

نظرية :

إذا كانت $f : X \to Y$ دالة متصلة وشاملة وكان X فضاء مترابط مساريا فإن Y يكون مترابط مساريا أيضا.

التمارين :

(١) بين أنه إذا كان (X,τ) فضاء غير مترابط فإن (X,τ^*) فضاء غير مترابط حيث $\tau \le \tau^*$.

(٢) بين أنه إذا كان (X,τ) فضاء مترابط فإن (X,τ^*) فضاء مترابط حيث $\tau^* \le \tau$.

(٣) اثبت صحة أو خطأ العبارة التالية :

خاصية الترابط خاصية وراثية.

جوري

حل التمارين

(١) بين أنه إذا كان (X,τ) فضاء غير مترابط فإن (X,τ^{*}) فضاء غير مترابط حيث $\tau \le \tau^{*}$.

الحل :

نفرض ان (X,τ) فضاء غير مترابط

أي أن

$$X = A \cup B \quad , \quad A,B \neq \varphi \quad , \quad A \cap B = \varphi \quad , \quad A,B \in \tau$$

وبما أن $\tau \le \tau^{*}$ إذن

A,B مجموعتان مفتوحتان في τ^{*}

إذن

$$X = A \cup B \quad , \quad A,B \neq \varphi \quad , \quad A \cap B = \varphi \quad , \quad A,B \in \tau^{*}$$

وبالتالي فإن (X,τ^{*}) فضاء غير مترابط .

جوري

(٢) بين أنه إذا كان (X,τ) فضاء مترابط فإن (X,τ^*) فضاء مترابط حيث $\tau \le \tau^*$.

الحل :

نفرض ان (X,τ^*) فضاء غير مترابط

أي أن

$$X = A \cup B \quad , \quad A,B \neq \varphi \quad , \quad A \cap B = \varphi \quad , \quad A,B \in \tau^*$$

وبما أن $\tau \le \tau^*$ وبما أن

A,B مجموعتان مفتوحتان في τ

إذن

$$X = A \cup B \quad , \quad A,B \neq \varphi \quad , \quad A \cap B = \varphi \quad , \quad A,B \in \tau$$

وبالتالي فإن (X,τ) فضاء غير مترابط .

وهذا تناقض .

إذن (X,τ^*) فضاء مترابط.

(٣) اثبت صحة أو خطأ العبارة التالية :

خاصية الترابط خاصية وراثية.

الحل :

العبارة خاطئة .

مثال يوضح خطأ العبارة :

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$\tau = \{X, \varphi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}\}$$

$$\tau_B = \{B, \varphi, \{1\}, \{2\}\}$$

س - أعطي مثال لداله متصلة ومفتوحة ومغلقه ؟

س - إذا كانت $f: x \to y$ دالة من الفضاء التو بولوجي$(x،\tau)$ إلى المجموعة Y برهني أن $\{G \leq y: f^{-1}(G) \in$
$\tau^* = \tau\}$ هو أقوى توبولوجي على Y يجعل F داله متصلة؟

س - يقال أن الدالة $f: x \to y$ نصف متصلة من أعلى إذا كانت $f^{-1}(-\infty, a)$ مجموعه مفتوحه في x ويقال أن f نصف متصلة من أسفل إذا كانت $f^{-1}(b, \infty)$ مجموعه مفتوحه في x برهني أن الدالة f متصلة إذا وفقط إذا كانت نصف متصلة من اعلى ونصف متصلة من اسفل ؟

س - إذا كانت كل من $f: X \to Y$ ، $g: Y \to Z$ داله توبولوجيه بيني أن الداله $g \circ f: X \to Z$ داله توبولوجي m أيضا؟

س - أعطي مثال لداله متصلة $f: X \to Y$ تحقق :

$(i) f(\acute{A}) \neq (f(A))\grave{}$

$(ii) \overline{f(A)} \neq f(\overline{A})$

س - برهني أن :

(i)$(a,b) \cong (0,1)$. (ii)$(a,b) \cong (1,\infty)$. (iii)$(1,\infty) \cong (0,1)$.

