

جامعة المرقب

كلية إمداد المعلمين بزلتين

الاختبار الثاني في مقرر جبر مجرد 1 للسنة الثالثة بقسم الرياضيات للعام الجامعي 2004 – 2005

من الفقرات أ، ب، ج أجب عن فقرتين فقط في كل سؤال من الأسئلة التالية:

1(أ) عرف ما يلي: الزمرة – الزمرة الجزئية – الزمرة الدورية

ب) إذا كانت G زمرة، $\{H_i\}_{i \in I}$ عائلة من الزمر الجزئية من G برهن أن $\bigcap_{i \in I} H_i$ زمرة جزئية من G

ج) ليكن $G = (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \times)$ وليكن $H = \left\{ \begin{bmatrix} 2^m & b \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} : m, n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R} \right\}$ برهن أن (H, \times) زمرة جزئية من G

2(فيما يلي إذا كانت العبارة صحيحة برهن وإذا كانت خاطئة أعط مثال:

أ) (i) إذا كان كلا من H ، K زمرة جزئية غير تافهة من الزمرة $(\mathbb{R}, +)$ فإن $H \cap K$ يكون زمرة جزئية غير تافهة.

(ii) الزمرة S_n ليست تبديلية لكل $n \geq 3$

ب) (i) كل زمرة دورية تكون تبديلية (ii) كل زمرة تبديلية تكون دورية

ج) (i) إذا كانت H مجموعة جزئية من الزمرة $(G, *)$ وكانت العملية $*$ مغلقة في المجموعة H التي تحتوي على المحايد فإن H

زمرة جزئية من G

(ii) إذا كانت G زمرة، $a \in G$ فإن: $a = a^{-1}$ إذا وإذا كان فقط $a^2 = e$

3(أكمل ما يأتي: أ) إذا كان $\mu, \lambda \in S_7$ حيث $\mu = (1\ 5\ 2\ 4\ 3)(6\ 7)$ ، $\lambda = (1\ 6)(2\ 3\ 4\ 5\ 7)$ فإن:

$$O(\mu) = \dots\dots\dots, \quad \lambda\mu^{-1} = \dots\dots\dots, \quad \mu\lambda = \dots\dots\dots$$

ب) إذا كانت Q زمرة الأعداد القياسية مع عملية الجمع، Q^* زمرة الأعداد القياسية عدا الصفر مع عملية الضرب فإن عناصر

الزمرة الجزئية $\langle 7 \rangle$ من الزمرة Q هي $\dots\dots\dots$ ، عناصر الزمرة الجزئية $\langle 7 \rangle$ من الزمرة Q^* هي $\dots\dots\dots$

ج) رتبة العنصر 2 في الزمرة (\mathbb{R}^*, \times) هي $\dots\dots\dots$ ورتبة العنصر $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ هي $\dots\dots\dots$

4(أ) عرف ما يلي: التشاكل الزمري – التشاكل الزمري الداخلي – نواة التشاكل

ب) إذا كانت φ دالة تشاكل زمري برهن أن φ تشاكل أحادي إذا وإذا كان فقط $\text{Ker}(\varphi) = \{e\}$

ج) إذا كانت G زمرة برهن أنه إذا كان $a^2 = e$ لكل $a \in G$ فإن G زمرة تبديلية

5(أ) برهن أن الدالة $\varphi: (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}/\{-2\}, *)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(r) = r - 2 \quad \forall r \in \mathbb{R}^*$ تكون دالة تشاكل حيث

$$a * b = ab + 2a + 2b + 2 \quad \text{ثم بين ما إذا كان التشاكل تقابلي أم لا}$$

ب) إذا كان a عنصر مثبت في الزمرة G ، عرفت $\varphi: G \rightarrow G$ بالقاعدة $\varphi(g) = aga^{-1} \quad \forall g \in G$ برهن أن φ تشاكل

تقابلي

ج) برهن أن كل زمرة دورية غير منتهية تتشاكل مع الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$

السؤال التالي تتم الإجابة عليه بالمتزل ويسلم يوم السبت القادم

(6) إذا كانت G زمرة وكان $\forall x, y \in G (xy)^n = x^n y^n$ من أجل ثلاث قيم صحيحة موجبة متتالية للعدد n برهن أن G يجب أن تكون تبديلية. ثم أعط مثالاً لزمرة غير تبديلية يتحقق فيها $(xy)^n = x^n y^n$ من أجل قيمتين صحيحتين موجبتين متتاليتين فقط للعدد n

انتهت الأسئلة مع تمنياتي للجميع بالتوفيق
2005 .2 .9