

(1) أكمل الجدول التالي بحيث يكون جدول لعملية ثنائية * إبدالية معرفة على المجموعة $S = \{a, b, c, d\}$

*	a	b	c	d
a	a	b	c	...
b	b	d	...	c
c	c	a	d	b
d	d	...	...	a

الحل

الجدول يجب أن يكون متماثل بالنسبة للقطر الرئيسي

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

(2) وضح ما إذا كانت العملية الثنائية * المعرفة على مجموعة الأعداد القياسية Q تبديلية وتنسيقية أم لا؟

$$a * b = ab + 1 \quad \forall a, b \in Q \quad \text{حيث}$$

الحل

$$a * b = ab + 1 = ba + 1 = b * a \Rightarrow \text{العملية تبديلية}$$

لاحظ أن عملية ضرب الأعداد القياسية عملية تبديلية

$$a * (b * c) = a * (bc + 1) = abc + a + 1$$

$$(a * b) * c = (ab + 1) * c = abc + c + 1 \Rightarrow \text{* ليست عملية تنسيقية}$$

(3) بين العبارات الصائبة والعبارات الكاذبة فيما يأتي:

i) العملية الثنائية * تكون تبديلية إذا وإذا كان فقط $a * b = b * a$

ii) العملية الثنائية * على المجموعة S تكون تبديلية إذا وإذا كان فقط يوجد عنصرين $a, b \in S$ بحيث

$$a * b = b * a$$

* سر النجاح هو ثبات الهدف - العالم بأسره يفسح الطريق للشخص الذي يعرف وجهته.

- الأهم من أن تتقدم بسرعة هو أن تتقدم في الاتجاه الصحيح - ضع لنفسك أهدافاً إيجابية واجعل آمالك معقولة. - اقبل التحديات حتى تشعر بنشوة النصر - النجاح في أروع وأبهى صوره أمر يقتضي الطمأنينة وراحة البال والاستمتاع والسعادة.

الحل

$$\therefore a*b = a - b \quad , \quad b*a = b - a = -(a - b) \quad (i)$$

$$\therefore q * b \neq b * q$$

أى أن العملية ليست تبديلية

$$(a * b) * c = (a - b) * c = a - b - c$$

$$a * (b * c) = a * (b - c) = a - (b - c) = a - b + c$$

$$\Rightarrow (a * b) * c \neq a * (b * c)$$

∴ العملية * ليست تنسيقية

$$a * b = ab + 2 = ba + 2 = b * a \quad (\text{ii})$$

∴ العملية * تبديلية

$$a * (b * c) = (ab + 2) * c = abc + 2c + 2$$

$$a * (b * c) = a * (bc + 2) = abc + 2b + 2$$

وبما أن $abc + 2c + 2 \neq abc + 2b + 2$ فإن العملية * ليست تنسيقية

$$a * b = ab/3 = ba/3 = b * a \quad (\text{iii})$$

∴ العملية * تبديلية

$$(a * b) * c = (ab/3) * c = \frac{(ab/3)c}{3} = \frac{abc}{9}$$

$$a * (b * c) = a * (bc/3) = \frac{abc}{9}$$

أى أن العملية * تنسيقية

$$a * b = 5^{ab} = 5^{ba} = b * a \quad (\text{iv})$$

∴ العملية تبديلية

$$(a * b) * c = 5^{ab} * c = 5^{(5^{ab})c}$$

- كل حالة أو تجربة تصيبك.... فيها حكمة وعبرة من نصيبك...
- كن مع الناس كالشجر يرمونه بالحجر فيرميهم بالثمر.
- المعلم الحقيقي هو مجرد بركة ماء تستطيع فيها أن تتعلم السباحة.... وحالما تتعلمها... بإمكانك السباحة في جميع محيطات العالم وما وراء المعالم والعوالم والعلوم....

$$a * (b * c) = a * 5^{bc} = 5^{a(5^{bc})}$$

$$\Rightarrow a * (b * c) \neq (a * b) * c$$

أي أن العملية * ليست تنسيقية والمثال التالي يوضح ذلك

بأخذ $a=1$, $b=2$, $c=3$ نجد أن

$$a * (b * c) = 1 * (5^6) = 5^{1(5^6)} = 5^{5^6} = 5^{15625}$$

$$(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = 5^2 * 3 = 5^{5^2(3)} = 5^{75}$$

(v) $a * b = a^b$, $b * a = b^a$ ولكن $a^b \neq b^a$ ولذلك * عملية غير تبديلية

$$(a * b) * c = a^b * c = (a^b)^c = a^{bc}$$

$$a * (b * c) = a * b^c = a^{b^c}$$

$$\Rightarrow (a * b) * c \neq a * (b * c)$$

أى أن العملية * ليست تنسيقية

لنأخذ المثال التالي وذلك بوضع $c=3$, $b=2$, $a=1$

$$q^{bc} = 2^{2(3)} = 2^6$$

$$a^{b^c} = 2^{2^3} = 2^8 \quad , \quad 2^6 \neq 2^8$$

(4) ليكن H مجموعة جزئية من $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ التي تحتوي على كل المصفوفات التي على شكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

هل H مغلقة تحت كلاً من عملية جمع المصفوفات وعملية ضرب المصفوفات

الحل

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

* **تحل بقدر من الشجاعة** ** إن الحقيقة هي أنك لست في حاجة لعمل الكثير كي تجعل حياتك أفضل. بل أنك في حاجة فقط إلى القليل من الجهد. إنك لست في حاجة لأن تتسلق قمة "إيفرست" - بل كل ما تحتاجه هو أن تتخذ خطوة إيجابية بسيطة للأمام - إن ما تكافح من أجله سوف يتم على أكمل وجه لو تحليت بقليل من الشجاعة - إن العمل الذي أنت بصددده سيكون على ما يرام إذا ما عثرت على الشجاعة اللازمة لبذل المزيد من الجهد - إن المهمة التي تخشاها ، والمستوى الذي تتمنى أن تصل إليه ، والأوقات العصيبة التي ترغب في تجاوزها يمكنك أن تتعامل معها جميعاً لو تحليت بقليل من الشجاعة - إنك لست ملزماً أن تحل كل مشكلاتك. كل ما عليك هو أن تبدأ - كل ما عليك أن تكون أكثر شجاعة.

H : مغلقة تحت عملية ضرب المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore H$ مغلقة تحت عملية جمع المصفوفات

(5) لتكن * عملية ثنائية تنسيقية على المجموعة S ولتكن المجموعة H معرفة كالتالي:

$H = \{a \in S : a * x = x * a \ \forall x \in S\}$ يهـن أن H مغلقة تحت العملية $*$.

البرهان

let $h_1, h_2 \in H$

$$\therefore h_1 * x = x * h_1 \quad \forall x \in S, \quad h_2 * x = x * h_2 \quad \forall x \in S$$

$$\begin{aligned} \text{So } (h_1 * h_2) * x &= h_1 * (h_2 * x) = h_1 * (x * h_2) = (h_1 * x) * h_2 \\ &= (x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_1 * h_2 \in H$$

وبذلك تكون H مغلقة تحت العملية *

(6) هل مجموعة المتجهات في $\mathbb{R}^3$ تكون زمرة مع عملية الضرب القياسي للمتجهات أم لا؟

الحل

الضرب القياسي لمتجهين هو كمية قياسية وليس متجه وهذا يعني أن عملية الضرب القياسي لا تعتبر عملية ثنائية على مجموعة المتجهات في $\mathbb{R}^3$ وبذلك لا تكون زمرة.

(7) هل مجموعة المتجهات في $\mathbb{R}^3$ تكون زمرة مع عملية الضرب الاتجاهي للمتجهات أم لا؟

الحل

نعلم أن عملية الضرب الاتجاهي للمتجهات في $\mathbb{R}^3$ ليست تنسيقية وبالتالي هذه المجموعة لا تكون زمرة.

- أجمل ما في الحياة أن تبني جسرا من الأمل، فوق بحيرة من اليأس.
- احرص على نفع الآخرين ومساعدتهم ومد يد العون لهم فان صدق هذا الخير يرجع إليك وأثره ينالك لا محالة.
- تذكر أن التفاؤل سبيل عظيم نحو السعادة الداخلية فلا تحرم نفسك إياه فقط انظر إلى الجانب المشرق والجميل في الأشياء.
- الحياة بمشاكلها لا يصلح لها علاج وما يصلح معها هو التصرف مع أمورها المحيرة.
- أنظر إلي الحياة علي أنها رحلة تنتقل فيها من مكان لمكان ولزماً عليك أن تتكيف مع ظروف كل مكان لتحقيق عادة النجاح.

