

اختبار الدور الأول في مقرر الجبر المجرد 2 لطلاب السنة الرابعة للعام الجامعي 2008 / 2009

الزمن: ساعتان

أجب عن 4 أسئلة فقط من الأسئلة التالية

س1.أ) اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المذكورة أمام كل عبارة مما يأتي: (8 درجات)

1. المجموعة $A = \{ri : r \in IR, i = \sqrt{-1}\}$ مع عمليتي جمع وضرب الأعداد المركبة تكون:

{ حلقة تبديلية - ليست حلقة - مجال - منطقة صحيحة }

2. ليكن $R = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Z_6\}$ حلقة مع عمليتي الجمع والضرب بمقياس 6 فإن $\sqrt{2}$ يكون:

{ قاسم للصفر - قابل للعكس - عديم القوى من الدرجة 3 - لاشيء مما ذكر }

3. إذا كان a عنصر جامد في الحلقة R حيث $a \neq 0_R, a \neq 1_R$ فإن a يكون:

{ عديم القوى - قاسم للصفر - قابل للعكس - عدد زوجي. }

4. إذا كانت R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد فإن $\{0_R\}$ تكون:

{ مثالية أولية - مجال - ليست حلقة - مثالية }

ب) إذا كانت R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وكانت I مثالية من R برهن أن:

R/I منطقة صحيحة إذا وإذا كان فقط I مثالية أولية. (7 درجات)

س2.أ) ليكن $(R, +, \cdot)$ حلقة فإذا كان $a, b, c, d \in R$ فأوجد كل من: $(a+b)^2, (a+b)(c+d)$ (5 درجات)

ب) اثبت أنه إذا كانت U هي مجموعة كل العناصر القابلة للعكس في الحلقة التبديلية $(R, +, \cdot)$ ذات العنصر المحايد

فإن U تكون زمرة مع عملية الضرب المعرفة على R (5 درجات)

ج) عرف كل من: الحلقة - مميز الحلقة (5 درجات)

س3.أ) إذا كانت $\varphi: R \rightarrow S$ دالة تشاكل حلقي و $a \in R$ برهن أن:

$\varphi(a^n) = (\varphi(a))^n$ لكل $n \in IN$ (7 درجات)

ب) برهن أن مجموعة المصفوفات المربعة من الشكل $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ حيث $a, b \in IR$ هي مثالية اليمنى للحلقة

$M_{2 \times 2}(IR)$ ثم وضح ما إذا كانت مثالية يسرى أم لا؟ (8 درجات)

س4) فيما يلي إذا كانت العبارة صحيحة برهن وإذا كانت خاطئة أعط مثالا يوضح ذلك: (15 درجة)

1. الدالة $\varphi: Z \rightarrow Z$ المعرفة بـ $\varphi(x) = -2x$ تكون تشاكل حلقي.

2. إذا كانت R حلقة ذات عنصر محايد بحيث $R \neq \{0_R\}$ فإن $1_R \neq 0_R$

3. ليكن $(R, +, \cdot)$ حلقة و a عنصراً في R فإذا كانت $S_a = \{x \in R : x.a = 0\}$ فإن:

$(S_a, +, \cdot)$ حلقة جزئية من $(R, +, \cdot)$

4. إذا كان S_1, S_2 حلقتان جزئيتان من الحلقة R فإن $S_1 \cup S_2$ حلقة جزئية من R

5. $(3Z, +, \cdot)$ مثالية من الحلقة $(Z, +, \cdot)$

س5.أ) إذا كان $f: R \rightarrow S$ تشاكل حلقي فوقي وكانت I مثالية من R برهن أن: $f(I)$ مثالية من S (5 درجات)

ب) برهن أن أي مجال يكون منطقة صحيحة. (5 درجات)

ج) برهن أن مميز المنطقة الصحيحة يكون صفر أو عدد أولي. (5 درجات)