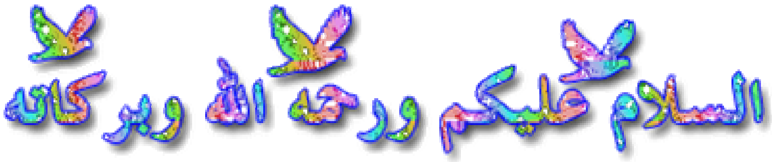
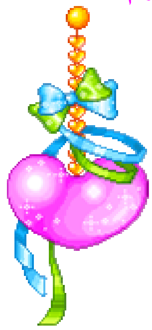
هذه المجموعة من الدروس في نظرية الزمر من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com



سأقدم لكم بإذن الله شرح كامل ووافي لـ 7 فصول في الزمره في مواضيع منفصلة هي عبارة عن بحث التخرج لصديقاتي المقربات وقد أحببن أن يستفيد الجميع من هذا البحث لأنهم بذلوا مجهود كبير فيه فأرجوا منكم الدعاء لهم جميعا بالتوفيق بالدنيا والآخرة



المراجع المستخدمة في 7 فصول:

*نظرية الزمر

أ . د / صفوان محمد عادل عويره

أ . د / محمود عبدالباقي محمد أحمد

*نظرية الزمر

د / معروف عبدالرحمن سمحان

د / فوزي بن أحمد صالح الذكير

*مواضيع في الجبر

اي.ان-هيرستين

*المدخل الى نظرية الزمر

أ.د فالح الدوسري

أ.عبد الحميد بيك

الفصل الخامس

الزمر الإبدالية Abelian Groups

نخصص هذا الفصل لدراسة الزمر الإبدالية ، سنبدأ بمقدمة عن الزمر الدورية والدورية الحرة ، ثم سنتحدث عن تصنيف الزمر الإبدالية المنتهية التوليد ، وسنقوم بدراسة الزمر الإبدالية المنتهية التوليد، وسنختم هذا الفصل بذكر نوعين من أنواع الزمر الإبدالية فسنذكر مقدمة للزمر الإبدالية الحرة والزمر الإبدالية القابلة للقسمة.

في هذا الفصل جميع الزمر تكون إبدالية لذا فمن المناسب أن نرمز للضرب المباشر الداخلي أو الخارجي بالرمز $G \oplus H$ بدلا من $G \times H$ ونسميه الجمع المباشر(direct sum).

تعريف (٦ - ١): الزمر الدورية (periodic groups).

تسمى الزمرة G بالزمرة الدورية إذا كان كل عنصر فيها له رتبة محددة .

تعريف (٦ - ٢): الزمرة الدورية الحرة periodic free groups).

تسمى الزمرة G بالزمرة الدورية الحرة إذا لم يوجد فيها عنصراً ذا رتبة محدودة عدا العنصر المحايد .

١

مثال (٦ - ١):

هل الزمرة التالية دوريه أم لا ؟

$$G = \{1, w, w^2\}$$

الحل:

مجموعة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تحقق إنها زمرة مع عملية الضرب بالإضافة إلى أن رتبة العنصر المحايد $e = 1$ هي الواحد،

وكذلك $w^3 = 1$ أي أن رتبة العنصر w هي 3 ،

وبالمثل رتبة العنصر w^2 هي 3 .

وهذا يعني أن كل عنصر في G رتبته محدودة ، و بالتالي فإن G زمرة دورية .

نظرية (٦ - ١) : الزمرة الإبدالية المنتهية **Finite Abelian Groups**

إذا كانت G زمرة إبدالية و كان $m \in Z$ و p عدد أولي فإن :

١) $G[m] = \{g \in G : mg = 0\} \leq G$

٢) $mG = \{mg : g \in G\} \leq G$

٣) $G(p) = \{g \in G : O(g) = p^n, n \geq 0\} \leq G$

٤) $G/G[m] \cong mG$ وذلك بتطبيق نظرية التماثل الأولى .

نظرية (٦ - ٢) :

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية من الرتبة $p^n m$ حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p, m) = 1$

فإن:

$$G = H \oplus K$$

حيث $K = G[m]$ و كذلك $|H| = p^n$.

