جامعة المرقب | **كلية إعداد المعلمين – زليتن**

قسم الرياضيات

الاختبار النصفي في مقرر أسس الرياضيات لطلاب السنة الأولى للعام الجامعي 2004 – 2005

أجب عن 4 أسئلة فقط من الأسئلة التالية: **الزمن: 8:00 – 10:30**

1)أ) فيما يلي برهن العبارة التي تعتقد أنها صحيحة وأعطِ مثالاً يوضح خطأ العبارة التي تعتقد أنها خاطئة:

حيث R، Q علاقتين معرفتين على المجموعة غير الخالية B

i) إذا كانت R علاقة متماثلة فإنها تكون غير متخالفة.

ii) إذا كان $R \bigcap R^{-1} \neq \phi$ فإن R علاقة عاكسة.

iii) إذا كان $R \bigcap R^{-1} \neq \phi$ فإن R علاقة متماثلة.

iv) إذا كان R متخالفة ، Q متخالفة فإن $R \bigcup Q$ تكون متخالفة.

v) R علاقة متماثلة $\Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R$

ب) وضح ما إذا كان البرهان صحيح أو خاطئ مع تصويب الخطأ (إن وجد) سواء كان في العبارة نفسها أو في طريقة برهانها:

* ليكن كلاً من A, B, C مجموعة فإذا كان $A \times B = A \times C$ ، $A \neq \phi$ فإن $B = C$

البرهان

من المعطيات نعلم أن $A \times B = A \times C$

بقسمة الطرفين على A نحصل على $\dfrac{A \times B}{A} = \dfrac{A \times C}{A}$

بالاختصار نستنتج أن $B = C$

2)أ) ليكن $\{R_i\}_{i \in I}$ عائلة علاقات معرفة على المجموعة غير الخالية A برهن أن: $\mathrm{dom}\,(\bigcup R_i) = \bigcup(\mathrm{dom}\, R_i)$

ب) ليكن R علاقة معرفة على المجموعة غير الخالية A

i) متى تكون R علاقة غير عاكسة ii)متى تكون R علاقة لا انعكاسية iii)متى تكون R غير متماثلة

ج) وضح ما إذا كان البرهان صحيح أو خاطئ مع تصويب الخطأ (إن وجد) سواء كان في العبارة نفسها أو في طريقة برهانها:

* ليكن كلاً من A, B, C, D مجموعة ،فإذا كان $A \subseteq B$ ، $C \subseteq D$ فإن $A \times C \subseteq B \times D$

البرهان

نفرض العكس أي أن $A \times C \not\subset B \times D$ وهذا يعني أنه يوجد (x, y) حيث $(x, y) \in A \times C$ ، $(x, y) \notin B \times D$

$$(x, y) \in A \times C \;\Rightarrow\; x \in A \text{ and } y \in C \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(x, y) \notin B \times D \;\Rightarrow\; x \notin B \text{ and } y \notin D \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\because\; C \subseteq D \text{ ، } A \subseteq B \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

من (1) ، (3) نستنتج أن $x \in B \text{ and } y \in D$ وهذا يتناقض مع (2)

ومن هذا التناقض نستنتج أن فرضنا خاطئ وبالتالي فإن $A \times C \subseteq B \times D$

بقية الأسئلة في الصفحة التالية

3)أ) ليكن كلاً من $\{A_i\}_{i\in I}$ **و** $\{B_j\}_{j\in J}$ **عائلة مجموعات مفهرسة برهن أن:** $(\bigcap_{i\in I} A_i)\times(\bigcap_{j\in J} B_j)=\bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_j)$

ب) برهن أن كل مجموعة مرتبة ترتيباً حسناً تكون مرتبة ترتيباً كلياً.

ج) وضح ما إذا كان البرهان صحيح أو خاطئ مع تصويب الخطأ (إن وجد) سواء كان في العبارة نفسها أو في طريقة برهانها:

* إذا كان كلاً من R ، Q علاقة ناقلة فإن $R\bigcap Q$ علاقة ناقلة.

البرهان

$$\text{let } (x,y)\in R\bigcap Q\ ,\ (y,z)\in R\bigcap Q$$
$$\therefore (x,y)\in R \text{ and } (x,y)\in Q\ ,\ (y,z)\in R \text{ and } (y,z)\in Q$$
$$\because (x,y)\in R\,,(y,z)\in Q$$
$$\therefore (x,z)\in R\bigcap Q$$

وبالتالي نستنتج أن $R\bigcap Q$ علاقة ناقلة

4)أ) برهن أن: $R=\left\{(a,b)\in Z\times Z:\dfrac{a+2b}{3}\in Z\right\}$ علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة Z

ب) ليكن $A=\{3,6,9,12,15\}$ وليكن $R=\{(x,y)\in A\times A: x \text{ يقبل القسمة على } y\}$ أوجد (إن وجد)في المجموعة A بالنسبة للعلاقة R كلاً من: أصغر عنصر ،العنصر الأصغري ، أكبر عنصر ، العنصر الأعظمي

ج) وضح ما إذا كان البرهان صحيح أو خاطئ مع تصويب الخطأ (إن وجد) سواء كان في العبارة نفسها أو في طريقة برهانها:

* إذا كانت R علاقة متماثلة ومتعدية على المجموعة X فإن R تكون علاقة عاكسة على المجموعة X.

البرهان

بما أن R علاقة متماثلة فإنه لكل $x,y\in X$ إذا كان $(x,y)\in R$ فإن $(y,x)\in R$.

بما أن $(y,x)\in R$ ، $(x,y)\in R$ ، R علاقة متعدية فإن $(x,x)\in R$ لكل $x\in X$

وهذا يبرهن أن R علاقة عاكسة.

5)أ) ليكن A مجموعة مرتبة كلياً بالعلاقة R برهن أنه يوجد على الأكثر عنصر واحد أصغري وهذا العنصر هو نفسه العنصر الأصغر.

ب) ليكن X مجموعة ،و R علاقة معرفة على $P(X)$ كالتالي: $R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X): A\bigcap B=\phi\}$

حدد ما إذا كانت R : عاكسة – متماثلة – متخالفة – متعدية .

ج) وضح ما إذا كان البرهان صحيح أو خاطئ مع تصويب الخطأ (إن وجد) سواء كان في العبارة نفسها أو في طريقة برهانها:

* لأي ثلاث مجموعات A,B,C إذا كان $A\bigcap B\neq\phi$ ، $C\bigcap B\neq\phi$ فإن $A\bigcap C\neq\phi$

البرهان:

$$A\bigcap B\neq\phi\Rightarrow \exists x\in A\bigcap B\Rightarrow x\in A \text{ and } x\in B \text{ ....(1)}$$

$$C\bigcap B\neq\phi\Rightarrow \exists x\in C\bigcap B\Rightarrow x\in C \text{ and } x\in B \text{ ....(2)}$$

من (1) ، (2) نجد أن:

$$x \in A \text{ and } x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow A \cap C \neq \phi$$

انتهت الأسئلة .... دعائي لكم جميعاً بالتوفيق والنجاح .... أ. محمد أحمد حمودة 2005.6.12