(iv)$[a,b) \cong [0,1)$. (v) $[a,b] \cong [0,1]$.

س - لتكن $f: X \to Y$ داله متصلة بيني أن العبارة الاتيه متكافئة :

f داله متصلة ؟؟

س - بيني ان الدالة $i: (X,\tau) \to (X,\tau^*)$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كنت $\tau^* \leq \tau$ ؟

س- بفرض أن τ هو توبولوجي النهايه الدنيا المولد بالفترات $[a,b)$ وليكن τ^* هو التو بولوجي على R المولد بعئله الدوال الخطية $f: R \to (R,\tau)$ المعرفه بالصوره : $f(x) = ax + b$ لكل $a,b \in R$ بيني أن τ^* هو التوبولوجي على R؟

س - ليكن R هو الفضاء العادي ، τ هو توبولوجي النهايه العليا المولد بالفترات$(a,b]$. بيني أن الدالة $f: R \to R$ المعرفه بالصوره $f(x)=x$ إذا كانت $x \leq 1$ ، $f(x)=x+2$ إذا كانت $x > 1$ متصله بالنسبه الى التوبولوجي τ ولكنها ليست متصله بالنسبه الى التوبولوجي العادي ؟

س - بفرض أن $f: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ هوميومورفزم ، (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) بيني أن $(A,\tau_A) \to$
(B,τ^*_B): f_A هوميومورفزم أيضا حيث f_A مقصور f على A ، $f(A)=B$؟؟

س - ليكن X,Y فضاءان توبولوجيان وبفرض أن $Y = A \cup B$ حيث A,B مجموعتين جزئيتين من Y. إذا كانت

$f: A \to X, G: B \to X$ دالتين متصلتين بحيث أن $f(x)=g(x)$ لكل $x \in A \cap B$. برهني ان الدالة $h: Y \to X$ المعرفه بالصوره :

$h(x) = \begin{cases} f(x) & ؛ if \ x \in A \\ g(x) & ؛ if \ x \in B \end{cases}$ متصلة ؟

س ـ أعطي مثال لداله متصلة ومفتوحة ومغلقه ؟

الحل :

الدالة $f:(X,D)\to(Y,D)$ متصلة ومفتوحة ومغلقة في الوقت نفسه .

س ـ أعطي مثال لداله متصله $f:X\to Y$ تحقق :

$$(i) f(\acute{A}) \neq \acute{(f(A))}$$

الحل :

الدالة $f:(X,D)\to(X,I)$ حيث X مجموعة تحتوي أكثر من عنصر هي دالة متصلة وتحقق أن $f(A')\neq(f(A))'$.

س ـ برهني أن :

$$[a,b]\cong[0,1]$$

الحل :

حيث أن $Y=[a,b],X=[0,1]$ نفرض أن $f:X\to Y$ دالة معرفة كالتالي :

$$f(x)=(b-a)x+a \quad , \quad \forall x\in X$$

من الواضح أن f دالة تقابلية ، f دالة متصلة ، وكذلك الدالة f^{-1} المعرفة كالتالي : $f^{-1}(y)=\dfrac{y-a}{b-a} \quad , \quad \forall y\in Y$ أيضاً دالة متصلة ، ومن ثم فإن $[a,b]\cong[0,1]$.

س ـ لتكن $f: X \to Y$ داله متصله بيني أن العباره الاتيه متكافئه :

(١) F دالة متصلة .

(٢) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

(٣) $f(b(A)) \subseteq f(A) \cup b(f(A))$ لكل $A \subseteq X$.

الحل :

$(2) \leftarrow (1)$

نفرض أن f دالة متصلة.