<u>نتيجة (٦ - ١) :</u>

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة و كانت

$$G(p_i) = \{x \in G : p_i^{k_i} x = 0\}$$

فإن

$$G = G(p_1) \oplus G(p_2) \oplus \cdots \oplus G(p_n)$$

و إن $|G(p_i)| = p_i^{k_i}$.

<u>نظرية (٦ – ٣) :</u>

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها p^n حيث p عدداً أولياً و إذا كان $a \in G$ عنصراً رتبته أعظمية فإنه توجد زمرة جزئية K من G حيث $G = <a> \oplus K$.

<u>نتيجة (٦ - ٢):</u>

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها p^n حيث p عدداً أولياً فإن G حاصل جمع مباشر لزمر دائرية .

<u>نظرية (٦ - ٤) :</u>

لتكن G زمرة إبدالية رتبتها p^n حيث p عدد أولي ، و كانت

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_m = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n$$

حيث H_i و K_i زمرة جزئية دورية غير تافهة ، و حيث :

$$|H_1| \geq |H_2| \geq \cdots \geq |H_m| \quad \text{و} \quad |K_1| \geq |K_2| \geq \cdots \geq |K_n|$$

فإن:

$m = n$ و $|H_i| = |K_i|$ لكل $1 \leq i \leq n$.

نظرية (٦ ـ ٥):النظرية الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية.

(fundamental theorem of finite abelian groups).

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإن G مجموعة مباشر لزمر دورية من النوع p ، كما أن طريقة كتابة G كمجموع مباشر و حيدة بإستثناء الترتيب .

مثال (٦ ـ ٢) :

صنفي جميع الزمر من الرتبة 540 ؟

الحل :

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

فمن النظرية الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية نجد إن جميع الزمر التي من الرتبة 540 هي ست زمر :

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_5$$
$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_9 \oplus Z_5$$
$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_9 \oplus Z_5$$
$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_{27} \oplus Z_5$$
$$Z_4 \oplus Z_3 \oplus Z_9 \oplus Z_5$$
$$Z_4 \oplus Z_{27} \oplus Z_5$$

نتيجة (٦ - ٣) :

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإنه يوجد أعداد صحيحة $p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_k^{n_k}$ وحيدة بإستثناء الترتيب ، حيث $p_1, \ldots, p_k$ أعداد أولية ليست بالضرورة مختلفة و حيث $n_1, \ldots, n_k$ أعداد صحيحة موجبة ليست بالضرورة مختلفة ، بحيث يكون

$$G = \mathrm{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathrm{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Z}_{p_k^{n_k}}$$

تسمى الأعداد $p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_k^{n_k}$ القواسم البدائية " elementary divisors " للزمرة G .

مثال (٦ - ٣) :

عين القواسم البدائية للزمرة $G = \mathrm{Z}_8 \oplus \mathrm{Z}_{10} \oplus \mathrm{Z}_{27}$؟

الحل :

$$G \cong \mathrm{Z}_{2^3} \oplus \mathrm{Z}_2 \oplus \mathrm{Z}_5 \oplus \mathrm{Z}_{3^3} \cong \mathrm{Z}_2 \oplus \mathrm{Z}_{2^3} \oplus \mathrm{Z}_{3^3} \oplus \mathrm{Z}_5$$

ولذا فإن القواسم البدائية هي :

$2, 2^3, 3^3, 5$.

نتيجة (٦ - ٤) :

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها n و كان m يقسم n فإن G تحتوي زمرة جزئية رتبتها m .

٥

<u>مثال (٦ - ٤) :</u>

إذا كانت $G \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ فعين زمرة جزئية H من G رتبتها 12 ؟

<u>الحل :</u>

نلاحظ أن $H_1 = <[3]> \leq \mathbb{Z}_9$ رتبتها 3 ، إذن :

$$H = \left\{ (\ [a]\ ,\ [0]\ ,\ [b]\ )\ :\ [a] \in \mathbb{Z}_4\ \ ,\ [b] \in H_1 \right\}$$

زمرة جزئية من G رتبتها 12 .

<u>تعريف (٦ - ٣):</u> لا متغيرات الزمرة (Invariants groups).

لتكن G زمرة إبدالية منتهية رتبتها p^n ، إذا كانت

$$G = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$$

حيث $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 0$ فإن الأعداد الصحيحة $n_1, n_2, \ldots, n_k$ تسمى لا متغيرات الزمرة

كما يسمى العديد $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ نمط (type) الزمرة G .

