

الاختبار النصفى الأول في مقرر الجبر المجرد لطلاب السنة الثالثة للعام الجامعي 2009/2008

***** / + - * IR Q Z Q * φ * ≤ × ⊗ ⊕ ∘ • ⟨ ⟩ ≅ ≪ Δ μ σ τ ρ ℝ ℵ ∇ ∈ ∃ ≈ * / + - *****

الزمن: ساعة ونصف

أجب عن 4 أسئلة فقط من الأسئلة التالية:

1. (أ) أكمل ما يأتي: العملية الثنائية هي

التشاكل التقابلي من الزمرة G إلى الزمرة G' هو

(ب) برهن أن كل زمرة دورية يجب أن تكون زمرة تبديلية.

2. اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المذكورة أمام كل عبارة:

(i) إذا كان $\varphi: G \rightarrow G'$ دالة تشاكل زمري فإن: $\{ \ker \varphi \subseteq G' \text{ أو } \ker \varphi = \{e\} \text{ أو } \ker \varphi \text{ زمرة جزئية من } G \}$ (ii) إذا كانت G زمرة بحيث $a = a^{-1}$ لكل $a \in G$. فإن: $\{ G \text{ تبديلية أو } G \text{ ليست تبديلية أو } G \text{ زمرة منتهية} \}$ (iii) ليكن G, G' أي زمريتين فإن: $\{ G \text{ متشاكل مع } G' \text{ أو } G \text{ غير متشاكل مع } G' \text{ أو لا شيء مما ذكر} \}$ (iv) إذا كان G زمرة فإنه لكل $a, b \in G$ يكون: $\{ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \text{ أو } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \text{ أو } (ab)^{-1} = \frac{1}{ab} \}$ 3. (أ) ليكن $\{H_i\}_{i \in I}$ عائلة من الزمر الجزئية من الزمرة G برهن أن $\bigcap_{i \in I} H_i$ زمرة جزئية من G

(ب) برهن أن: كل الزمر الدورية غير المنتهية متشاكله تقابلياً.

4. (أ) ليكن $*$ عملية معرفة على $IR/\{1\}$ بالقاعدة $a * b = ab - a - b + 2$ لكل $a, b \in IR/\{1\}$ برهن أن: $(IR/\{1\}, *)$ تكون زمرة.(ب) إذا كانت G زمرة منتهية رتبها عدد طبيعي زوجي أثبت أنه يوجد $a \neq e$ بحيث $a = a^{-1}$ 5. ضع علامة \checkmark أو \times أمام العبارات التالية وإذا كانت العبارة صحيحة برهن وإذا كانت خاطئة أعط مثالاً يوضح ذلك.(i) مجموعة الأعداد الحقيقية مع العملية الثنائية $*$ المعرفة بـ $a * b = \frac{ab}{3} \forall a, b \in IR$ تكون زمرة تبديلية(ii) إذا كانت $*$ عملية ثنائية معرفة على المجموعة IR بـ $a * b = |ab|$ لكل $a, b \in IR$ فإن $(IR, *)$ تكون زمرة(iii) إذا كانت G زمرة حيث $(ab)^2 = a^2b^2$ لكل $a, b \in G$ فإن G تبديلية.

6. أعط (إن وجد) مثالاً مناسباً لكل فقرة مما يلي:

(i) زمرة منتهية مولدة بعنصر واحد فقط (ii) زمرة دورية ليست تبديلية (iii) زمرة غير دورية من الرتبة 4

(iv) زمرة تحتوي فقط على عنصرين محايدين. (v) عملية ثنائية غير تنسيقية

7. (أ) ليكن كل من H, K زمرة جزئية من الزمرة G برهن أن: $H \cup K$ زمرة جزئية من G إذا وإذا كان فقط $H \subseteq K$ أو $K \subseteq H$ (ب) ليكن $\varphi: G \rightarrow G'$ دالة تشاكل فوقية برهن أن: G' زمرة تبديلية إذا وإذا كان فقط $aba^{-1}b^{-1} \in \ker \varphi$ لكل $a, b \in G$