مثال:

$$i \times (j \times j) = i \times 0 = 0, \quad i \times (i \times j) \times j = k \times j = -j$$

وأيضاً ضرب الاتجاهي لمتجهين غير صفريين يعطي متجه آخر عمودي عليهما وهذا يعني عدم وجود عنصر محايد.

(8) ليكن $G = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ ، عرفت العملية $*$ على G كالتالي:

$$x * y = xy - x - y + 2 \quad \forall x, y \in G$$

البرهان:

أولاً: سنوضح أن العملية $*$ مغلقة في G

إذا كان $a, b \in G$ فإن $a > 1$, $b > 1$ ولهذا $b - 1 > 0$

ولذلك $a(b - 1) > b - 1$ وهذا يؤدي إلى أن $ab - a - b + 2 > 1$

ثانياً: سنبرهن أن العملية $*$ تنسيقية

let $a, b, c \in G$

$$a * (b * c) = a * (bc - b - c + 2)$$

$$= a(bc - b - c + 2) - a - (bc - b - c + 2) + 2$$

$$= abc - ab - ac - bc + a + b + c$$

$$(a * b) * c = (ab - a - b + 2) * c$$

$$= (ab - a - b + 2)c - (ab - a - b + 2) - c + 2$$

$$= abc - ab - ac - bc + a + b + c$$

$$\Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$$

ثالثاً: واضح أن المحايد هو 2 وذلك لأن: $2 * y = 2y - 2 - y + 2 = y$

رابعاً: لإيجاد معكوس العنصر a نفرض أن $a \in G$ معكوسه هو y

* النجاح لا يأتي إلا باتباع عاداته والتي من بينها: أن تكون واقعياً - أن تخلق خبرتك الخاصة بك - أن تكون مكافأة الحياة بالنسبة لك فيما تنجزه من أعمال - أن نعي بأنه لا وجود للحقيقة لكن ما يوجد هو الإدراك - تنجح عندما تعلم الناس كيف يتعاملون معك - التسامح هو أحد قوى النجاح - التفكير دائماً في النجاح وإمكانية تحقيقه، والابتعاد عن البيئة السلبية والفشل - لا تتوقف عن التعلم، عليك بالعودة إلى جو الدراسة من أن لآخر والقراءة المستمرة - عليك بالمتابعة والعمل الجاد ولا تستسلم، فالنجاح هو سباق مداه طويل وليس سباقاً قصيراً تنتهي منه بانتهااء السباق - تعلم من الأخطاء واعترف بها حتى تصل إلى الحقائق التي تمكنك من النجاح الحقيقي وليس الكاذب.

$$ay - a - y + 2 = 2 \Rightarrow y = \frac{a}{a-1}$$

$$a > a-1 \Rightarrow \frac{a}{a-1} > 1 \text{ لأن } G \text{ للمجموعة}$$

$$a * \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1} - a - \frac{a}{a-1} + 2 = 2 \text{ وكذلك}$$

مما سبق نستنتج أن زمرة G

$$(9) \text{ ليكن } G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\} \text{ برهن أن } G \text{ تكون زمرة تحت عملية ضرب المصفوفات}$$

البرهان:

$$(i) \text{ نفرض أن } \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G \text{ حيث } a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \neq 0$$

$$ac \neq 0 \therefore \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G;$$

إذاً العملية مغلقة

$$(ii) \text{ نفرض أن } \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} ace & acf + ad + b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ce & cf + d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ العملية تنسيقية

$$(iii) \text{ المصفوفة المحايدة هي } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ وهي تنتمي إلى المجموعة } G$$

* النجاح لا يأتي إلا باتباع عاداته والتي من بينها: ركز علي الوقت المتاح إليك والأموال التي توجد بحوزتك وابتعد عن من يشتت أفكارك - لا تخش الابتكار والإبداع، لا بد وأن تكون مختلفاً لتكون ناجحاً.

- تعلم أن تفهم الآخرين وكيف تقوم بتحفيزهم، لا يوجد شخص يعيش بمفرده في جزيرة منعزلة.

- كن صادقاً مخلصاً معتمداً علي الآخرين إلي حد ما، ومسئول علي الجانب الآخر وإلا لن تكون هناك عادات للنجاح - أيد غيرك في وجهات نظرهم الصحيحة لا تعارض باستمرار بدون وجه حق - صنف أولوياتك كما ينبغي أن تكون- حاول أن تفهم نفسك أنت أولاً قبل أن يفهمك الآخرون.

(iv) لإيجاد المعكوس نفرض أن معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ax & ay+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ax=1, ay+b=0 \Rightarrow x=\frac{1}{a}, y=\frac{-b}{a}$$

ولهذا فإن معكوس $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(10) برهن أن S_n غير تبديلية لكل $n \geq 3$

البرهان:

بما أن $(1\ 2), (2\ 3) \in S_n$

$$, \because (1 \ 2)(2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2) \dots\dots\dots (1)$$

$$, \because (2 \ 3)(1 \ 2) = (1 \ 2 \ 3) \dots\dots\dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $(1\ 2)(2\ 3) \neq (2\ 3)(1\ 2)$

S_n غير تبديلية لكل $n \geq 3$

(11) ليكن $T = \{f : f(x) = ax + b, a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0\}$ برهن أن T تكون زمرة تحت عملية تركيب الدوال.

الحل

let $f, g \in T : f(x) = ax + b, g(x) = cx + d$ (i)

$$(f \circ g)(x) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = (ac)x + (ad + b) \\ = Ax + B : A = ac \neq 0$$

$$\Rightarrow f \circ g \in T$$

من الواضح أن العملية تنسيقية لأن عملية تركيب الدوال تنسيقية بصفة عامة.

* - مستقبل المجتمع ليس وفقاً على كمال مؤسساته ،بل على كمال أفراده - الاجتهاد أسرع من العقيرة.
- هناك ثلاثة أمور مهمة في حياة الإنسان: الأول أن يكون لطيفاً ،والثاني أن يكون لطيفاً والثالث أن يكون ... لطيفاً - ليس الخلود فيما نخلفه من أشياء ،بل في الأشخاص الذين نترك عليهم بصمات من حياتنا.
- التنازلات أمر خطير فانتبه أن تمس ثوابتك - كلما كان تواصلك أفضل ،كلما حققت المزيد.

ii) المحايد هو الدالة المحايدة $i(x) = x = 1(x) + 0$ حيث $f \circ i = i \circ f = f$

iii) معكوس الدالة $f(x) = ax + b$ هو الدالة $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ والتي يمكن وضعها على الصورة

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{a}\right)x + \left(\frac{-b}{a}\right)$$

وهي تنتمي للمجموعة T حيث:

$$f \circ f^{-1} = f\left(\frac{1}{a}x + \left(\frac{-b}{a}\right)\right) = a\left(\frac{1}{a}x + \left(\frac{-b}{a}\right)\right) + b = x = f^{-1} \circ f$$

$\therefore T$ زمرة.

(12) ليكن $(G, *)$ زمرة، برهن أن (G, Θ) زمرة حيث: $x \Theta y = y * x \quad \forall x, y \in G$

البرهان:

i) الانغلاق: المجموعة G مغلقة تحت العملية Θ لأن:

$$x \Theta y = y * x \in G \quad \forall x, y \in G$$

ii) التنسقية:

let $x, y, z \in G$

$$x \Theta (y \Theta z) = x \Theta (z * y) = (z * y) * x = z * (y * x)$$

$$(x \Theta y) \Theta z = z * (x \Theta y) = z * (y * x)$$

$$\Rightarrow x \Theta (y \Theta z) = (x \Theta y) \Theta z$$

iii) المحايد موجود وهو $e \in G$ وذلك لأن:

$$x \Theta e = e * x = x \quad \forall x \in G$$

$$e \Theta x = x * e = x \quad \forall x \in G$$

iv) يوجد لكل عنصر معكوس وذلك لأن:

$$x \Theta x^{-1} = x^{-1} * x = e, \quad x^{-1} \Theta x = x * x^{-1} = e \quad \forall x \in G$$

$\therefore (G, \Theta)$ تكون زمرة.

(13) ليكن H_1, H_2 زمرة جزئية من الزمرة G هل $H_1 \cup H_2$ زمرة جزئية من G ؟ برهن صحة ما تقول.

* - المخططات هي نوايا جيدة فحسب ما لم تترجم فوراً إلى أعمال.

- القضاء على العدو ليس بإعدامه، وإنما بإبطال مبدئه.

- الصمت: إجابة بارعة لا يتقنها الكثيرون. - تواضع عند النصر، وأبتسم عند الهزيمة.

- أقدم متعبة وضمير مستريح خير من ضمير متعب وأقدام مستريحة - لا أحد يستطيع إهانتك إلا بمساعدتك.