<u>مثال (٦ - ٥) :</u>

لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ هي 1,1,1

بينما

لا متغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2$

هي 1 , 2 .

نظرية (٦ - ٦) :

إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية من الرتبة p^n فإن $G \cong H$ إذا و فقط إذا كان لهما اللا متغيرات نفسها .

مثال (٦ - ٦) :

هل $Z_{16} \oplus Z_2 \cong Z_8 \oplus Z_2 \oplus Z_2$؟

الحل :

نلاحظ أن $Z_{16} \oplus Z_2$ و $Z_8 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ كلاهما من الرتبة $2^5 = 32$ لكن لا متغيرات الزمرة $Z_{16} \oplus Z_2$ هي 4,1 و إما لا متغيرات الزمرة $Z_8 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ فهي 3,1,1 و لذا فإن الزمرتين غير متماثلتين .

تعريف (٦ - ٤): تجزئة n (partition-n)

إذا كان $n \in Z^+$ فإننا نعني بتجزئة n عديد $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ من النوع k من الأعداد الصحيحة الموجبة $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$ حيث $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

نتيجة (٦ - ٥) :

عدد الزمرة الإبدالية المنتهية غير المتماثلة من الرتبة p^n يساوي عدد تجزئات n .

مثال (٦ - ٧) :

جد جميع الزمرة الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة $2^6 = 64$

الحل :

تجزئة العدد 6 هي :

6	5+1	4+2	4+1+1
	4+1+1	3+3	3+2+1
	3+1+1+1	2+2+1+1	2+2+2
	2+2+1+1	2+1+1+1+1	1+1+1+1+1+1

إذن الزمرة الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 2^6 هي :

$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_4$

$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$

$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_8$

$Z_4 \oplus Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$

$Z_4 \oplus Z_4 \oplus Z_4$

$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3$

$Z_8 \oplus Z_8$

$Z_8 \oplus Z_4 \oplus Z_2$

$Z_{32} \oplus Z_2$

Z_{64}

$Z_{16} \oplus Z_4$

٨

مثال (٦ ـ ٨) :

جد جميع الزمرة الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 1089 ؟

الحل :

$$1089 = 3^2 \times 11^2$$

تجزئات العدد 2 هي $2 = 1 + 1$ ، إذن مجموعات القواسم البدائية هي :

$$(3,3,11,11),(3,3,11^2),(3^2,11,11),(3^2,11^2)$$

ولذا فإن الزمرة الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 1089 هي :

$$Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_{11} \oplus Z_{11}$$
$$Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_{121}$$
$$Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_{121}$$
$$Z_9 \oplus Z_{121}$$
$$Z_9 \oplus Z_{11} \oplus Z_{11}$$

تعريف (٦ ـ ٥) :

لتكن G زمرة إبدالية و لتكن $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ مجموعة جزئية من G ، نقول أن S مستقلة خطياً Linearly independent إذا تحقق ما يلي:
لكل $n_1, n_2 \ldots, n_t \in Z$ إذا كان $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_tx_t = 0$ فإن $n_i = 0$ لكل $1 \le i \le t$.

تعريف (٦ ـ ٦): الزمرة الإبدالية الحرة المنتهية التوليد

Finitely generated free abelian group

تسمى الزمرة الإبدالية G بالحرة المنتهية التوليد إذا تحقق ما يلي :

١) G زمرة إبدالية حرة أساسها S حيث $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_t\}$ مجموعة جزئية منتهية من G .

٢) $G =< s >$ و S مستقلة خطياً .

٣) لكل $a\in G$ يوجد أعداد صحيحة وحيدة $n_1, n_2, \ldots, n_t$ بحيث يكون :

$$a = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_tx_t$$

٤) $G \cong < x_1 > \oplus < x_2 > \oplus \cdots \oplus < x_t >$

نتيجة (٦ ـ ٦) :

إذا كانت $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_t\}$ مجموعة جزئية مولدة للزمرة الإبدالية G فإن G زمرة حرة إذا و فقط إذا كانت $G \cong Z^{(t)}$.

نظرية (٦ ـ ٧): (النظرية الأساسية للزمرة الإبدالية منتهية التوليد)

(The foundamentul theorem of finitely) generated abelian groups

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد و مولدة بمجموعة عدد عناصرها k فإن :

$$G \cong Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \cdots \oplus Z_{m_r} \oplus Z^{(k-r)}$$

حيث $m_1 > 1$ ، m_i يقسم m_{i+1} لكل $1 \le i \le r-1$.

