المعهد العالي لإعداد المعلمين بزليتن

الاختبار الثاني في مقرر أسس الرياضيات للسنة الثانية بقسم الرياضيات للعام الجامعي 2003 – 2004

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

1.أ) عرف كلا من: علاقة الترتيب الجزئي – المجموعة المرتبة كليا – قيد العلاقة – علاقة التكافؤ.

ب) برهن أن العلاقة $R=\left\{(x,y):\dfrac{x-y}{4}\in Z\right\}$ المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z تكون علاقة تكافؤ ثم أوجد فصول التكافؤ المختلفة.

2. هل العبارات التالية صائبة أم خاطئة؟ برهن صحة ما تقول؟

أ) العلاقة $R=\{(x,y):y\le 2x\}$ المعرفة على المجموعة IR تكون علاقة عاكسة.

ب) لأي مجموعات غير خالية D,C,B,A فإن:

$$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$$

ج) العلاقة $Q=\{(x,y)\in IR\times IR : y=|x|\}$ علاقة متعدية

3.أ) برهن أن العلاقة R المعرفة على المجموعة A تكون متخالفة إذا وإذا كان فقط $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

ب) إذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A برهن أن R^{-1} تكون أيضا علاقة ترتيب جزئي على A

4.أ) ليكن $R=\{(x,y):x \text{ يقبل القسمة على } y\}$ علاقة معرفة على المجموعة $A=\{3,5,9,10\}$. برهن أن R علاقة ترتيب جزئي ثم أوجد (إن وجد) بالنسبة للعلاقة R كلا من: أصغر عنصر في A ، أكبر عنصر في A ، العنصر الأصغري في A ، العنصر الأعظمي في A

ب) ليكن R علاقة على المجموعة B برهن أن $R\cup R^{-1}$ هي أصغر علاقة متماثلة محتوية على R ثم برهن أن $R\cap R^{-1}$ هي أكبر علاقة متماثلة محتواة في R.

5.في كلا من العبارات التالية وضح ما إذا كان البرهان صحيح أو خاطئ مع تصويب الخطأ (إن وجد) سواء كان في العبارة نفسها أو في طريقة برهانها.

أ) ليكن A,B,C مجموعات فإذا كان $A\times B=A\times C$ ، $A\neq\phi$ فإن $B=C$

البرهان: بما أن $A\times B=A\times C$ فإن $\dfrac{A\times B}{A}=\dfrac{A\times C}{A}$ وبالاختصار نحصل على $B=C$

ب) إذا كانت R علاقة متماثلة ومتعدية على المجموعة X فإن R تكون علاقة عاكسة على المجموعة X.

البرهان: بما أن R علاقة متماثلة فإنه لكل $x,y\in X$ إذا كان $(x,y)\in R$ فإن $(y,x)\in R$

،بما أن $(y,x)\in R$ ، $(x,y)\in R$ ، R علاقة متعدية فإن $(x,x)\in R$ لكل $x\in X$

وهذا يبرهن أن R علاقة عاكسة.

ج) ليكن A,B,C,D مجموعات ،فإذا كان $A\subseteq B$ ، $C\subseteq D$ فإن $A\times C\subseteq B\times D$

البرهان: نفرض العكس أي أن $A\times C\not\subset B\times D$ وهذا يعني أنه يوجد (x,y) حيث $(x,y)\in A\times C$ ، $(x,y)\notin B\times D$

بما أن $(x,y)\in A\times C$ يؤدي إلى أن: $x\in A$ and $y\in C$ .... (1)

،بما أن $(x,y)\notin B\times D$ يؤدي إلى أن: $x\notin B$ and $y\notin D$ .... (2)

ولكن من المعطيات نعلم أن $A\subseteq B$ ، $C\subseteq D$ ....(3)

من (1) ، (3) نستنتج أن $x\in B$ and $y\in D$ وهذا يتناقض مع (2)

ومن هذا التناقض نستنتج أن فرضنا خاطئ وبالتالي فإن $A\times C\subseteq B\times D$

انتهت الأسئلة .... مع تمنياتي للجميع بالتوفيق .... 2004 . 4 . 1