الحل

ليس من الضروري أن تكون $H_1 \cup H_2$ زمرة جزئية من G والمثال التالي يوضح ذلك.
 $2+3=5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ولكن $2 \in 2\mathbb{Z}$, $3 \in 3\mathbb{Z}$, $2,3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$
 أي أن العملية ليست مغلقة.

(14) ليكن $H \leq G$, $K \leq G$ حيث $K \not\subseteq H$, $H \not\subseteq K$ برهن أن $H \cup K \not\leq G$
البرهان:

نفرض أن $h \in H$, $k \in K$ نلاحظ أن $h \notin K$, $k \notin H$
 الآن $h, k \in H \cup K$ ولكن $hk \notin H \cup K$ وذلك لأنه إذا فرضنا أن $hk \in H \cup K$ فإن $hk \in H$ أو $hk \in K$
 فإذا كان $hk \in H$ فإن $h^{-1}hk \in H$ وبذلك $k \in H$ وهذا غير ممكن
 وإذا كان $hk \in K$ فإن $hkk^{-1} \in K$ وبذلك $h \in K$ وهذا غير ممكن
 ∴ العملية غير مغلقة وبالتالي فإن $H \cup K \not\leq G$

(15) ليكن G زمرة وليكن $C = \{c \in G : cx = xc \forall x \in G\}$ مجموعة جزئية من G برهن أن C زمرة جزئية من G .
البرهان:

(i) الانغلاق: لنأخذ $c, d \in C$ فإذا كان $x \in G$ فإن: $cdx = cxd = xcd$ ولهذا فإن $cd \in C$
 (ii) المحايد: بما أن $e \in G$ وبما أن $\forall x \in G$ $ex = xe$ فإن $e \in C$
 (iii) المعكوس: ليكن $x \in G$ ولنأخذ عنصر $c \in C$
 من تعريف C يكون $cx = xc$

$$c^{-1}cx c^{-1} = c^{-1}x c c^{-1} \Rightarrow xc^{-1} = c^{-1}x \Rightarrow c^{-1} \in C$$

(iv) بالنسبة لقانون التنسيق متحقق لأن C مجموعة جزئية من الزمرة G

∴ C زمرة جزئية من G

* - الضربات القوية تهشم الزواج لكنها تصقل الحديد. - من الأفضل أن تعاني من الظلم من أن تمارسه.
 - وردة واحدة لإنسان على قيد الحياة أفضل من باقة كاملة على قبره.
 - لا تحاول أن تجعل ملابسك أغلى شيء فيك حتى لا تجد نفسك يوماً أرخص مما ترتديه.
 - نحن نميل إلى تصديق أولئك الذين لا نعرفهم لأنهم لم يخدعونا من قبل.

(16) ليكن g عنصر في الزمرة $G = (Z, +)$ وليكن $S = \{n \in Z : g^n = e\}$ برهن أن S زمرة جزئية من $(Z, +)$

البرهان:

(i) بفرض أن $n, m \in S$ فإن $g^n = e$, $g^m = e$

$$g^{n+m} = g^n g^m = e e = e \Rightarrow n+m \in S$$

إذاً العملية مغلقة في S

(ii) العنصر المحايد في S هو 0 وذلك لأن g^0 تساوي المحايد e للزمرة G

(iii) بفرض أن $n \in S$ فإن $g^n = e$

$$g^{-n}g^n = g^{-n}e \Rightarrow g^o = g^{-n} \Rightarrow g^{-n} = e \Rightarrow -n \in S \quad \text{الآن}$$

∴ لكل عنصر $n \in S$ يوجد معكوس $-n \in S$

والتنسيق متحقق ولذلك S زمرة جزئية من G

(17) لیکن $S = \mathbb{R}/\{-1\}$ ، عرفت $*$ علی S کالتالی: $a * b = a + b + ab$

برهن أن $(S,*)$ تكون زمرة.

البرهان:

(i) الانغلاق: واضح أنه إذا كان a, b أي عددين حقيقيين فإن $a + b + ab$ عدد حقيقي.

سنبرهن أن $a*b \neq -1$ ولذلك نفرض أن $a*b = -1$ أي أن $a+b+ab = -1$ وهذا يعني أن

$a+b+ab+1=0$ أي أن $(a+1)(b+1)=0$ وهذا يعني أن $a=-1$ أو $b=-1$

ولكن $a, b \in S$ حيث $S = \mathbb{R}/\{-1\}$

∴ فرضنا خاطئ، وبالتالي $a * b \neq -1$ وهذا يعني أن $a * b \in S$

(ii) التنسيق: نفرض أن $a, b, c \in S$

$$a * (b * c) = a * (b + c + bc) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$$

- إذا تكلمت وأنت غاضب فستقول أعظم حديث تندم عليه طوال حياتك.
- عليك بمجالسة العلماء ،واسمع كلام الحكماء ،فان الله ليحيي القلب الميت بنور الحكمة كما يحيي الأرض الميتة بوابل المطر.- لا تقل فيما لا تعلم ففتتهم فيما تعلم.
- من حكم الإمام علي بن أبي طالب رضي الله عنه: لا تكن بما نلت من دنياك فرحاً ،ولا لما فاتك منها ترحاً ،ولا تكن ممن يرجو الآخرة بغير عمل ،ويؤخر التوبة لطول الأمل.

$$, (a * b) * c = (b + a + ab) * c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$$

$$\Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$$

(iii) **العنصر المحايد:**

الصفء هو العنصر المحايد في المجموعة S لأن:

$$a * 0 = a + 0 + a(0) = a \quad , \quad 0 * a = 0 + a + 0(a) = a \quad \forall a \in S$$

(iv) المعكوس: نفرض أن معكوس a هو $\bar{a}$

$$0 = a * \bar{a} = a + \bar{a} + a\bar{a}$$

$$\bar{a}(1+a) = -a \Rightarrow \bar{a} = \frac{-a}{1+a} \quad a \neq -1$$

$\therefore (S, *)$ تكون زمرة.

(18) ليكن G زمرة وليكن $S \subseteq G$ حيث $S = \{x \in G : x^2 = e\}$ هل دائماً تكون S زمرة جزئية من G .

الحل

لا. والمثال التالي يوضح ذلك:

في الزمرة S_3 تكون المجموعة $\{\rho_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ مجموعة جزئية من S_3 ولكنها ليست زمرة جزئية منها بالرغم من أن $\rho_0^2 = \rho_0$ ، $\mu_3^2 = \rho_0$ ، $\mu_2^2 = \rho_0$ ، $\mu_1^2 = \rho_0$ وذلك لأن العملية ليست مغلقة.

حيث $\mu_1 \mu_2 = \rho_2$.

لاحظ أيضاً أن عدد عناصر هذه المجموعة 4 والعدد 4 لا يقسم العدد 6 الذي يمثل عدد عناصر S_3 "هذا الاستنتاج من مبرهنة لاگرانج".

(19) ليكن $(G, *)$ زمرة ابدالية وليكن S مجموعة العناصر $g \in G$ التي تحقق المعادلة $g^3 = e$ برهن أن S زمرة جزئية من G

* ليس العلم أن نعرف المجهول .. لكن أن نستفيد من معرفته .
فخر المرء بعمله وأدبه ، وليس بأصله ونسبه .- ليس الإنسان الصورة .. إنما العقل .
الحياة أمل ، ومن فقد الأمل .. فقد الحياة . - من ظن أنه قد تعلم .. فقد بدأ جهله .
الناس بالنسبة لك ثلاثة: أباً وأخاً وابنأ فبر أباك ، وأحفظ أخاك ، وأرحم ابنك .

البرهان:

$$x, y \in S \Rightarrow x^3 = e, y^3 = e \quad \text{i) الانغلاق:}$$

$$(xy)^3 = xyxyxy = xxxyyy = x^3 y^3 = ee = e$$

$$\Rightarrow xy \in S$$

ii) المحايد:

$$\text{بما أن } e^3 = e \text{ فإن } e \in S$$

$$\text{iii) المعكوس: } g \in S \Rightarrow g^3 = e \Leftrightarrow gg^2 = e \Rightarrow g^{-1} = g^2$$

$$\text{وبما أن العملية مغلقة فإن } g^{-1} = g^2 = gg \in S$$

إذاً S زمرة جزئية من G (20) ليكن G زمرة ، a عنصر مثبت من عناصر G فإذا كانت الدالة $\varphi_a: G \rightarrow G$ معرفة بالقاعدة

$$\varphi_a(g) = a^{-1}ga \text{ لكل } g \in G \text{ برهن أن } \varphi_a \text{ تكون تبديلة "إرشاد: برهن أن } \varphi_a \text{ دالة أحادية وفوقية"}$$

البرهان:

$$\varphi_a(g_1) = \varphi_a(g_2) \Rightarrow a^{-1}g_1a = a^{-1}g_2a \Rightarrow aa^{-1}g_1aa^{-1} = aa^{-1}g_2aa^{-1} \Rightarrow g_1 = g_2$$

∴ دالة أحادية

$$\text{نفرض أن } g \in G \text{ واضح أن } \varphi_a \text{ دالة فوقية وذلك لأن: } \varphi_a(aga^{-1}) = a^{-1}aga^{-1}a = g$$

إذاً φ_a تبديلة على المجموعة G (21) ليكن G مجموعة المصفوفات من الرتبة $n \times n$ وبمداخل من الأعداد الحقيقية حيث محدد المصفوفةلا يساوي صفر. بين ما إذا كانت G تكون زمرة أم لا مع كلاً من:**i) عملية جمع المصفوفات****ii) عملية ضرب المصفوفات****الحل****i) G لا تكون زمرة مع عملية جمع المصفوفات لأن عملية الجمع ليست مغلقة في G والمثال التالي****يوضح ذلك:**

* - إذا انتقمت ممن هو دونك فلا تأمن أن ينتقم منك من هو فوقك.