وبما أن $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$

إذن و بالتأثير بالدالة العكسية نجد أن:

$$A \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$

(وحيث أنه إذا كان $A \subseteq B$ فإن $\bar{A} \subseteq \bar{B}$)

فنستنتج أن

$$\bar{A} \subseteq \overline{f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)} = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \quad \cdots \quad (*)$$

(لأن $\overline{f(A)}$ مجموعة مغلقة ، f دالة متصلة)

إذن $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ مجموعة مغلقة .

وبالتأثيرعلى العلاقة (*) بـ f نحصل على :

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

وهو المطلوب إثباته .

$(1) \leftarrow (2)$

نفرض أن $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

و لإثبات أن f دالة متصلة ،

نفرض F أي مجموعة مغلقة في Y ،

علينا إثبات أن $f^{-1}(F)$ مجموعه مغلقة في X ،

أي إثبات أن

$$\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$$

ومعلوم أن

$$f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)} \quad \cdots(1)$$

بقي إثبات أن

$$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$$

ومن الفرض ($f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$) ،

وحيث أن $f^{-1}(F) \subseteq X$ فإن

$$f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq \overline{ff^{-1}(F)} = \bar{F} = F$$

$$\rightarrow f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq F \quad \cdots(*)$$

(لأن F مغلقة)

وبالتأثير بالدالة العكسيه على (*) نحصل على:

$$\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq f^{-1}(F) \quad \cdots(2)$$

من (1) و(2) نستنج أن $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$

وبالتالي فإن f دالة متصلة.

$(3) \leftarrow (2)$

نفرض أن $A \subseteq X$ فإن

$$\bar{A} = A^{\circ} \cup b(A) = A \cup b(A)$$

لأن

$$A^{\circ} \subseteq A \text{ , } A \subseteq \bar{A}$$

وحيث أن :

$$b(A) \subseteq \bar{A} \quad \cdots(*)$$

فإنه و بالتأثير بالدالة f على (*) نحصل على :

$$f(b(A)) \subseteq f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

إذن نستنتج أن :

$$f(b(A)) \subseteq f(A) \cup b(f(A))$$

وهو المطلوب إثباته .

$(2) \leftarrow (3)$

نفرض أن $A \subseteq X$ ،
و معلوم أن

$$\bar{A} = A \cup b(A)$$

وبالتأثير بالدالة f نحصل على:

$$\begin{aligned} f(\bar{A}) &= f(A \cup b(A)) \\ &= f(A) \cup f(b(A)) \\ &\subseteq f(A) \cup \left[f(A) \cup b(f(A)) \right] \\ &= f(A) \cup b(f(A)) \end{aligned}$$

إذن نستنتج أن :

$$f(\bar{A}) \subseteq f(A) \cup b(f(A)) = \overline{f(A)}$$

$$\rightarrow \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

وهو المطلوب إثباته.

س - بفرض أن $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ هوميومورفزم ، (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) بيني أن $f_A :(A,\tau_A) \to (B,\tau_B^*)$ هوميومورفزم أيضا حيث f_A مقصور f على A ، $f(A)=B$؟؟

الحل :

بما أن $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ هوميومورفزم أي أحادية ومفتوحة

فإن $f_A :(A,\tau_A)\to(B,\tau_B^*)$ أيضاً أحادية .

بقي إثبات أن f_A مفتوحة ، نفرض أن $H\subseteq A$ ، حيث H مفتوحة في τ_A بالتالي فإن :

$H=A\cap G \quad , G\in\tau$ وبما أن f دالة أحادية فإن

$$f_A(H)=f(H)=f(A\cap G)=f(A)\cap f(G)=B\cap f(G)$$

وبما أن f مفتوحة و $G\in\tau$ فإن $f(G)\in\tau^*$ أي أن :

$B\cap f(G)\in\tau_B^*$ ومن ثم فإن f_A مفتوحة . وبذلك نكون قد أثبتنا أن f_A هوميومورفزم .