نتيجة (٦ ـ ٧) :

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإنه يوجد أعداد صحيحة موجبة و حيدة $m_1, m_2, \dots, m_k$

بحيث $m_i > 1$ و m_i يقسم m_{i+1} لكل $1 \le i \le k-1$ ، بحيث يكون :

$$G \cong Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \cdots \oplus Z_{m_k}$$

مثال (٦ ـ ٩) :

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد فأثبت أن أي زمرة جزئية من G يجب أن تكون منتهية التوليد .

الحل :

بما أن G زمرة إبدالية منتهية التوليد فإنه توجد زمرة إبدالية حرة منتهية التوليد F ، بحيث إن $G \cong F/N$

، الآن زمر F/N الجزئية يجب أن تكون على الصورة
H/N

حيث $H \leq F$

و بما أن F زمرة حرة منتهية التوليد فإن H زمرة حرة و منتهية التوليد ، و علية فإن H/N منتهية التوليد .

مثال (٦ - ١٠) :

إذا كانت

$$G \cong Z_{22} \oplus Z_{15} \oplus Z_{48}$$

فجد

$$m_1, m_2, \ \ldots \ , m_k$$

حيث $m_1 > 1$ ، $m_i \mid m_{i+1}$ لكل $i = 1,2,\ldots,k-1$

بحيث يكون

$$G \cong Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \ \cdots \ \oplus Z_{m_k} .$$

الحل :

$$\begin{aligned} G &\cong Z_2 \oplus Z_{11} \oplus Z_3 \oplus Z_5 \oplus Z_3 \oplus Z_{16} \\ &\cong Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \oplus Z_{11} \oplus Z_{16} \\ &\cong Z_6 \oplus Z_{2640} \end{aligned}$$

و لذا فإن $m_1 = 6$ و $m_1 = 2640$.

تعريف (٦ ـ ٧): الزمرة الإبدالية القابلة للقسمة (Divisble Abelian Groups).

نقول أن الزمرة الإبدالية G قابلة للقسمة إذا كان لكل $n \in Z^+$ و لكل $y \in G$ يوجد $x \in G$ حيث $nx = y$. أي أن G قابلة للقسمة إذا كان $nG = G$ لكل $n \in Z^+$.

مثال (٦ ـ ١١) :

Q قابلة للقسمة ، لأنة إذا كان $n \in Z^+$

و كان $\frac{a}{b} \in Q$ فإن

$$\frac{a}{nb} \in Q \text{ و إن } n\left(\frac{a}{nb}\right) = \frac{a}{b}$$

مثال (٦ ـ ١٢):

Z غير قابلة للقسمة لأن $nZ \neq Z$ إذا كان $n > 1$.

نظرية (٦ ـ ٨) :

إذا كانت G زمرة إبدالية حيث لكل عدد أولي p و كل $y \in G$ يوجد $x \in G$ بحيث يكون $px = y$ فإن G قابلة للقسمة .

نظرية (٦ - ٩) :

إذا كانت G زمرة إبدالية قابلة للقسمة و كانت $H \leq G$ فإن G/H قابلة للقسمة ،
أي أن الصورة التشاكلية لزمرة قابلة للقسمة هي زمرة قابلة للقسمة أيضاً .

نظرية (٦ - ١٠) :

إذا كانت H زمرة جزئية قابلة للقسمة من الزمرة الإبدالية G فإنه يوجد زمرة جزئية K من G حيث $G = H \oplus K$.

تمارين محلولة

(١) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتب

$p^2 \ , \ p^3 \ , \ p^4 \ , \ p^5 \ , \ p^6 \ , \ p^7$

حيث p عدداً أولي ؟

الحل :

١ - p^2 : تجزئات العدد 2 هي : $1+1$

إذن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^2 هي $Z_p \oplus Z_p$.