- كل شيء يبدأ صغيراً ثم يكبر إلا المصيبة فإنها تبدأ كبيرة ثم تصغر.

- حسن الخلق بسط الوجه ، طيب الكلام ، قلة الغضب واحتمال الأذى.

- الصدق ربيع النفس ، وثمرة المروءة ، وشعاع الضمير.

--لا خير في القول إلا مع العمل ، ولا في الحياة إلا مع السرور ، ولا في الصداقة إلا مع الوفاء ، ولا في المال إلا مع الجود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin G \text{ ولكن } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$$

(ii) G تكون زمرة مع عملية ضرب المصفوفات لتوفر جميع شروط الزمرة (من السهل برهنة ذلك)

(22) ليكن $G = (Q/\{0\}, *)$ حيث $a * b = |ab|$ هل G زمرة؟ لماذا؟

الحل

G ليست زمرة لعدم وجود عنصر محايد. لأنه لو فرضنا وجود عنصر محايد e فإن $-1 * e = -1$ ولكن حسب تعريف $*$ فإن $-1 * e = |-e|$ أي أن $-1 = |-e|$ وهذا غير ممكن لأنه من تعريف القيمة المطلقة $|x| \geq 0$

(23) هل الجملة التالية صحيحة أم خاطئة؟ ولماذا؟

إذا كان كلا من K, H زمرة جزئية غير تافهة من الزمرة $(\mathfrak{R}, +)$ فإن $H \cap K$ زمرة جزئية غير تافهة (أي أنه إذا كان $H \neq \{0\}, K \neq \{0\}$ فإن $H \cap K \neq \{0\}$).

الحل

العبارة خاطئة والمثال على ذلك $H = \mathbb{Z} \neq \{0\}$, $K = \{n\sqrt{2} : n \in \mathbb{Z}\} \neq \{0\}$, ولكن $H \cap K = \{0\}$

(24) لیکن $G = \mathbb{R}/\{2\}$ ، عرفت $*$ علی G کالتالی:

برهن أن $(G, *)$ زمرة. لكل $a, b \in G$ $a * b = ab - 2a - 2b + 6$

البرهان:

i) الانغلاق: بفرض أن $a, b \in G$. واضح أن $a * b$ عدد حقيقي لأن $ab - 2a - 2b + 6$ عدد حقيقي حيث جمع وطرح وضرب الأعداد الحقيقية يكون عدد حقيقي. نحتاج إلى برهنة أن $a * b \neq 2$ ولهذا نفرض أن:

$$ab - 2a - 2b + 6 = 2 \text{ أي } a * b = 2$$

$$\Rightarrow ab - 2a - 2b - 4 = 0 \Rightarrow (a-2)(b-2) = 0$$

* - الحق محبوب ومقبول حتى وإن كان مغلوباً على أمره ، والباطل مكروه وغير مقبول وإن كان غالباً .

- الحق جميل بذاته ، وصاحب الحق قريب من القلب ، وهو نظيف و طاهر وإن وقع في الوحل. ، وغير المحق غير طاهر وغير نظيف وإن اغتسل بالمسك .

- قد يتغير الشكل، وقد يتغير اللون، ولكن القلب أو الجوهر لا يتغير... والصيت والعنوان قد يتغيران ولكن الذات لا تتغير، وأكثر ما يخدع الناس هو تغير الشكل واللون والصيت والعنوان .

- الذي يسحق الضعيف مغلوب وإن كان غالباً. والمغلوب هنا غالب إن كان الحق معه.

$$\Rightarrow a=2 \quad \text{or} \quad b=2$$

وهذا يتناقض مع كون $a, b \in \mathbb{R}/\{2\}$ ولذلك نستنتج أن $a * b \in \mathbb{R}/\{2\}$

(ii) التنسيق:

$$(a * b) * c = (ab - 2a - 2b + 6) * c = abc - 2ac - 2bc - 2ab + 4a + 4b + 4c - 6$$

$$a * (b * c) = a * (bc - 2b - 2c + 6) = abc - 2ac - 2bc - 2ab + 4a + 4b + 4c - 6$$

$$\Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

(iii) المحايد: العدد 3 هو العنصر المحايد لأن $a * 3 = 3a - 2a - 6 + 6 = a \quad \forall a \in G$

وذلك $3 * a = 3a - 6 - 2a + 6 = a \quad \forall a \in G$

(iv) المعكوس: من السهل استنتاج أن المعكوس هو $\frac{2a-3}{a-2}$ لكل $a \in \mathbb{R}/\{2\}$ حيث:

$$a * \frac{2a-3}{a-2} = \frac{a(2a-3)}{a-2} - 2a - \frac{2(2a-3)}{a-2} + 6 = 3 = \frac{2a-3}{a-2} * a$$

مع ملاحظة أن $\frac{2a-3}{a-2} \in G$ وذلك لأنه لو فرضنا أن $\frac{2a-3}{a-2} = 2$ فإن:

$2a - 3 = 2a - 4$ وبالتالي فإن $-3 = -4$ وهذا غير ممكن.

$\therefore G$ تكون زمرة مع العملية $*$.

(25) إذا كانت G زمرة تبديلية و $H \subseteq G$ حيث $H = \{x^2 : x \in G\}$. برهن أن H زمرة جزئية من G

البرهان:

(i) بما أن $e \in G$ و $e = e^2$ فإن $e \in H$ وبذلك $H \neq \emptyset$

$$x^2, y^2 \in H \Rightarrow x^2 y^2 = (xy)^2 \in H \quad \text{(ii) الانغلاق:}$$
$$x^2 \in H \Rightarrow (x^2)^{-1} = (x^{-1})^2 \in H \quad \text{iii) المعكوس}$$

(iv) التنسيق متحقق لأن H مجموعة جزئية من الزمرة G المتحقق فيها التنسيق

$\therefore H$ زمرة جزئية.

*-الانسان الحقيقي هو الانسان الذي لا يدع إناء الآخرين فارغاً عندما يملأ إناؤه بالحليب ،مهما كانت الظروف.

- عليك أن تبذر ثم تمضي في طريقك، ولا يهتمك من سيحصل.

- قد تكون المرحلة الأخيرة للعسر المرحلة الأولى للانفراج واليسر.

- كل فكر تسلسل إلى أرواحنا واستقر فيها سيعطي ثمرته عاجلاً أم آجلاً. هذه الثمرة قد تكون شجرة طوبى في الجنة أو شجرة الزقوم في جهنم .

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ لیکن } \sigma, \tau \in S_6 \text{ حیث} \quad (26)$$

أوجد $\tau^2\sigma$ ثم عبر عنها على شكل حاصل ضرب دورات منفصلة ثم اكتبها على شكل مناقلة ثم أوجد مدارات $\tau^2\sigma$ ثم احسب رتبة $\tau^2\sigma$

الحل

$$\begin{aligned}\tau^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \tau^2 \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau^2 \sigma &= (1 \ 5 \ 6)(2 \ 4) = (1 \ 5)(1 \ 6)(2 \ 4)\end{aligned}$$

مدارات $\tau^2\sigma$ هي $\{2,4\}, \{3\}, \{1,5,6\}$

رتبة $\tau^2\sigma$ هي المضاعف المشترك الأصغر لأطوال دوراته المنفصلة أي أن: $|\tau^2\sigma| = lcm\{2,3\} = 6$

(27) إذا كان $H \leq G$, $K \leq G$ برهن أن: $H \cap K \leq G$

البرهان:

واضح أن $H \cap K \neq \emptyset$ لأنه على الأقل $H \cap K = \{e\}$ حيث $e \in H$, $e \in K$

let $x, y \in H \cap K$ then $x, y \in H$ and $x, y \in K$

$$\Rightarrow xy^{-1} \in H \text{ and } xy^{-1} \in K \Rightarrow xy^{-1} \in H \cap K$$

(28) ليكن H زمرة جزئية من الزمرة G وليكن a عنصر مثبت من G وليكن $K = \{aha^{-1} : h \in H\}$ برهن أن K زمرة جزئية من G .

