

الاختبار النصفى في الجبر المجرد 2 لطلاب السنة الرابعة للعام الجامعي 2009 / 2010

الزمن: 11:00 - 12:30

أجيب عن 4 أسئلة فقط من الأسئلة التالية:

س1. أ. ضعي علامة  $\sqrt$  أمام العبارة الصحيحة وعلامة  $\times$  أمام العبارة الخاطئة مع تصحيح الخطأ:  
 (1) في كل حلقة لا تحتوي على قواسم للصفر يوجد عنصر محايد. (2) في كل حلقة  $(R, \oplus, \otimes)$  تكون العملية  $\oplus$  تبديلية.  
 (3) إذا كانت  $R$  حلقة تبديلية، فإن  $ac = ab$  فإن  $c = b$  (4) مميز الحلقة  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  هو الصفر.  
 ب. برهني أنه إذا كانت  $R$  حلقة تبديلية ذات عنصر محايد فإن أي عنصر قابل للعكس في هذه الحلقة لا يمكن أن يكون قاسماً للصفر.

س2. ليكن  $\oplus$ ،  $\otimes$  عمليتين ثنائيتين معرفتين على مجموعة الأعداد الصحيحة  $Z$  كالتالي:  
 $a \oplus b = a + b - 1$ ،  $a \otimes b = ab - (a + b) + 2$  برهني أن:  $(Z, \oplus, \otimes)$  تكون منطقة صحيحة.

س3. أ. لتكن  $(R, +, \cdot)$  حلقة ولتكن  $C(R) = \{x \in R : r \cdot x = x \cdot r \ \forall r \in R\}$  مركز الحلقة  $(R, +, \cdot)$  برهني أن:  
 $(C(R), +, \cdot)$  حلقة جزئية من الحلقة  $(R, +, \cdot)$ .

ب. نعلم أنه إذا كانت الحلقة ذات عنصر واحد فقط فلا بد أن يكون هذا العنصر هو صفر الحلقة (العنصر المحايد بالنسبة للعملية  $+$ ) وبذلك فإن  $(\{0\}, +, \cdot)$  حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ويكون العنصر المحايد بالنسبة للعملية  $\times$  هو  $0$  أيضاً. برهني أنه إذا كانت الحلقة ذات عنصر محايد وتحتوي على أكثر من عنصر واحد فإن صفر الحلقة يختلف عن العنصر المحايد.

س4. أ. إذا كانت  $R$  حلقة بحيث  $a^2 = a$  لكل  $a \in R$  برهني أن مميز  $R$  يساوي 2  
 ب. ليكن  $R$  حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة  $2 \times 2$  بداخل من الأعداد الحقيقية مع عمليتي جمع وضرب المصفوفات وليكن:  $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, d \in \mathbb{Z}, b, c \in 2\mathbb{Z} \right\}$  برهني أن  $S$  حلقة جزئية من  $R$  ثم وضح ما إذا كانت  $R$  منطقة صحيحة أم لا؟

س5. أ. برهني أن  $Z_n$  تكون منطقة صحيحة إذا وإذا كان فقط  $n$  عدد أولي.  
 ب. ليكن  $J$  حلقة جزئية من الحلقة  $R$ ، و  $K$  حلقة جزئية من الحلقة  $S$  برهني أن  $J \times K$  حلقة جزئية من الحلقة  $R \times S$