جامعة المرقب — كلية إعداد المعلمين – زليتن

قسم الرياضيات

الاجابة النموذجية للاختبار النصفي في مقرر أسس الرياضيات لطلاب السنة الأولى للعام الجامعي 2004 – 2005

1)أ)i) العبارة خاطئة لأنه إذا كانت R متماثلة فإنه ليس من الضروري أن تكون غير متخالفة والمثال التالي يوضح ذلك:

العلاقة $R=\{(1,1),(2,2)\}$ المعرفة على المجموعة $A=\{1,2,3,4\}$ متماثلة ومتخالفة في نفس الوقت.

ii) العبارة خاطئة والمثال التالي يوضح ذلك: ليكن R علاقة معرفة على المجموعة $B=\{1,2,3,4\}$ كالتالي:

$R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ وبالتالي فإن $R^{-1}=\{(1,1),(2,2),(3,1)\}$ ، $R\cap R^{-1}=\{(1,1),(2,2)\}\neq\phi$ ولكن العلاقة R ليست عاكسة لأن $(3,3)\notin R$

iii) العبارة خاطئة والمثال التالي يوضح ذلك: ليكن R علاقة معرفة على المجموعة $B=\{1,2,3,4\}$ كالتالي:

$R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ ، $R^{-1}=\{(1,1),(2,2),(3,1)\}$ ، $R\cap R^{-1}=\{(1,1),(2,2)\}\neq\phi$ ولكن العلاقة R ليست متماثلة لأن $(3,1)\notin R$

iv) العبارة خاطئة والمثال التالي يوضح ذلك: ليكن كلاً من R ، Q علاقة معرفة على المجموعة $B=\{1,2,3,4\}$ كالتالي:

$R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ ، $Q=\{(1,1),(2,2),(3,1)\}$

واضح أن كلاً من R ، Q علاقة متخالفة بينما $R\cup Q=\{(1,1),(2,2),(1,3),(3,1)\}$ ليست متخالفة لأن:

$(1,3),(3,1)\in R\cup Q$ لكن $1\neq 3$

v) العبارة صحيحة

البرهان: أولاً نفرض أن R علاقة متماثلة ونبرهن أن $R^{-1}\subseteq R$

$$(x,y)\in R^{-1}\Rightarrow (y,x)\in R\Rightarrow (x,y)\in R$$
$$\Rightarrow R^{-1}\subseteq R$$

ثانياً نفرض أن $R^{-1}\subseteq R$ ونبرهن أن R علاقة متماثلة

$$(x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R^{-1}\Rightarrow (y,x)\in R$$

إذاً R علاقة متماثلة

ب) البرهان خطأ لأن عملية القسمة والاختصار غير معرفة على المجموعات

البرهان الصحيح:

$$\begin{aligned}
&\text{let } x\in A\,,\,y\in B\\
&(x,y)\in A\times B\Rightarrow (x,y)\in A\times C\Rightarrow y\in C\\
&\therefore\ B\subseteq C.............(1)\\
&\text{let } a\in A\,,\,c\in C\\
&(a,c)\in A\times C\Rightarrow (a,c)\in A\times B\Rightarrow c\in B\\
&\therefore\ C\subseteq B..............(2)
\end{aligned}$$

من (1) ، (2) نستنتج أن $B=C$

2)أ) البرهان:

$$x \in dom(\bigcup_{i\in I} R_i) \Rightarrow \exists y \in A \ni (x,y) \in \bigcup_{i\in I} R_i \Rightarrow \exists h \in I \ni (x,y) \in R_h \Rightarrow x \in dom(R_h) \Rightarrow$$

$$x \in \bigcup (dom\, R_i) \Rightarrow dom(\bigcup R_i) \subseteq \bigcup (dom\, R_i)$$

$$a \in \bigcup (dom\, R_i) \Rightarrow \exists k \in I \ni a \in dom\, R_k \Rightarrow \exists b \in A \ni (a,b) \in R_k \Rightarrow (a,b) \in \bigcup_{i\in I} R_i \Rightarrow$$

$$a \in dom(\bigcup R_i) \Rightarrow \bigcup (dom\, R_i) \subseteq dom(\bigcup R_i)$$

$$\therefore dom(\bigcup_{i\in I} R_i) = \bigcup_{i\in I} (dom\, R_i)$$

ب) i) تكون R علاقة غير عاكسة على المجموعة A إذا وجد عنصر $x \in A$ بحيث $(x,x) \notin R$

ii) تكون R علاقة لا انعكاسية على المجموعة A إذا كان $\forall x \in A \;\; (x,x) \notin R$

iii) تكون R غير متماثلة على المجموعة A إذا وجد $(x,y) \in R$ بينما $(y,x) \notin R$ لأي عنصرين $x, y \in A$