البرهان:

$$e \in H \Rightarrow e = aea^{-1} \in K \quad (\text{i})$$

let $k_1, k_2 \in K$ such that $k_1 = ah_1a^{-1}, k_2 = ah_2a^{-1} : h_1, h_2 \in H$ (ii)

$$\Rightarrow k_1 k_2 = a h_1 a^{-1} a h_2 a^{-1} = a h_1 h_2 a^{-1} \in K \text{ because } h_1 h_2 \in H$$

* شعرت بالكآبة لأنه لا حذاء لدى حتى التقيت في الشارع برجل لا ساقين له.

- من النادر أن نفكر بما نملك، بل إننا نفكر بما ينقصنا.

- إن حياتنا هي ما تصوره أفكارنا.

- عدد نعمك .. وليس متاعك.

- إن الرجل العظيم تظهر عظمته من خلال الطريقة التي يعامل بها السفهاء.

if $k \in K$ then $k = aha^{-1} : h \in H$ (iii)

but $k^{-1} = (aha^{-1})^{-1} = ah^{-1}a^{-1} \in K$ because $h^{-1} \in H$

والتنسيق متحقق في K لأنه متحقق في الزمرة الجزئية H

إذاً K زمرة جزئية من G

(29) أعط مثلاً على زمرة $(G, *)$ وعنصرين a, b في G بحيث $(a * b)^2 \neq a^2 * b^2$

الحل

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ليكن } G = (GL_2(\mathbb{Z}), \times) \text{ وبفرض أن}$$

$$a * b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (a * b)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 24 \\ 40 & 31 \end{pmatrix}$$

$$a^2 * b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 23 \\ 43 & 33 \end{pmatrix}$$

(30) ليكن A^T هي محورة المصفوفة A ، برهن أن المجموعة:

$S = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$ مع عملية ضرب المصفوفات تكون زمرة

البرهان:

(i) الانغلاق: إذا كان $A, B \in S$ فإن $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} = B^T A^T = (A.B)^T$ وكذلك $A.B \in S$

(ii) التنسيق: نعلم أن عملية ضرب المصفوفات عملية تنسيقية

(iii) المحايد: المصفوفة I_n هي المصفوفة المحايدة حيث

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & & . & & & & \\ . & & & . & & & \\ . & & & & . & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

أي أن القطر الرئيسي عناصره 1 وباقي عناصر المصفوفة صفر.

* - كن كالنحلة إن أكلت أكلت طيبا وإن أطعمت أطعمت طيبا وإن سقطت على شيء لم تكسره.

- اعلم أنك لست الوحيد في البلاء فما سلم من الهم أحد وما نجا من الشدة بشر.

- عش كل لحظة كأنها آخر لحظة في حياتك..... عش بالإيمان... عش بالأمل.... عش بالحب... عش بالكفاح.... وقدّر قيمة الحياة.

∴ S زمرة مع عملية ضرب المصفوفات

البرهان:

أولاً: نفرض أن $a=1$ ونبرهن أن G_a تكون زمرة

(i) الانغلاق:

لكل $A, B \in G_1$ نعلم أن $\det(A.B) = \det(A).\det(B) = 1.1 = 1$ ولذلك $A, B \in G_1$

(ii) نعلم أن عملية ضرب المصفوفات عملية تنسيقية

(iii) المصفوفة المحايدة هي I_n حيث

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ 0 & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن $\det(I_n) = 1^n = 1$ وهذا يعني أن $I_n \in G_1$

(iv) المعكوس:

ليكن $A \in G_1$ وبما أن $\det(A) = 1$ فإن A لها معكوس ولنعتبر أنه A^{-1} وسنحسب الآن $\det(A^{-1})$

$A^{-1} \in G_I$ وهذا $\det(A^{-1}) = 1$. $\det(A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

وبذلك برهنا أن G_1 زمرة

ثانياً: نفرض أن: G_a زمرة ونبرهن أن $a=1$

لذلك نفرض أن $a \neq 1$ وهذا يعني أن هناك حالتان هما $a = 0$, $a \neq 0$ في الحالة الأولى عندما $a = 0$

ستكون العملية مغلقة في G_0 لأننا فرضنا أن G_a زمرة ولكن $\det(I_n) = 1 \neq 0$ ولهذا $I_n \notin G_1$ أي أن

G_0 لا تحتوي على محايد وهذا تناقض.

* فوائد ما يسميه البعض بالفشل:

1. حافز للنجاح والإبتعاد عن مرارة الفشل. 2. التفكير في معرفة ما هي نقاط الضعف. 3. إثبات بأننا بشر نخطئ و نصيب وأننا غير كاملين أو غير معصومين من الخطأ. 4. حافز للتطوير و للوصول لأعلى المراتب.

وفي الحالة الثانية عندما $a \neq 0$ نفرض أن $A \in G_n$ ولذلك:

$$a = \det(A.A) = \det(A) \cdot \det(A) = a.a = a^2$$

وبما أننا فرضنا أن $a \neq 0$ و $a \neq 1$ ونعلم أنه في هذه الحالة $a \neq a^2$ وبذلك نستنتج أن $AA \notin G_a$ أي أن العملية ليست مغلقة وهذا تناقض أيضاً أي أن فرضنا بأن $a \neq 1$ خاطئ وبالتالي فإن $a = 1$

(32) أوجد كل الزمر الجزئية للزمرة S_3 ثم ارسم المخطط الشبكي

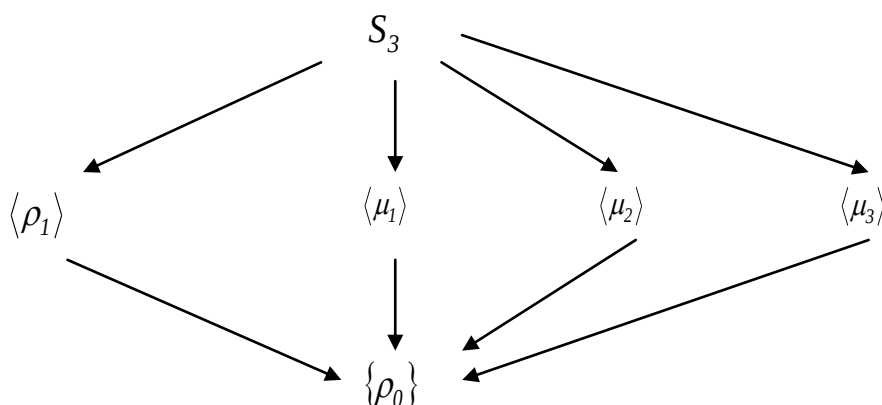
الحل

توجد زمرة جزئية واحدة من الرتبة 3 وهي $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_2 \rangle = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ وتوجد 3 زمرة جزئية من الرتبة 2

$\langle \mu_1 \rangle = \{\rho_0, \mu_1\}, \langle \mu_2 \rangle = \{\rho_0, \mu_2\}, \langle \mu_3 \rangle = \{\rho_0, \mu_3\}$ وهی

وكذلك زمرة جزئية واحدة من الرتبة 1 وهي الزمرة التافهة $\{\rho_0\}$

والشكل التالي هو المخطط الشبكي للزمر الجزئية من الزمرة S_3



(33) أوجد رتبة العنصرين التاليين من عناصر الزمرة $GL_2(\mathbb{R})$ حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ثم أوجد رتبة AB

الحل

* الفشل ينبغي أن يكون معلماً لنا وليس مقبرة لطموحاتنا، والفشل ما هو إلا حالة تأخير وليس هزيمة، إنه تحول مؤقت عن الوصول إلى الهدف وليس نهاية مميتة، وهو شيء يمكننا تجنبه فقط بأن نقول أو نفعل أو نكون شيئاً.

- الحياة عبارة عن سلسلة من التجارب والخبرات، بعضها جيد والآخر سيئ، وكل واحدة من هذه الخبرات تجعلك أكثر قوة على الرغم من أنه غالباً ما تغفل عن إدراك ذلك.

- لا يوجد هناك فشل حقيقي، فما ندعى بأنه فشل ما هو إلا خبرة قد اكتسبناها من واقع تجاربنا في الحياة.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow O(A) = 2$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow O(B) = 2$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (AB)^3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (AB)^4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باستخدام الاستقراء الرياضي نستطيع برهنة أن

$$(AB)^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن $(AB)^n \neq I$ وبذلك العنصر AB لا نهائي الرتبة.

لاحظ في هذا المثال أن كلاً من A, B له رتبة منتهية بينما حاصل ضربهما AB لا نهائي الرتبة.

