

س1) ضع علامة (✓) أو (×) أمام العبارات التالية مع تصحيح الخطأ:

- أ) كل متتالية محدودة تكون متقاربة
 ب) العنصر الأصغري في المجموعة وحيد
 ج) العبارة $\forall x \exists y, x + y < 100$ صادقة
 د) كل علاقة ترتيب كلي تكون علاقة ترتيب جزئي
 هـ) إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ تكون متقاربة
 و) توجد دالة ثابتة أحادية

س2) (i) ليكن $\{A_i\}_{i \in I}$ و $\{B_j\}_{j \in J}$ عائلة مجموعات مفهرسة برهن أن: $(\bigcap_{i \in I} A_i) \times (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$

(ii) كرة من المطاط سقطت من ارتفاع 150 متر وفي كل مرة تصطدم فيها بالأرض ترتد ثلثي الارتفاع الذي سقطت منه. أوجد طول المسافة التي قطعها الكرة.

س3) (i) إذا كان $A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ فأوجد $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ، $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$
 (ii) برهن أن: لكل عدد صحيح موجب n يكون $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ عدد صحيح

س4) (i) ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة أحادية وفوقية برهن أن $f^{-1}: B \rightarrow A$ دالة أحادية وفوقية
 (ii) ليكن $A = \{0.9, 0.09, 0.009, \dots\}$ فأوجد كل من: $\max A$ ، $\min A$ ، $\inf A$ ، $\sup A$

س5) (i) ليكن كل من $f: A \rightarrow B$ ، و $g: B \rightarrow C$ دالة برهن أن $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
 (ii) أوجد فترة تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^n$

س6) (i) بين ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$ متقاربة أو متباعدة؟

(ii) إذا كان R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A برهن أن $R \circ R = R$

س7) (i) ليكن R علاقة ناقلة على المجموعة غير الخالية A حيث $(x, x) \notin R$ لكل $x \in A$
 برهن أن R ليست دالة

(ii) برهن أن متسلسلة p تكون متباعدة إذا كان $p \leq 1$