**الأسئلة والإجابة النموذجية للاختبار النصفي الثاني في الجبر المجرد2 لطلاب السنة الرابعة للعام الجامعي 2009 / 2010**

===============================================================

**س1**.أ) ليكن كلاً من $I,J$ مثالية من الحلقة التبديلية $R$ .

**i**) برهن أن $I \cap J$ مثالية من $R$ **ii**) هل $I \cup J$ مثالية من $R$ ؟ برهن صحة ما تقول

**البرهان**

**i**) واضح أن $I \cap J \neq \phi$ لأنها على الأقل تحتوي على صفر الحلقة.

نفرض أن $a,b \in I \cap J$

إذاً $a,b \in J$ ، $a,b \in I$ وبما أن كلاً من $I,J$ حلقة فإن $a-b \in J$ ، $a-b \in I$

وكذلك $a.b \in J$ ، $a.b \in I$ وهذا يعني أن $a-b \in I \cap J$ ، $a.b \in I \cap J$

وهذا يبرهن أن $I \cap J$ حلقة جزئية من الحلقة $R$

**ii**) $I \cup J$ ليس من الضروري أن تكون مثالية من $R$ والمثال التالي يوضح ذلك:

لاحظ أن كلاً من $(2Z,+,\cdot),(3Z,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Z,+,\cdot)$ ولكن $(2Z \cup 3Z,+,\cdot)$ ليست حلقة جزئية من $(Z,+,\cdot)$ لأن $2,3 \in 2Z \cup 3Z$ بينما $2+3=5 \notin 2Z \cup 3Z$ .

ب) برهن أن الحلقة التبديلية ذات العنصر المحايد $R$ تكون مجالاً إذا و إذا كان فقط $R$ تحتوي على مثاليتين فقط هما $R,\{0\}$

**البرهان:**

**أولا**: نفرض أن $R$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد تكون مجالاً و نبرهن أن $R$ تحوي مثاليتين فقط هما $R,\{0\}$ .

نفرض أن $I \neq \{0\}$

الآن لكل $0 \neq x \in I$ فإن $x^{-1} \in R$ " لأن $R$ مجال "

$1 = xx^{-1} \in I$ "لأن $I$ مثالية من $R$ "

الآن لكل $r \in R$ نجد أن:

$$r = 1.r \in R$$
$$\therefore \quad R \subseteq I$$

و بما أن $I$ مثالية من $R$ فهذا يعني أن $I \subseteq R$

$$\therefore \quad R = I$$

ثانيا: نفرض أن $R$ تحتوى المثاليتين $R,\{0\}$ فقط ونبرهن أن $R$ تكون مجالاً.

ليكن $0 \neq x \in R$

نعلم أن $J = \{xr : r \in R\}$ مثالية من $R$ (لأن $R$ حلقة تبديلية)

واضح أن $J \neq \{0\}$ لأن $x \neq 0$، و$x = x.1 \in J$ ولكن من الفرض $R$ تحوى مثاليتين فقط هما $R, \{0\}$ وهذا يعني أن $J = R$

و بما أن $R$ حلقة ذات عنصر محايد فإن $1 \in J$ وبالتالي فإنه يوجد $y \in R$ بحيث $xy = 1$ أي أن لكل $0 \neq x \in R$ يوجد معكوس ولذلك فإن $R$ تكون مجال .

س2.أ) إذا كانت $R$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و كانت $I$ مثالية في $R$، برهني أن: $R/I$ منطقة صحيحة إذا وإذا كان فقط $I$ مثالية أولية.

**البرهان**

لكل $a,b \in R$ إذا كان $a \notin I$، $b \notin I$، فإن $a+I \neq I$ و $b+I \neq I$ في الحلقة $R/I$، بهذا فإن $(a+I)(b+I) \neq I$ أي أن $ab+I \neq I$

إذاً $ab \notin I$ أي أن $I$ مثالية أولية .

العكس: لنفرض أن $I$ مثالية أولية في $R$

لكل $0 \neq a+I \in R/I$ ، $0 \neq b+I$ فإن $a+I \neq I$ ، $b+I \neq I$ أي أن $a \notin I$ و $b \notin I$

وبما أن $I$ مثالية أولية فإن $ab \notin I$ أي أن $ab+I \neq I$ .

ولكن $ab+I = (a+I)(b+I)$

بهذا فإن $(a+I)(b+I) \neq 0$ ومن ذلك نستنتج أن $R/I$ منطقة صحيحة .

**ب)** برهني أنه في المنطقة الصحيحة يكون العنصر الوحيد المعدوم القوى هو الصفر.

**البرهان:**

نفرض أن $R$ منطقة صحيحة تحتوي على عنصر $r \neq 0_R$ معدوم القوى من الدرجة $n$ أي أن $r^n = 0_R$ بينما $r^{n-1} \neq 0$

الآن: $r.r^{n-1} = r^n = 0_R$ وهذا يتناقض مع فرضنا بأن $r \neq 0$ وبذلك نستنتج أن العنصر الوحيد المعدوم القوى في المنطقة الصحيحة هو الصفر.

س3.أ) إذا كانت $R$ حلقة و كانت $J, I$ مثاليتين في $R$ برهني أن $I+J = \{x+y : x \in I, y \in J\}$ مثالية في $R$

**البرهان**

واضح أن $I+J \neq \phi$ لأنها على الأقل تحتوي على $0_R$ حيث $0_R = 0_R + 0_R$

لكل $a,b \in I+J$ فإن $a = x_1 + y_1$ ، $b = x_2 + y_2$ حيث $x_1, x_2 \in I$ ،و $y_1, y_2 \in J$

الآن: $a-b=x_1+y_1-(x_2+y_2)=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\in I+J$

و كذلك لكل $r\in R$ فإن $ra=r(x_1+y_1)=rx_1+ry_1\in I+J$

$ar=(x_1+y_1)r=x_1r+y_1r\in I+J$

و ذلك لأن $J,I$ مثاليتان في $R$، وعليه فإن $I+J$ مثالية في $R$ .