ج) الخطأ في السطر الثالث (المعادلة (2)) والبرهان الصحيح كالتالي:

نفرض العكس أي أن $A \times C \not\subset B \times D$ وهذا يعني أنه يوجد (x,y) حيث $(x,y) \in A \times C$ ، $(x,y) \notin B \times D$

$$(x,y) \in A \times C \quad \Rightarrow \quad x \in A \text{ and } y \in C \quad ....(1)$$

$$(x,y) \notin B \times D \quad \Rightarrow \quad x \notin B \text{ or } y \notin D \quad ....(2)$$

$$\because\ C \subseteq D \ ،\ A \subseteq B \quad ....(3)$$

من (1) ، (3) نستنتج أن $x \in B$ and $y \in D$ وهذا يتناقض مع (2)

ومن هذا التناقض نستنتج أن فرضنا خاطئ وبالتالي فإن $A \times C \subseteq B \times D$

3)أ)

$$(x,y) \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ and } y \in \bigcap_{j\in J} B_j \Rightarrow x \in A_i\ \forall i \in I \text{ and } y \in B_j\ \forall j \in J \Rightarrow$$

$$(x,y) \in A_i \times B_j\ \forall (i,j) \in I \times J \Rightarrow (x,y) \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j) \Rightarrow (\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) \subseteq \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$$

$$(x,y) \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j) \Rightarrow (x,y) \in A_i \times B_j\ \forall (i,j) \in I \times J \Rightarrow x \in A_i\ \forall i \in I \text{ and } y \in B_j\ \forall j \in J \Rightarrow$$

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ and } y \in \bigcap_{j\in J} B_j \Rightarrow (x,y) \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) \Rightarrow \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j) \subseteq (\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j)$$

$$\therefore (\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$$

ب)البرهان: نفرض أن A مجموعة مرتبة ترتيباً حسناً بالعلاقة R وليكن $x, y \in A$

نفرض أن المجموعة $B = \{x, y\} \subseteq A$

إذاً للمجموعة B أصغر عنصر وهو x أو y أي أن $(x,y)\in R$ أو $(y,x)\in R$

أي أن كل عنصرين في المجموعة A قابلين للمقارنة وبالتالي نستنتج أن A مجموعة مرتبة ترتيباً كلياً

ج) البرهان خطأ (الخطأ في السطر الرابع)

البرهان الصحيح:

$$\text{let } (x,y)\in R\cap Q \ , \ (y,z)\in R\cap Q$$
$$\therefore (x,y)\in R \text{ and } (x,y)\in Q \ , \ (y,z)\in R \text{ and } (y,z)\in Q$$
$$\because (x,y)\in R\,,(y,z)\in R \text{ and } (x,y)\in Q,(y,z)\in Q$$
$$\therefore (x,z)\in R \text{ and } (x,z)\in Q$$
$$\Rightarrow (x,z)\in R\cap Q$$

وبالتالي نستنتج أن $R\cap Q$ علاقة ناقلة

4)أ) أولاً نبرهن أن R علاقة عاكسة

$$\because \forall x\in Z \ ,\frac{x+2x}{3}=\frac{3x}{3}=x\in Z$$
$$\therefore (x,x)\in R \ \forall x\in Z$$

ثانياً نبرهن أن R علاقة متماثلة

$$\text{let } x,y\in Z:(x,y)\in R$$
$$\therefore \frac{x+2y}{3}=h\in Z\Rightarrow x=3h-2y$$
$$\frac{y+2x}{3}=\frac{y+2(3h-2y)}{3}=\frac{y+6h-4y}{3}=\frac{3(2h-y)}{3}=2h-y\in Z\Rightarrow (y,x)\in R$$