(34) أكمل الجدول التالي بحيث تكون المجموعة $\{e, a, b\}$ زمرة مع اعتبار أن e هو العنصر المحايد

$*$	e	a	b
e			
a			
b			

الحل

واضح أن $a * b = e$ وذلك لأنه لو فرضنا أن $a * b = a$ فإن $b = e$ وكذلك لو فرضنا أن $a * b = b$ فإن $a = e$ ولذلك $a = e$ ولذلك $b * a = e$ أيضاً نحتاج الآن لمعرفة قيمة $a * a$, $b * b$.

$a \neq e$ لأن $a * a \neq e$ وكذلك $a * a \neq e$ لأنه لو فرضنا أن $a * a \neq e$ فإن $a * a = a * b$ وبذلك $a = b$ ولذلك $a * a$ يجب أن يساوي b وبالمثل $b * b = a$ وبهذا يكون جدول الزمرة كالتالي:

* سر النجاح في الجد والاجتهاد - سر النجاح في الإيمان بفكرك - سر النجاح في تعلقك بخالقك - سر النجاح في إيمانك بقوتك الداخلية - سر النجاح في وضوح الهدف والرؤية - سر النجاح في تقبلك للوضع الحالي ومعرفة أين وصلت - سر النجاح في حب الخير لنفسك وللآخرين - سر النجاح في الاهتمام بالآخرين ومساعدتهم لحياة أفضل - سر النجاح في القلب المخلص الدافئ - سر النجاح في اتزان الحياة والتوفيق بين جوانبها المختلفة - سر النجاح في رد فضل التوفيق لله والفشل من النفس - سر النجاح في النهوض مباشرة بعد الفشل - سر النجاح في أن لا تصدق أي خرافة من نفسك أو من الآخرين تعيقك - سر النجاح في اتباع نهج من تريد الوصول لهم - سر النجاح في السعي للنجاح - سر النجاح في الإنتاج وترك الأثر العميق.

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(35) أوجد رتبة $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ في الزمرة $(\mathbb{C}/\{0\}, \times)$

الحل

$$z^8 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^8 = \cos \frac{8\pi}{4} + i \sin \frac{8\pi}{4} = 1 + 0 = 1$$

رتبة العنصر z هي 8 لأن: $1 + 0 = 1$

حيث 8 هي أصغر عدد صحيح وجب يحقق أن $z^n = e$

(36) ليكن A مجموعة، b عنصر في A برهن أن المجموعة $T = \{\mu \in S_A : \mu(b) = b\}$ تكون زمرة.

البرهان:

الانغلاق: إذا كان $\sigma, \tau \in T$ فإن $\sigma\tau \in T$ وذلك لأن: $(\sigma\tau)(b) = \sigma(\tau(b)) = \sigma(b) = b$

المحايد موجود في T لأن التبديلة المحايدة تحقق شروط T حيث لأي عنصر $x \in A$ يكون $\sigma(x) = x$

المعكوس: إذا كان $\sigma \in T$ فإن $\sigma^{-1} \in T$ لأن $\sigma(b) = b$ يؤدي إلى أن $b = \sigma^{-1}(b)$

التنسيق: متحقق في T لأنها مجموعة جزئية من S_A

(37) ليكن A مجموعة ، $B \subseteq A$ ، b عنصر مثبت في B وضح أن المجموعة $T = \{\sigma \in S_A : \sigma(b) \in B\}$

لا تكون زمرة جزئية من S_A

الحل

بصفة عامة لا يمكن اعتبار T زمرة جزئية من S_A والمثال التالي يوضح ذلك:

نفرض أن $b=1$, $B=\{1,2\}$, $A=\{1,2,3\}$

لاحظ أن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in T$ ولكن $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \notin T$

* - سر النجاح في زرع قيمك في أبناء أو طلبة أو مشروع أو في كتاب - سر النجاح معرفة ما يأخذ بلبك وعقلك وبأن تتبّع قلبك وتسعى له - سر النجاح في الثقة بالله وأنه سيوفّقك لكل خير - سر النجاح في القراءة والتعلّم - سر النجاح في أن تكون أفضل إنسان بإمكانك أن تكونه - سر النجاح في أن تكون عظيما وتفعل ما هو خارق للعادة - سر النجاح في أن تتعلم كل يوم من كل المواقف وتستنتج القيمة منها - سر النجاح في أن تزداد علما وعملا كل يوم - سر النجاح في التجارب - سر النجاح في التمتع بالنجاح.

(38) ليكن H زمرة جزئية من الزمرة G وبفرض أن $a, b \in G$ حيث $aH = bH$ وضح بمثال أن

$$a^{-1}H \neq b^{-1}H$$

الحل

$b^{-1} = \rho_1$, $a^{-1} = M_2$ وبذلك يكون $b = \rho_2$, $a = \mu_2$, $H = \{\rho_0, \mu_3\}$, $G = S_3$ ليكن

$$aH = \mu_2 H = \{\mu_2, \rho_2\} \quad , \quad bH = \rho_2 H = \{\rho_2, \mu_2\}$$

$$a^{-1}H = \mu_2 H = \{\mu_2, \rho_2\} \quad , \quad b^{-1}H = \rho_1 h = \{\rho_1, \mu_1\}$$

لاحظ أن $aH = bH$ ولكن $a^{-1}H \neq b^{-1}H$

(39) أعط مثلاً على زمرة G وعنصرين a, b في G بحيث $(ab)^3 \neq a^3b^3$

الحل

في الزمرة S_3 إذا أخذنا العنصرين σ_1, μ_1 نجد أن $(\sigma_1 \mu_1)^3 \neq \sigma_1^3 \mu_1^3$

(يترك للطالب التأكد من صحة ذلك)

(40) إذا كان $*$ عملية ثنائية على المجموعة S فإن العنصر $x \in S$ يقال بأنه عنصر جامد بالنسبة للعملية

* إذا كان $x * x = x$. برهن أن الزمرة لها عنصر جامد واحد فقط.

البرهان:

ليكن $(G,*)$ زمرة

واضح أن العنصر المحايد e هو عنصر جامد وذلك لأن $e * e = e$

وبذلك الزمرة G لها على الأقل عنصر واحد جامد.

نفرض أن هناك عنصر آخر $x \in G$ ويكون جامد أي $x * x = x$

$$\Rightarrow x^{-1} * x * x = x^{-1} * x \Rightarrow e * x = e \Rightarrow x = e$$

وهذا يبرهن أن العنصر الجامد في الزمرة يكون وحيد وهو العنصر المحايد

* إن الحياة لا تعطيك إلا بقدر ما تعطيها ولا تحرمك إلا بمقدار ما تحرم نفسك منها.... الحياة مرآة أعمالك وصدى أقوالك إذا أردت أن يوقرك أحد فوقر غيرك ... إذا أردت أن يرحمك أحد فارحم غيرك.... وإذا أردت أن يسترك أحد فاستر غيرك.... إذا أردت من الناس أن يساعدوك فساعد غيرك.... وإذا أردت من الناس أن يستمعوا إليك ليفهموك فاستمع إليهم لفهمهم أولاً..... لا تتوقع من الناس أن يصبروا عليك إلا إذا صبرت عليهم.

المركبة مع الجمع $(\mathbb{C}, +)$

(iv) مجموعة الأعداد التخيلية

(v) πQ مجموعة الأعداد القياسية المضروبة في π

الحل

(ii) $Q^+ \not\leq \mathcal{C}$ لأن Q^+ لا تحتوي على العنصر المحايد

$$\pi Q \leq \mathcal{C} \quad (\text{v}) \qquad i \, \Re \leq \mathcal{C} \quad (\text{iv})$$

(42) أعط قائمة كاملة لكل الزمر الجزئية من الزمر المعطاة فيما يلي:

$$G_1 : Z \text{ مع الجمع} , \quad G_2 : 12 Z \text{ مع الجمع} , \quad G_3 : Q^+ \text{ مع الضرب} , \quad G_4 : \mathbb{R} \text{ مع الجمع} ,$$

$$G_5 : \mathbb{R}^+ \text{ مع الضرب} , \quad G_6 : \{\pi^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ مع الضرب} , \quad G_7 : 3 Z \text{ مع الجمع} .$$

$$G_8 : \text{مجموعة الأعداد الصحيحة مضاعفات 6 مع الجمع}$$

$$G_9 : \{6^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ مع الضرب}$$

الحل

$$G_2 < G_8 < G_7 < G_1 < G_4 \quad (\text{i})$$
$$G_9 < G_3 < G_5 \quad (\text{ii})$$
$$G_6 < G_5 \quad (\text{iii})$$

(43) اكتب 5 عناصر على الأقل من كل زمرة من الزمر الدورية الآتية:

أ) $25\mathbb{Z}$ مع الجمع ب) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{Z}\right\}$ مع الضرب ج) $\{\pi^n : n \in \mathbb{Z}\}$ مع الضرب

الحل

$$\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots \text{ (ب)}$$
$$..., \frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\pi}, 1, \pi, \pi^2, \dots (\zeta$$

* تستطيع إذا اعتقدت أنك تستطيع .

