

أجب عن 5 أسئلة فقط من الأسئلة التالية: (لكل سؤال 20 درجة)

س1. ضع علامة \surd أمام العبارة الصحيحة وعلامة \times أمام العبارة الخاطئة مع التعليل (غير مطلوب منك برهان ، يكفي ذكر مُبرر مناسب أو تعريف أو مبرهنة)
1. كل زمرة رتبها 17 تكون تبديلية.

2. كل مجموعة جزئية من زمرة دورية هي زمرة جزئية مع العملية المعرفة على الزمرة.

3. S_n ليست دورية لأي $n \geq 1$

4. الدالة $\varphi: G \rightarrow G'$ تكون تشاكل زمري إذا وإذا كان فقط φ دالة أحادية وفوقية.

5. أي زميرتين ذات ثلاثة عناصر متشاكلتين تقابلياً.

6. A_3 زمرة تبديلية.

س2. فيما يلي إذا كانت العبارة صحيحة برهن وإذا كانت خاطئة أعطِ مثالاً يوضح ذلك.

1. كل زمرة جزئية من الزمرة التبادلية G تكون زمرة جزئية ناظمية من G .
2. الضرب المباشر لمنطقتين صحيحتين يكون منطقة صحيحة.
3. مجموعة التباديل الفردية في S لا تكون زمرة جزئية من S .
4. كل زميرتين منتهيتين لهما نفس عدد العناصر متشاكلتين تقابلياً.
5. لتكن R حلقة تبادلية ذات عنصر محايد فإذا وجد عنصر $a \in R$ له معكوس في R فإن R تكون مجال.

س3. ضع خط تحت الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المذكورة أمام كل عبارة:

1. تقاطع المناطق الجزئية الصحيحة من منطقة صحيحة R : { يكون منطقة صحيحة - يكون مجال - ليس من الضروري أن يكون منطقة صحيحة - لا شيء مما سبق }
2. حل المعادلة $2 \times x = 10$ في الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ هو: { ϕ أو 5 أو 8 }
3. إذا كانت R حلقة حيث $r^2 = r$ لكل $r \in R$ فإن: { $a + a = 0 \forall a \in R$ أو $\exists a \in R : 2a = 0$ أو لا شيء مما سبق }
4. صفة الإبدال في الزمرة: { صفة بنيوية - ليست صفة بنيوية - صفة بنيوية فقط عندما تكون الزمرة دورية - لا شيء مما سبق }
5. المنطقة الصحيحة غير المنتهية تكون: { مجال - ليست مجال - لا تحتوي على عنصر محايد - لا شيء مما سبق }

س4. أ. أعطِ (إن وجد) مثلاً مناسباً لكل فقرة مما يلي:

(i) زمرة غير منتهية مولدة بأربعة عناصر

(ii) زمرة غير تبديلية من الرتبة 7

(iii) زمرة غير دورية من الرتبة 6

(iv) عملية ثنائية تنسيقية غير تبديلية

(v) زمرة دورية رتبته 21

ب. برهن أن الدالة $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow F_D$ المعرفة بـ $\varphi(a) = [(a,1)] \quad \forall a \in \mathbb{R}$ تكون تشاكل أحادي حيث F_D هو مجال كسور المنطقة الصحيحة.

س5.أ. لتكن $(\mathbb{R}, +)$ زمرة تبديلية، 0_R العنصر المحايد في المجموعة \mathbb{R} بالنسبة للعملية $+$ ولتكن \times عملية معرفة على \mathbb{R} كالآتي: $a \times b = 0_R$ لكل $a, b \in \mathbb{R}$ برهن أن $(\mathbb{R}, +, \times)$ تكون حلقة.

ب. إذا كان a قاسماً للصفر في الحلقة التبديلية \mathbb{R} برهن أن ac قاسم للصفر في \mathbb{R} حيث $c \in \mathbb{R}$

س6.أ. ليكن $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{IR} \right\}$ حلقة مع عمليتي جمع وضرب المصفوفات وليكن

$\varphi: R \rightarrow \mathbb{IR} \times \mathbb{IR}$ $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{IR} \right\}$ برهن أن I مثالية من R ثم برهن أنه توجد دالة تشاكل فوق $\varphi: R \rightarrow \mathbb{IR} \times \mathbb{IR}$ ثم أوجد $\ker(\varphi)$

ب. ليكن R حلقة حيث $r^2 = r$ لكل $r \in R$ برهن أن R حلقة تبديلية.

س7.أ. برهن أن المجموعة $H = \left\{ \frac{1+2n}{1+2m} : n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ تكون زمرة جزئية من الزمرة (\mathbb{Q}^*, \times) حيث \mathbb{Q}^* مجموعة الأعداد القياسية ما عدا الصفر.

ب. عرف رتبة العنصر في الزمرة ، وإذا كان a عنصراً في الزمرة G رتبته m برهن أن $a^n = e$ إذا وإذا كان فقط $m|n$

انتهت الأسئلة تمنياتي للجميع بالتوفيق
بسم الله الرحمن الرحيم
2008/6/8.....