٢ - p^3 : تجزئات العدد 3 هي :

أ) $1+1+1$ ب) $2+1$

إذن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^3 هي :

أ) $Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$ ب) $Z_{p^2} \oplus Z_p$

٣ - p^4 : تجزئات العدد 4 هي :

أ) $1+1+1+1$ ب) $2+1+1$

جـ) $2+2$ د) $3+1$

إذن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^4 هي :

أ) $Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$ ب) $Z_{p^2} \oplus Z_p \oplus Z_p$

جـ) $Z_{p^2} \oplus Z_{p^2}$ د) $Z_{p^3} \oplus Z_p$

٤ - p^5 : تجزئات العدد 5 هي :

أ) $1+1+1+1+1$　　ب) $2+1+1+1$

جـ) $3+1+1$　　د) $4+1$

هـ) $3+2$　　و) $1+2+2$

إذن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^5 هي :

أ) $Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$　　ب) $Z_{p^2} \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$

جـ) $Z_{p^3} \oplus Z_p \oplus Z_p$　　د) $Z_{p^4} \oplus Z_p$

هـ) $Z_{p^3} \oplus Z_{p^2}$　　و) $Z_p \oplus Z_{p^2} \oplus Z_{p^2}$

٥ - p^6 : تجزئات العدد 6 هي :

أ) $1+1+1+1+1+1$　　ب) $2+1+1+1+1$

جـ) $3+1+1+1$　　د) $4+1+1$

ر) $5+1$　　ل) $3+3$

هـ) $2+4$　　و) $2+2+1+1$

ي) $3+2+1$

إذن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^6 هي :

أ) $Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$

ب) $Z_{p^2} \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$

جـ) $Z_{p^3} \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$

د) $Z_{p^4} \oplus Z_p \oplus Z_p$

ر) $Z_{p^5} \oplus Z_p$

ل) $Z_{p^3} \oplus Z_{p^3}$

هـ) $Z_{p^2} \oplus Z_{p^4}$

و) $Z_{p^2} \oplus Z_{p^2} \oplus Z_p \oplus Z_p$

ي) $Z_{p^3} \oplus Z_{p^2} \oplus Z_p$

و بالمثل نجد أن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^7 هي :

$$Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$$
$$Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_{p^2}$$
$$Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_{p^2} \oplus Z_{p^2}$$
$$Z_p \oplus Z_{p^2} \oplus Z_{p^2} \oplus Z_{p^2}$$
$$Z_{p^3} \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$$
$$Z_{p^3} \oplus Z_{p^2} \oplus Z_p \oplus Z_p$$
$$Z_{p^3} \oplus Z_{p^2} \oplus Z_{p^2}$$
$$Z_{p^3} \oplus Z_{p^4}$$
$$Z_{p^5} \oplus Z_p \oplus Z_p$$
$$Z_{p^4} \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$$
$$Z_{p^4} \oplus Z_{p^2} \oplus Z_p$$
$$Z_{p^5} \oplus Z_{p^2}$$

(٢) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 1440 ؟

الحل :

$$1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$$

بالتالي فإن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 1440 هي :

$$Z_5 \oplus Z_9 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_9 \oplus Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_9 \oplus Z_8 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_9 \oplus Z_{16} \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_9 \oplus Z_4 \oplus Z_4 \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_8 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_{16} \oplus Z_2$$
$$Z_5 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_4 \oplus Z_2$$

(٣) بين أياً من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة؟ .

أ) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 21 هو 2 .

ب) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 42 هو 2 .

ج) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 5^7 يساوي عدد الزمر غير المتماثلة من الرتبة 7^7.

د) إذا كانت G زمر إبدالية رتبتها 105 فإن G دائرية .

هـ) الزمرة $G_1 = \mathrm{Z}_{15} \oplus \mathrm{Z}_{12} \oplus \mathrm{Z}_{30} \oplus \mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}$ تماثل الزمرة $G_2 = \mathrm{Z}_{108} \oplus \mathrm{Z}_{50} \oplus \mathrm{Z}$.

ز) إذا كانت $G = \mathrm{Z}_8 \oplus \mathrm{Z}_{81} \oplus \mathrm{Z}_3 \oplus \mathrm{Z}_{25} \oplus \mathrm{Z}_2$ فإنه يوجد $m_1 \mid m_2$ حيث $G \cong \mathrm{Z}_{m_1} \oplus \mathrm{Z}_{m_2}$.

التوضيح :

أ) العباره خاطئة

$7 \times 3 = 21$ إذن الزمر الإبدالية الوحيدة غير المتماثلة من الرتبة 21 هي $\mathrm{Z}_3 \oplus \mathrm{Z}_7$.