- الأمل هو اليأس من اليأس - الأمل هو نبض القلب و شريان الحياة.

- الفشل ينبغي أن يكون معلماً لنا وليس مقبرة لطموحاتنا، والفشل ما هو إلا حالة تأخير وليس هزيمة، إنه تحول مؤقت عن الوصول إلى الهدف وليس نهاية مميتة، وهو شيء يمكننا تجنبه فقط بأن نقول أو نفعل أو نكون شيئاً.

44) أي من الزمر التالية دورية؟ لكل زمرة دورية أعط مولداتها
 $(Z,+)$, $(Q,+)$, $(Q^+, \times)$, $(6Z,+)$, $\{6^n : n \in \mathbb{Z}\}$ مع الضرب
 ، $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ مع الجمع.

الحل

$(Z,+)$ زمرة دورية مولدها 1 وكذلك -1

$(Q,+)$ ليست زمرة دورية

$(Q^+, \times)$ ليست زمرة دورية

$(6Z,+)$ زمرة دورية مولدها 6 وكذلك -6

$\{6^n : n \in \mathbb{Z}\}$ مع الضرب زمرة دورية مولدها 6 وكذلك $\frac{1}{6}$

$\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ مع الجمع ليست زمرة دورية

45) وضح ما إذا كانت مجموعة المصفوفات ذات الرتبة $n \times n$ القابلة للعكس وبمداخل من الأعداد الحقيقية ومحدداتها يساوي 2 تكون زمرة جزئية من $GL(n, \mathbb{R})$

الحل

$H = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 2\}$ ليست زمرة جزئية من $GL(n, \mathbb{R})$ لأنه إذا كان $A, B \in H$ فإن:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 2 \times 2 = 4 \text{ وكذلك } I_n \notin H \text{ لأن } \det(I_n) = 1$$

46) وضح ما إذا كانت مجموعة مصفوفات المثلث العلوي ذات الرتبة $n \times n$ حيث لا يوجد أصفار بالقطر الرئيسي تكون زمرة جزئية من $GL(n, \mathbb{R})$

الحل

ليكن S هي مجموعة مصفوفات المثلث العلوي من الرتبة $n \times n$ وبدون أصفار في القطر الرئيسي.

$$B = [b_{ij}] \in S, \quad A = [a_{ij}] \in S$$

وبما أن كل من A, B مصفوفة مثلث علوي فإن $a_{ij} = 0$ لكل $i > j$ وكذلك $b_{ij} = 0$ لكل $i > j$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \text{ سيكون: } AB$$

* الحياة عبارة عن سلسلة من التجارب والخبرات، بعضها جيد والآخر سيئ، وكل واحدة من هذه الخبرات تجعلك أكثر قوة على الرغم من أنه غالباً ما تغفل عن إدراك ذلك! والضربات التي لا تقصم الظهر تزيد قوته.
 - تعلم بأن الإحباط والمعاناة اللذين تتحملهما يساعدانك دائماً على التقدم للأمام متى اتعظت منهما، فهذا العالم الذي نعيش فيه ما هو في الحقيقة إلا فرصة لك لتطور شخصيتك، لذا ينبغي أن تبقى وسط أحداث الحياة ونشاطاتها.

فإذا كان $i > j$ فإن $a_{ik}b_{kj} = 0$ حيث $a_{ik} = 0$ لكل $i > k$ و $ab_{kj} = 0$ لكل $k > j$. ولهذا المصفوفة AB تكون مصفوفة مثلث علوي أي أن العملية مغلقة.

بالنسبة للتنسيق متحقق لأن عملية ضرب المصفوفات عملية تنسيقية وكذلك يمكن للطالب التحقق من أن مصفوفة المثلث العلوي التي لا تحتوي على أصفار بالقطر الرئيسي قابلة للانعكاس بعد التأكد من وجود مصفوفة محايدة.

(47) ليكن G زمرة عنصرها المحايد e ، بفرض أن a, b, c عناصر في G حيث $c * b * a = e$ برهن أن:

$$b * a * c = e$$

البرهان:

$$c^{-1} * c * b * a = c^{-1} * e \Rightarrow e * b * a * c = c^{-1} * e * c \Rightarrow b * a * c = e \text{ فإن } c * b * a = e \text{ بما أن } c * b * a = e$$

(48) ليكن a عنصر مثبت من الزمرة G ، عرفت الدالة $\varphi: G \rightarrow G$ بالقاعدة $\varphi(g) = aga^{-1}$ لكل $g \in G$ برهن أن φ دالة تشاكل تقابلي.

البرهان:

$$(i) \text{ نفرض أن } g, h \in G \text{ وبالتالي فإن } \varphi(gh) = agha^{-1} = aga^{-1}aha^{-1} = \varphi(g)\varphi(h)$$

$$(ii) \text{ بفرض أن } g \in G \text{ عندئذ } \varphi(a^{-1}ga) = aa^{-1}gaa^{-1} = g \text{ وهذا يعني أن } \varphi \text{ دالة فوقية.}$$

$$(iii) \text{ وهذا يعني أن } g \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(g) = e = aga^{-1} \Rightarrow a^{-1}ea = g \Rightarrow e = g$$

مما سبق نستنتج أن φ دالة تشاكل تقابلي.

$$(48) \text{ ليكن } \varphi: (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \times) \rightarrow (\mathbb{R}/\{0\}, \times) \text{ معرفة بالقاعدة } \varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ab$$

هل φ تمثل دالة تشاكل زمري؟ ولماذا؟

الحل

* الدعاء غذاء الروح. ويجب إعطاء هذا الغذاء للروح دون انقطاع .

- الدعاء سحر يمنح الإرادة جناحين. ولا يفهم سر هذه القوة إلا المداومون على الدعاء .

- الدعاء يجتاز الأسباب الظاهرية ، وهو إعلان ثقة بقدرة الله تعالى من جهة والضعف البشري من جهة أخرى .

- الصبر مثل عشب مر يهدئ الآلام... أي مع أنه يؤلم النفس إلا أنه يداويها في الوقت نفسه .

- الأخطاء هي أكثر الموجودات في جعبة المتعجلين .

- تعلم ما استطعت تكن أميراً ولا تكن جاهلاً تبقى أسيراً

ليكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ عندئذ:

$$\varphi(A \times A) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \times 2 = 2$$

$$\varphi(A) \times \varphi(A) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \times \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \times 1 = 1$$

$$\Rightarrow \varphi(A \times A) \neq \varphi(A) \times \varphi(A)$$

أي أن φ لا تمثل دالة تشاكل زمري.

(50) لیکن $G = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq 1\}$ عرفت $*$ علی G کالتالی: $a * b = a^{\ln b}$ لكل $a, b \in G$

برهن أن G متشاكله تقابلياً مع الزمرة $(\mathbb{R}/\{0\}, \times)$

البرهان:

نعرف $\varphi: \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow G$ بالقاعدة $\varphi(r) = e^r$

واضح أن φ دالة وأن $\varphi(r) \in G$ لكل $r \in \mathbb{R}/\{0\}$ وذلك لأن $e^r > 0$, $e^r \neq 1$

للبهنة أن φ دالة أحادية نفرض أن $r, s \in \mathbb{R}/\{0\}$ حيث $\varphi(r) = \varphi(s)$

$$\therefore e^r = e^s \Rightarrow r = s$$

لبرهنة أن φ دالة فوقية نفرض أن $g \in G$ ، $r = \ln g$ وهذا يعني أن $r \in \mathfrak{R}/\{0\}$ لأن $g \neq 1$

$$\varphi(r) = e^r = e^{\ln g} = g$$

لبرهنة أن φ دالة تشاكل، نفرض أن $r, s \in \mathbb{R}/\{0\}$ عندئذ:

$$\varphi(r)*\varphi(s)=e^r*e^s=(e^r)^{\ln e^s}=(e^r)^s=e^{rs}=\varphi(rs)$$

وهذا يبرهن أن G متشاكله تقابلياً مع الزمرة $(\mathbb{R}/\{0\}, \times)$

51) هل الزمرة $(\mathbb{R}^+, \times)$ متشاكلة تقابلياً مع $(\mathbb{R}, +)$ ؟ برهن صحة ما تقول.

