

- س1. فيما يلي إذا كانت العبارة صحيحة برهن وإذا كانت خاطئة أعط مثلاً يوضح ذلك:
- (i) إذا كانت * عملية ثنائية تبديلية على المجموعة A فإن * تكون عملية تنسيقية أيضاً.
- (ii) ليكن G مجموعة معرف عليها عملية ثنائية * وليكن H مجموعة جزئية غير خالية من G فإذا كانت * عملية تنسيقية على G فإن * تكون تنسيقية أيضاً على المجموعة H
- (iii) ليكن G زمرة وليكن $a \in G$ عنصر له رتبة منتهية فإذا كان x أي عنصر آخر من عناصر G فإن:
- $$O(xax^{-1}) = O(a)$$

- س2.أ) برهن أن $G = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}, +)$
- ب) برهن أن كل زمرة دورية غير منتهية تتشاكل مع الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$

- س3.أجب عن فقرتين فقط:
- أ) ليكن $f: G_1 \rightarrow G_2$ دالة تشاكل زمري تقابلي وليكن $x \in G_1$ برهن أن $O(f(x)) = O(x)$
- ب) ليكن $\varphi: G \rightarrow H$ دالة تشاكل زمري وليكن R علاقة معرفة على الزمرة G كالتالي $(x, y) \in R$ إذا وإذا كان فقط $\varphi(x) = \varphi(y)$ برهن أن R علاقة تكافؤ على G
- ج) ليكن * عملية ثنائية معرفة على المجموعة Z كالتالي: $x * y = x + y - xy \quad \forall x, y \in Z$ برهن أن الدالة $f: Z \rightarrow Z$ المعرفة بـ $f(x) = 1 - x \quad \forall x \in Z$ تكون دالة تشاكل تقابلي من النظام (Z, \times) إلى النظام $(Z, *)$

- س4.أ) أوجد كل المجموعات المصاحبة للزمرة الجزئية $(4\mathbb{Z}, +)$ من الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$
- ب) أذكر كل الزمر الجزئية من الزمرة $(\mathbb{Z}_{36}, +_{36})$ ثم أرسم المخطط الشبكي لها.

- س5.أ) إذا كان $\mu, \tau \in S_6$ حيث $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ، $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ فأوجد $|\mu|$ ، $\mu\tau$ ، μ^{100} ، τ^{-1}
- ب) حل المعادلة $(1 \ 2) \circ x \circ (1 \ 3 \ 2) = (1)$ في الزمرة (S_3, \circ)

- س6.أ) إذا كان a عنصراً في الزمرة G رتبته m برهن أن $a^n = e$ إذا وإذا كان فقط $m|n$
- ب. عرف الزمرة الجزئية الناظرية ثم برهن أن كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية لا بد أن تكون ناظرية

انتهت الأسئلة تمنياتي للجميع بالنجاح 2008/12/29

السؤال الإضافي: 5 درجات

- إذا كان G زمرة وكان $(xy)^n = x^n y^n \quad \forall x, y \in G$ من أجل ثلاث قيم صحيحة موجبة متتالية للعدد n برهن أن G يجب أن تكون تبديلية. ثم أعط مثلاً لزمرة غير تبديلية يتحقق فيها $(xy)^n = x^n y^n$ من أجل قيمتين صحيحتين موجبتين متتاليتين فقط للعدد n