ب) العباره خاطئة

$2 \times 3 \times 7 = 42$ إذن الزمر الإبدالية الوحيدة غير المتماثلة من الرتبة 42 هي $\mathrm{Z}_7 \oplus \mathrm{Z}_3 \oplus \mathrm{Z}_2$.

ج)العباره صحيحة

لأن لهما نفس عدد التجزئة .

هـ) العباره خاطئة

لأن لا متغيرات الزمرة G_1 تختلف عن لا متغيرات الزمرة G_2 و ذلك بالرجوع إلى نظرية (٦ – ٦) .

ز) العباره صحيحة

بالرجوع إلى نتيجة (٦ – ٧) نجد أن :

$$G \cong Z_3 \oplus Z_2 \oplus Z_8 \oplus Z_{81} \oplus Z_{25}$$

$$G \cong Z_3 \oplus Z_{32400}$$

أي أن : $3 \mid 32400$.

(٤) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^2q حيث p ، q عددان أوليان مختلفان .

تجزئات العدد 2 هي $1+1$ بالتالي فإن الزمر الإبداليه غير المتماثلة من الرتبة p^2q هي :

$$Z_p \oplus Z_p \oplus Z_q$$

$$Z_{p^2} \oplus Z_q$$

(٥) باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية صنفي زمر خارج القسمة التالية:

أ) $Z_2 \times Z_6 / \langle (0,1) \rangle$

الحل:

$$G = Z_2 \times Z_6 = \{(0\,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5),$$
$$(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\} \ , |G| = 12$$
$$H = \langle (0,1) \rangle = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,0)\}, |H| = 6$$
$$G/H = \{H \oplus (m,n) \mid (m,n) \in G\}$$
$$= \{H \oplus (m,n) \mid (m,n) \in Z_2 \times Z_6\}$$
$$H \oplus (0,0) = H = H \oplus (0,1) = H \oplus (0,2) = H \oplus (0,3) = H \oplus (0,4) =$$
$$H \oplus (0,5)$$
$$H \oplus (1,0) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,0)\}$$
$$= H \oplus (1,1) = H \oplus (1,2) = H \oplus (1,3) = H \oplus (1,4)$$
$$= H \oplus (1,5)$$
$$|G/H| = 2 \, , G/H = \{H, H \oplus (1,0)\}$$

تجزيئات العدد $1 = 1$.

$$\therefore |G/H| \cong Z_2$$

ب)

$Z_4 \times Z_6 / \langle (2,3) \rangle$.

الحل:

$$G=Z_4\times Z_6\ ,\ |G|=24$$
$$H=\langle(2,3)\rangle=\{(2,3)\ ,(0,0)\}$$

نوجد G/H:

$$H\oplus(0,0)=H=H\oplus(2,3)$$
$$H\oplus(0,1)=\{(2,4),(0,1)=\ H\oplus(2,4)$$
$$H\oplus(0,2)=\{(2,5),(0,2)\}=\ H\oplus(2,5)$$
$$H\oplus(0,3)=\{(2,0),(0,3)\}=\ H\oplus(2,0)$$
$$H\oplus(0,4)=\{(2,1),(0,4)\}=\ H\oplus(2,1)$$
$$H\oplus(0,5)=\{(2,2),(0,5)\}=\ H\oplus(2,2)$$
$$H\oplus(1,0)=\{(3,3),(1,0)\}=\ H\oplus(3,3)$$
$$H\oplus(1,1)=\{(3,4),(1,1)\}=\ H\oplus(3,4)$$
$$H\oplus(1,2)=\{(3,5),(1,2)\}=\ H\oplus(3,5)$$
$$H\oplus(1,3)=\{(3,0),(1,3)\}=\ H\oplus(3,0)$$
$$H\oplus(1,4)=\{(3,1),(1,4)\}=\ H\oplus(3,1)$$
$$H\oplus(1,5)=\{(3,2),(1,5)\}=\ H\oplus(3,2)$$
$$G/H=\{H,H\oplus(0,0),H\oplus(0,1),\ldots\ldots\ldots H\oplus(1,5)\}$$
$$|G/H|=12,12=3\times 2^2$$

$\therefore$ الزمر الجزئية الغير متماثلة من الرتبة 12 هي:

$$Z_3\oplus Z_{2^2}$$
$$Z_3\oplus Z_2\oplus Z_2$$