الحل

* النجاح هو تحقيق أحلامك - النجاح هو استغلالك الأمثل لطاقتك - النجاح هو العلاقات الطيبة - النجاح تحقيق ما تريده وتودّه - النجاح هو التعلم من الماضي والاستفادة منه - النجاح هو نتيجة فشل متكرر- النجاح هو رغبة كل إنسان - النجاح هو شعور بعد الإنجاز - النجاح هو التغلب على العادات السلبية - النجاح هو الحب والإخلاص - النجاح هو أن تكتشف ذاتك - النجاح مختلف من إنسان لآخر فحدد ما هو النجاح بالنسبة لك.

نعم الزمرتان متشاكلتان تقابلياً بالدالة $\varphi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \times)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(r) = 10^r$ لكل $r \in \mathbb{R}$ وذلك لأن φ دالة تشاكل حيث لكل $r, s \in \mathbb{R}$ يكون:

$$\varphi(r+s)=10^{r+s}=(10^r)(10^s)=\varphi(r)\varphi(s)$$

وكذلك φ دالة فوقية لأنه إذا كان $t \in \mathbb{R}^+$ فإن $10^{\log_{10} t} = t$

وأيضاً φ دالة أحادية لأنه إذا فرضنا أن $\varphi(r) = \varphi(s)$ حيث $r, s \in \mathbb{R}$ فإن $10^r = 10^s \Rightarrow r = s$

(52) ليكن G زمرة، a عنصر مثبت من عناصر G فإذا كانت $\varphi_a: G \rightarrow G$ معرفة بالقاعدة

$\varphi_a(g) = ga \quad \forall g \in G$ هل φ_a دالة تشاكل زمري؟ لماذا؟

الحل

φ_a ليست دالة تشاكل لأن $\varphi_a(e) = ea = a$ حيث أن في دالة التشاكل صورة المحايد من G تكون المحايد في $\overline{G}$

(53) لیکن $\varphi: (\mathbb{R}/\{0\}, \times) \rightarrow (\mathbb{R}/\{-2\}, *)$ حيث $a * b = ab + 2a + 2b + 2$

عرف دالة التشاكل φ ثم برهن أنها دالة تشاكل تقابلي.

الحل

نعرف الدالة φ بالقاعدة $\varphi(x) = x - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$

واضح أن φ دالة تشاكل لأنه إذا كان $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ فإن: $\varphi(xy) = xy - 2$ وكذلك

$$\phi(x)*\phi(y)=(x-2)*(y-2)=(x-2)(y-2)+2(x-2)+2(y-2)+2$$

$$= xy - 2x - 2y + 4 + 2x - 4 + 2y - 4 + 2 = xy - 2$$

$$\Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

الدالة φ دالة فوقية لأنه لو فرضنا أن $y \in \mathbb{R}/\{-2\}$ فإن:

$$\phi(y+2)=y+2-2=y \text{ , } y+2 \in \mathfrak{R}/\{0\}$$

الدالة φ أحادية لأنه إذا كان $x, y \in \mathbb{R}/\{0\}$ حيث $\varphi(x) = \varphi(y)$ فإن $x-2 = y-2$ والذي يؤدي إلى $x = y$

* لتتج عليك أن تسامح ولا يوجد شخص عظيم إلا وتجده شخص مسامح ،وأفضل وسيلة للانتقام هي التسامح والنجاح ،سامح نفسك ومن حولك ،اطلب من الله أن يسامحك وأسأله قلباً متسامحاً ،سامح الأوضاع ،سامح والديك أبناءك واهلك إخوانك ومدرسيك ،اسمح للآخرين أن يسامحوك واطلب منهم أن يسامحوك ،سامحهم وستكون على أول سلم النجاح.

54) ليكن $\varphi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$ معرفة بالقاعدة: $\varphi(x) = 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ برهن أن φ دالة تشاكل البرهان:

$$\varphi(x+y) = 2^{x+y} = 2^x 2^y = \varphi(x) \varphi(y)$$

وهذا يبرهن أن φ دالة تشاكل زمري.

55) هل $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(n) = -n$ لكل $n \in \mathbb{Z}$ تكون دالة تشاكل تقابلي؟ برهن صحة ما تقول.

الحل

نعم φ دالة تشاكل تقابلي لأن:

- i) φ دالة أحادية لأنه إذا كان $\varphi(n) = \varphi(m)$ فإن $-n = -m$ والذي يعني أن $n = m$
- ii) φ دالة فوقية لأنه إذا كان $m \in \mathbb{Z}$ فإنه يوجد $-m \in \mathbb{Z}$ حيث $\varphi(-m) = -(-m) = m$
- iii) φ دالة تشاكل لأن: $\varphi(n+m) = -(n+m) = -n + (-m) = \varphi(n) + \varphi(m) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$

56) بين ما إذا كانت $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ المعرفة بالقاعدة: $\varphi(n) = 2n$ لكل $n \in \mathbb{Z}$ دالة تشاكل تقابلي أم لا؟ الإجابة:

$$\varphi(n+m) = 2(n+m) = 2n + 2m = \varphi(n) + \varphi(m) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad \text{i)}$$

$\therefore \varphi$ دالة تشاكل

$$\varphi(n) = \varphi(m) \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m \quad \text{ii)}$$

iii) φ ليست فوقية لأنه لا يوجد أي عنصر في $\mathbb{Z}$ صورته عدد فردي في $\mathbb{Z}$ مثلاً $5 \in \mathbb{Z}$ ولكن لا يوجد $n \in \mathbb{Z}$ بحيث $\varphi(n) = 5$ ولذلك فإن φ ليست دالة تشاكل تقابلي.

57) هل الدالة $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ المعرفة بـ $\varphi(n) = n+1 \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$ تكون دالة تشاكل تقابلي؟ الإجابة:

* لا تستطيع الوصول لما تريده إلا بأن تتقبل الماضي والحاضر، تقبل الماضي والحاضر وتقبل نفسك كما هي، تقبل جسدك كما هو وإن كانت به آلام أو كان لا يعجبك تقبله كما هو، تقبل الناس كما هم، تقبل والديك أصدقاءك اهلك، تقبل الحياة والأحداث كما هي، اشعر بالقبول والرضى بالوقت الحاضر وللماضي القبول التام وتسليم الأمور للخالق، بعدها ستجد نفسك تلقائياً تتطلق نحو النجاح والتغيير الذي تريده.

من السهل برهنة أن φ دالة أحادية وفوقية ولكن φ ليست دالة تشاكل لأن:

$$\phi(n+m)=n+m+1, \phi(n)+\phi(m)=n+1+m+1=n+m+2$$

$$\Rightarrow \varphi(n+m) \neq \varphi(n) + \varphi(m)$$

(58) عرف مركز الزمرة ثم برهن أن مركز الزمرة هو زمرة جزئية من الزمرة.

الإجابة:

ليكن G زمرة فإن مركز الزمرة G هو المجموعة: $C(G) = \{x \in G : xg = gx \quad \forall g \in G\}$

ملاحظة: سبق برهنة أن مركز الزمرة هو زمرة جزئية من الزمرة. أنظر السؤال رقم 15 صفحة 10.

59 هل الدالة $\varphi: (Q^*, \times) \rightarrow (Q^*, \times)$ دالة تشاكل تقابلي؟ حيث $\varphi(x) = x^2$

الإجابة:

(i) الدالة دالة تشاكل لأن: $\varphi(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2 = \varphi(x)\varphi(y)$

(ii) الدالة ليست أحادية لأن $\varphi(x) = \varphi(-x) = x^2$ وبذلك φ لا تكون تشاكل تقابلي

ملاحظة: الدالة أيضاً ليست فوقية لأنه لأي عدد سالب $y \in Q^*$ لا يوجد $x \in Q^*$ بحيث $\varphi(x) = y$ ،

على سبيل المثال لا يوجد عدد x بحيث $\varphi(x) = -1$

(60) هل الدالة $\varphi: (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(x) = x^3$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$ تكون تشاكل تقابلي؟

الإجابة:

$$\phi(xy) = (xy)^3 = x^3y^3 = \phi(x)\phi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^* \quad (i)$$

$$\phi(x)=\phi(y) \Rightarrow x^3=y^3 \Rightarrow x=y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^* \quad (\text{ii})$$

$$\forall y \in \mathfrak{R}^* \quad \exists x \in \mathfrak{R}^* : x = \sqrt[3]{y} \quad , \quad \varphi(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y \quad (\text{iii})$$

مما سبق نستنتج أن φ دالة تشاكل تقابلي.

* اكتب أهدافك بوضوح ، لونها ، تخيلها ، اكتبها على أوراق وعلقها ، اكتب خطتك الأسبوعية وعلقها على الحائط ، استخدم فن الخريطة الذهنية في كتابة أهدافك وتفنن بها ، اخبر أصدقاءك عن أهدافك القريبة وانك قررت تحقيقها ليكن حلمك ولتكن أهدافك حلمك الذي يداعب أجفانك والذي ترغب يوماً في تحقيقه.