ب) إذا كان $a$ قاسماً للصفر في الحلقة التبديلية $R$ برهني أن $ac$ قاسم للصفر في $R$ حيث $c\in R$

نفرض أن $a\neq 0_R$ قاسماً للصفر في الحلقة التبديلية $R$ أي أنه يوجد $0_R\neq b\in R$ حيث $ba=0_R$ ونفرض أن $c\in R$

الآن: $b(ac)=(ba)c=(0_R)c=0$

أي أن $ac$ قاسماً للصفر.

س4.(أجيبي عن فقرتين فقط)فيما يلي إذا كانت العبارة صحيحة برهني وإذا كانت خاطئة أعطِ مثالاً يوضح ذلك:

أ) كل منطقة صحيحة منتهية تكون مجال.√

**البرهان**

نفرض أن $D$ منطقة صحيحة منتهية عناصرها هي $0,1,a_1,a_2,.......,a_n$

$D$ لا تحتوي على قواسم للصفر ولذلك قانون الحذف متحقق في $D$ ومن ذلك نجد أن كل العناصر الآتية مختلفة $a,aa_1,aa_2,.......,aa_n$ حيث $0\neq a\in D$ و كل هذه العناصر تختلف عن الصفر، هذا يعني أن هذه العناصر هي عبارة عن $1,a_1,a_2,.......,a_n$ في ترتيب ما، وبالتالي فإن $a.1=1$ وهذا يؤدي إلى أن $a=1$ أو هناك $i$ حيث $aa_i=1$ وهذا يعني أن $a_i$ معكوس ضربي للعنصر $a$ وبالتالي يكون لكل عنصر $0\neq a\in D$ معكوس. ولذلك فإن $D$ تكون مجالاً

ب) ليكن $f(x)=x$ دالة تشاكل حلقي من الحلقة $R$ إلى الحلقة $S$ فإذا كانت $I$ مثالية من $R$ فإن $f(I)$ مثالية من $S$ ×

لاحظ أن الدالة $f:Z\to Q$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x\ ,\forall x\in Z$ دالة تشاكل حلقي، والحلقة $2Z$ مثالية من الحلقة $Z$ ولكن $f(2Z)=2Z$ ليست مثالية من $Q$ لأن $2\in 2Z$ ، $\frac{1}{3}\in Q$ ولكن $2(\frac{1}{3})=\frac{2}{3}\not\in 2Z$

ج) كل مجال يكون منطقة صحيحة.√

**البرهان**

بفرض أن $ab=ac$ حيث $a,b,c\in F$ و $F$ مجال و $a\neq 0$ لهذا فإن $a$ له معكوس في $F$

إذاً

$$a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)$$
$$(a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c$$

$$b=c$$

هذا يعني أن $F$ لا تحتوي على قواسم للصفر وبالتالي نستطيع القول بأن $F$ منطقة صحيحة.

د) كل حلقة ذات عنصر محايد تكون تبديلية.×

ليس من الضروري أن تكون الحلقة ذات العنصر المحايد تبديلية والمثال على ذلك حلقة المصفوفات المربعة بمداخل من الأعداد الحقيقية تحتوي على عنصر محايد وهو المصفوفة المحايدة ولكن ضرب المصفوفات غير تبديلي.

**س5.أ)** برهني أنه إذا كانت الحلقتين $R,S$ متشاكلتين تقابلياً وكانت $R$ تبديلية فإن $S$ تكون تبديلية أيضاً.

**البرهان:**

نفرض أن $f:R\to S$ دالة تشاكل تقابلي، نفرض أن $x,y\in S$

بما أن $f$ دالة فوقية فإنه يوجد عنصرين $a,b$ في الحلقة $R$ بحيث $f(a)=x, f(b)=y$

الآن $xy=f(a)f(b)=f(ab)=f(ba)=f(b)f(a)=yx$

أي أن الحلقة $S$ تكون تبديلية أيضاً.

ب) إذا كانت الدالة $\varphi:R\to S$ تشاكلاً من الحلقة $R$ إلى الحلقة $S$، برهني أن:

$Ker\,\varphi=\{r\in R:\varphi(r)=0_s\}$ مثالية من $R$.

**البرهان:**

واضح أن $\text{Ker}\,\varphi\neq\phi$ لأنها على الأقل تحتوي على $0_R$ لأن $\varphi(0_R)=0_S$

نفرض أن $x,y\in\text{Ker}\,\varphi$

إذاً $\varphi(x)=0_S\quad,\quad\varphi(y)=0_S$

$$\varphi(x-y)=\varphi(x)-\varphi(y)$$
$$=0_S-0_S=0_S$$

إذاً $x-y\in\text{Ker}\,\varphi$

هذا يعني أن $\text{Ker}\,\varphi$ زمرة جزئية من $R$.

نفرض أن $x\in\text{Ker}\,\varphi$، و $r\in R$

الآن $\varphi(rx)=\varphi(r)\cdot\varphi(x)=\varphi(r)\cdot 0_S=0_S$

$$\varphi(xr)=\varphi(x)\cdot\varphi(r)=0_S\cdot\varphi(r)=0_S$$

هذا يعني أن $xr,rx\in\text{Ker}\,\varphi$

إذاً $Ker\,\varphi$ مثالية من $R$.