ثالثاً نبرهن أن R علاقة ناقلة

$$\text{let } x,y,z\in Z:(x,y)\in R,(y,z)\in R$$
$$\therefore \frac{x+2y}{3}=m\in Z \ ,\frac{y+2z}{3}=n\in Z\Rightarrow \frac{x+2y}{3}+\frac{y+2z}{3}=m+n\in Z$$
$$\Rightarrow \frac{x+2z}{3}+\frac{3y}{3}=m+n\Rightarrow \frac{x+2z}{3}=m+n-y\in Z\Rightarrow (x,z)\in R$$

من أولاً وثانياً وثالثاً نستنتج أن R علاقة تكافؤ

صفوف التكافؤ هي: $[0]=\{....,-6,-3,0,3,6,9,........\}$, $[1]=\{....,-5,-2,1,4,7,...\}, [2]=\{....,-4,-1,2,5,8,...\}$

ب) $R=\{(3,3),(6,6),(9,9),(12,12),(15,15),(3,6),(3,9),(3,12),(3,15),(6,12)\}$

أصغر عنصر هو 3 ،لا يوجد أكبر عنصر ،العدد 3 هو العنصر الأصغري ، كلاً من الأعداد 9،12،15 يعتبر عنصر أعظمي

ج) العبارة خاطئة لأنه إذا كانت R علاقة متماثلة ومتعدية على المجموعة X ليس من الضروري أن تكون R علاقة عاكسة على المجموعة X والمثال التالي يوضح ذلك:

العلاقة $R=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$ المعرفة على المجموعة $X=\{1,2,3\}$ متماثلة ومتعدية ولكنها ليست عاكسة.

5)أ) البرهان:

نفرض أن كلاً من x_1,x_2 عنصر أصغري حيث $x_1 \neq x_2$

من تعريف العنصر الأصغري نستنتج أنه لا يوجد $m \in A$ بحيث $m \neq x_1$, $(m,x_1) \in R$

كذلك لا يوجد $m \in A$ بحيث $m \neq x_2$, $(m,x_2) \in R$ ولكن المجموعة A مرتبة ترتيباً كلياً بالعلاقة R

إذاً $(x_1,x_2) \in R$ or $(x_2,x_1) \in R$ وهذا تناقض وبالتالي $x_1 = x_2$ وهذا يعني أن العنصر الأصغري وحيد.

الآن سنبرهن أن x_1 هو العنصر الأصغر أي سنبرهن أن $(x_1,x) \in R \ \forall x \in A$

لذلك نفرض العكس أي يوجد $x \in A$ بحيث $(x_1,x) \notin R$

وبما أن A مرتبة ترتيباً كلياً فإن $(x,x_1) \in R$ ولكن هذا تناقض لأن x_1 عنصر أصغري. إذاً x_1 هو العنصر الأصغر

ب) R ليست عاكسة لأنه لأي مجموعة $A \neq \phi$ فإن $A \cap A \neq \phi$ وبالتالي $(A,A) \notin R \ \forall A \neq \phi$

R متماثلة لأنه إذا كان $(A,B) \in R$ فإن $A \cap B = \phi$ وهذا يعني أن $B \cap A = \phi$ وبالتالي $(B,A) \in R$

R ليست متحالفة لأنه إذا كان $A \cap B = \phi$ ، $B \cap A = \phi$ فإنه ليس من الضروري أن يكون $A = B$ والمثال التالي يوضح ذلك : ليكن $A=\{1,2,3\}, B=\{4,5\}$ فإن $A \cap B = \phi$ ، $B \cap A = \phi$ بينما $A \neq B$

R ليست ناقلة والمثال التالي يوضح ذلك: ليكن $A=\{1,2,3\}, B=\{4,5\}, C=\{1,6\}$ فإن $A \cap B = \phi$ ، $B \cap C = \phi$ ولكن $A \cap C = \{1\} \neq \phi$

ج) العبارة خاطئة وبرهانها خطأ لأن العنصر x الذي ينتمي للمجموعة $A \cap B$ ليس من الضروري أن يكون هو نفس العنصر الذي ينتمي إلى المجموعة $C \cap B$ والمثال التالي يوضخ خطأ العبارة:

ليكن $A=\{1,2\}, B=\{2,3\}, C=\{3,4\}$

نلاحظ أن $A \cap B = \{2\} \neq \phi$ ، $C \cap B = \{3\} \neq \phi$ بينما $A \cap C = \phi$