

س1. أكمل العبارات التالية بما يناسبها:

1. في الزمرة (\mathcal{C}^*, \times) رتبة العنصر $i -$ تساوي 2. رتبة العنصر $(5,3)$ في الزمرة $(Z_{12} \times Z_4, +)$ تساوي
3. الزمر الجزئية من الزمرة $(Z_{23}, +_{23})$ هي
4. المجموعات المصاحبة للزمرة الجزئية $H = \{0,4,8\}$ من الزمرة $(Z_2, +_2)$ هي
5. إذا كانت φ دالة تشاكل من الزمرة $(\mathbb{R}, +)$ إلى الزمرة (\mathbb{R}^+, \times) فإن $\varphi(0) = \dots\dots\dots$
6. مبرهنة كيلبي تنص على أن

س2. أ. برهن أن الزمرتين $(\mathbb{R}, +)$ ، و (\mathbb{R}^+, \times) متشاكلتين تقابلياً

- ب. ليكن كلاً من N, M زمرة جزئية ناظرية من الزمرة G برهن أن $N \cap M$ زمرة جزئية ناظرية من G
- ج. إذا كانت G زمرة تبديلية ، N زمرة جزئية ناظرية من G برهن أن زمرة القسمة G/N تكون تبديلية.

س3. أ. عرف كلاً من: الحلقة - المجال

ب. برهن أن مميز المنطقة الصحيحة يكون صفر أو عدد أولي

ج. ليكن $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ، $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ برهن أن: $(I, +, \times)$ مثالية من الحلقة $(R, +, \times)$

س4. أ. عرف كلاً من: الزمرة - نواة التشاكل

ب. إذا كان $f(x), g(x) \in Z_6[x]$ حيث $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ ، $g(x) = 3x^3 + 2x + 2$ فأوجد $f(x).g(x)$

ج. إذا كان S_1, S_2 حلقتان جزئيتان من الحلقة R برهن أن $S_1 \cap S_2$ حلقة جزئية من R .

س5. فيما يلي إذا كانت العبارة صحيحة برهن وإذا كانت خاطئة أعط مثلاً يوضح ذلك:

1. كل الزمر من الرتبة 4 متشاكلت تقابلياً.
2. الزمرتين $(Z_8, +)$ ، $(Z \times Z, +)$ متشاكلتين تقابلياً.
3. إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ فإنه يوجد عدد طبيعي n بحيث $a^n = e$
4. إذا كان $\varphi: Z \rightarrow Z$ دالة تشاكل حلقي فوقي فإن $\varphi(5) = 5$
5. كل حلقة تبديلية تحتوي على عنصر محايد.
6. لا يوجد تبديل $\sigma \in S_n$ بحيث $\sigma^2 = (1\ 2)$

س6. أ. ليكن $f: R \rightarrow S$ تشاكل حلقي فإذا كانت N حلقة جزئية من R برهن أن $f(N)$ حلقة جزئية من S

ب. ليكن $*$ عملية ثنائية معرفة على المجموعة Q^+ كالتالي: $a * b = \frac{ab}{3}$ لكل $a, b \in Q^+$ برهن أن $(Q^+, *)$ زمرة.

ج. ليكن $G = Q - \{0\}$ ، $H = \{2^n : n \in Z\}$ برهن أن (H, \times) زمرة جزئية من الزمرة (G, \times)