



اللجنة الشعبية العامة للتعليم العالي

جامعة الزيتونة

كلية الآداب والعلوم - نزلتين

قسم الرياضيات

اختبار الدور الثاني في مقرر الجبر المجرّد لطلاب السنة الثانية للعام الجامعي 2008/2007

===== الزمن: ساعتان وربع =====

أولاً: أجب عن السؤال التالي:

س1. ضع علامة  $\surd$  أمام العبارة الصحيحة وعلامة  $\times$  أمام العبارة الخاطئة. (20 درجة)

1.  $(Q^*, \times)$  زمرة جزئية من  $(Q^*, +)$

2. كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية لا بد أن تكون ناظرية

3. التباديل الزوجية في الزمرة  $S_5$  تكون زمرة جزئية من  $S_5$  مع نفس العملية المعرفة على  $S_5$

4. إذا كان  $\sigma \in S_5$  فإن  $|\sigma| \leq 5$

5. لا توجد زمرة دورية غير منتهية مولدة بثلاثة عناصر

6.  $(\mathbb{R}, +)$  ليست زمرة دورية

7. بعض الزمر الدورية تتشاكل تقابلياً مع زمرة غير تبديلية

8. رتبة العنصر 0 في الزمرة  $(\mathbb{Z}, +)$  هي 1

9. العنصر 1 في الزمرة  $(\mathbb{Z}, +)$  رتبته تساوي 0

10. إذا كان  $\varphi: G \rightarrow G'$  دالة تشاكل زمري فإن  $\varphi((ab)^2) = \varphi(a^2)\varphi(b^2)$

11. التبديل  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  رتبته 5

12.  $A_2$  تحتوي على عنصر واحد فقط.

13. كل حلقة لها محايد ضربي.

14.  $I = \{0, 4, 8\}$  مثالية أولية من الحلقة  $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \times_{12})$

15. الحلقة  $(\mathbb{Z}_6, +_6, \times_6)$  لها المميز 6

16. في الحلقة في الحلقة  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  كل حلقة جزئية تكون مثالية.

17. في كل حلقة غير صفرية يكون 0 قاسماً للصفر.

18. إذا كانت  $R$  حلقة وكان  $a, b \in R$  فإن  $ac = ab$  يؤدي إلى أن  $c = b$  لكل  $a \neq 0$

19. الزمرتين  $(\mathbb{Z}, +)$ ،  $(13\mathbb{Z}, +)$  غير متشاكلتين تقابلياً لأن  $2 \in \mathbb{Z}$  بينما  $2 \notin 13\mathbb{Z}$

20. إذا كان  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  دالة تشاكل حلقي فوقي فإن  $\varphi(0) = 1$

ثانياً: أجب عن 4 أسئلة فقط من الأسئلة التالية: (لكل سؤال 10 درجات)

س2.أ. برهن أن الزمرتين  $(\mathbb{R}, +)$  و  $(\mathbb{R}^+, \times)$  متشاكلتين تقابلياً.

ب. ليكن كلاً من  $N, M$  زمرة جزئية ناظرية من الزمرة  $G$  برهن أن  $N \cap M$  زمرة جزئية ناظرية من  $G$

س3.أ. عرف كلاً من: الحلقة الجزئية - المجال

ب. برهن أن مميز المنطقة الصحيحة يكون صفر أو عدد أولي.

س4.أ. عرف كلاً من: الزمرة - نواة التشاكل الحلقي

ب. ليكن  $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$  ،  $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  برهن أن:

$(\mathbb{R}, +, \times)$  مثالية من الحلقة  $(\mathbb{R}, +, \times)$

س5.أ. إذا كانت  $R$  حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وكانت  $I$  مثالية من  $R$  برهن أن  $R/I$  منطقة صحيحة إذا وإذا كانت فقط  $I$  مثالية أولية.

ب. إذا كان  $f: R \rightarrow S$  تشاكل حلقي برهن أنه إذا كانت  $M$  حلقة جزئية من  $S$  فإن  $f^{-1}(M)$  حلقة جزئية من  $R$

س6.أ. برهن أن كل حلقة جزئية من الحلقة  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  تكون مثالية .

ب. ليكن  $*$  عملية ثنائية معرفة على المجموعة  $Q^+$  كالآتي:  $a * b = \frac{ab}{3}$  لكل  $a, b \in Q^+$

برهن أن  $(Q^+, *)$  زمرة.

س7.أ. إذا كانت الدالة  $\varphi: (\mathbb{C}, +, \cdot) \rightarrow (M_{2 \times 2}, +, \cdot)$  معرفة بالقاعدة  $\varphi(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

برهن أن  $\varphi$  دالة تشاكل حلقي.

ب. أعط (إن وجد) مثلاً لكل من:

(1) مثالية غير أولية (2) مثالية ليست حلقة جزئية. (3) زمرة دورية متشاكلت تقابلياً مع زمرة غير تبديلية .

(4) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد تحتوي على عنصر واحد فقط. (5) منطقة صحيحة ليست مجال