هذه المجموعة من الدروس في نظرية الزمر من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

سأقدم لكم بإذن الله شرح كامل ووافي لـ 7 فصول في الزمره في مواضيع منفصلة هي عبارة عن بحث التخرج لصديقاتي المقربات وقد أحببن أن يستفيد الجميع من هذا البحث لأنهم بذلوا مجهود كبير فيه
فأرجوا منكم الدعاء لهم جميعا بالتوفيق بالدنيا والآخرة

المراجع المستخدمة في 7 فصول:

*نظرية الزمر
أ . د / صفوان محمد عادل عويره
أ . د / محمود عبدالباقي محمد أحمد

*نظرية الزمر
د / معروف عبدالرحمن سمحان
د / فوزي بن أحمد صالح الذكير

*مواضيع في الجبر
اي.ان-هيرستين

*المدخل الى نظرية الزمر
أ.د فالح الدوسري
أ.عبد الحميد بيك

الفصل الثالث

التماثلات الذاتية
Automorphisms

سندرس في هذا الفصل نوعا خاص من التماثلات وهي على قدر كبير من الأهمية.

تعريف (٣-١):

إذا كانت G مجموعة التشاكلات الذاتية و f دالة تماثل بحيث أن:

$$f : G \to G , x \in G$$

نجد أن: $x \to fxf^{-1} : G \to G$.

تسمى التماثلات الذاتية على الزمرة G ويرمز لها بالرمز $Aut(G)$.

نظرية (٣-١):

إذا كانت G زمرة فإن $(Aut\ (G),o)$ زمرة جزئية من (S_G ,o) حيث S_G هي زمرة التبديلات على G.

مثال (٣-١):

لتكن $G = \langle a,b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ أوجدي $Aut(G)$.

الحل:

نجد أن:

$$
\begin{aligned}
I : G &\to G \\
: 1 &\to 1 \\
: a &\to a \\
: b &\to b \\
: ab &\to ab
\end{aligned}
$$

$$
f_0 : \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a & b & ab \end{pmatrix}, f_1 : \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a & ab & b \end{pmatrix}
$$

$$
f_2 : \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & ab & b & a \end{pmatrix}, f_3 : \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & b & a & ab \end{pmatrix}
$$

$$
f_4 : \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & ab & a & b \end{pmatrix}, f_5 : \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & b & ab & a \end{pmatrix}
$$

وعليه فإن: $Aut(G) = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$.

نظرية (٣-٢):

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$ إذا كان $f_a : G \to G$ هو التطبيق بالقاعدة المعروفة $f_a = axa^{-1}$ ولكل $a \in G$ فإن:

١) $f_a \in Aut(G)$

٢) $f_a \circ f_b = f_{ab}, \ \forall a, b \in G$

٣) $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$

٤) $\varphi \circ f_a \circ \varphi^{-1} = f_{\varphi(a)}, \forall \varphi \in G$

تعريف(٣-٢):

لتكن G زمرة $a \in G$ يقال عن التماثل $f_a : G \to G$ أنه تماثل ذاتي داخلي
(Inner- Automorphisms) إذا كان $f_a = axa^{-1}$ لكل $a \in G$
ويرمز له بالرمز $Inn(G)$.

نتيجة(٣-١):

$Inn(G) \lhd Aut(G)$ لكل زمرة G.

نتيجة(٣-٢):

إذا كانت G زمرة وكانت $H \le G$ فإن: $C(H)/N(H)$
تماثل زمرة جزئية من $Aut(H)$ حيث
$N(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$
هو منظم H في G و $C(H) = \{x \in G : xhx^{-1} = h, h \in H\}$ هو ممركز
H في C.

نتيجة(٣-٣):

إذا كانت G زمرة فإن: $G/Z(G) \equiv Inn(G)$.

نتيجة(٣-٤):

$|Inn(G)| = 1$ إذا و إذا فقط كانت G زمرة إبدالية.

مثال (٣-٢):

أثبت أن $Aut(S_3) \cong S_3$

الحل:

باستخدام النتيجة (٣-٧) نجد أن $G/Z(G) \cong Inn(G)$ أي أن :
$S_3/Z(S_3) \cong Inn(S_3)$ نعلم أن: $Z(S_3) = \{(1)\}$ وعليه فان
$S_3 \cong Inn(S_3)$
نعلم أن: $Inn(G) \leq Aut(G)$ و الآن: $S_3 = \langle a,b \rangle$ حيث
$a = (12), b = (123)$ ويتحدد عليه مايلي لكل $f \in Aut(S_3)$ نجد أن:
$f_{(12)} = \{(12),(13),(23)\}, f_{(123)} = \{(123),(132)\}$ نجد أن تحتوي
على ٣ عناصر من الرتبة الثانية و ٢ من الرتبة الثالثة وعلى نجد
أن $|Aut(S_3)| = 6$ ونعلم أن $|S_3| = 6$ وعليه نحصل $S_3 \cong Aut(S_3)$.

مثال(٣-٣):

أثبت مايلي $Inn(D_6) \cong D_3$.

الحل:

نلاحظ أن
$D_6 = \langle a,b \rangle$ حيث $O(b) = 2$, $O(a) = 6$, $Z(D_6) = \{e, a^3\}$ وعليه
$|Inn(D_6)| = |D_6/Z(D_6)| = 6$ وعليه توجد وزمرتان من الرتبة
السادسة أما $Inn(D_6) \cong Z_6$ أو $Inn(D_6) \cong D_3$.
أو لا $Inn(D_6) \cong Z_6$ فإن: $Inn(D_6)$ دائرية وعليه فهي إبدالية وهذا
تناقض إذن $Inn(D_6) \cong D_3$.

نظرية (٣-٣):

لتكن $G=\langle a\rangle$ زمرة دائرية فإن:

١) إذا كانت $|G|=\infty$ فإن: $|Aut(G)|=2$.

٢) إذا كانت $|G|=n$ فإن: $Aut(G)\cong G_n$ حيث

$G_n=(\{m\in z\ |1\le m\le n,(m,n)=1\},\otimes)$

حيث $\otimes$ عملية الضرب بمقياس n، $|G_n|=\phi(n)$.

مثال (٣-٤):

لتكن G زمرة منتهية وليكن $\varphi\in Aut(G)$ حيث $\varphi(a)=a$ إذا وإذا فقط كان $a=e$ لكل $a\in G$.

١) اثبت أن لكل $g\in G$ يوجد $a\in G$ بحيث يكون $g=a^{-1}\varphi(a)$.

٢) إذا كان $\varphi^2=1$ فاثبتي أن G أبدالية.

الحل:

١) لنفرض أن $G=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ وان

$H=\{a_1^{-1}\varphi(a_1),a_2^{-1}\varphi(a_2),\dots,a_n^{-1}\varphi\}$

عندئذ $H\le G$ سنبرهن الآن أن جميع العناصر H مختلفة لاحظ أن:

$a^{-1}{}_i\,\varphi(a_i)=a_i^{-1}(a_j)\leftrightarrow\varphi(a_ia^{-1})=a_ia_j^{-1}\leftrightarrow a_ia_j^{-1}=e\leftrightarrow a_i=a_j$

وبما أن $|H|=|G|$ فان $H=G$ وبالتالي إذا كان $g\in G$ أي يوجد $a\in G$ حيث $g=a^{-1}\varphi(a)$.

٢) سنثبت أولا أن $\varphi(g)=g^{-1}$ لكل $g\in G$ باستخدام فقره(أ) يوجد $a\in G$ حيث $g=a^{-1}\varphi(a)$.

عندئذ:

$$(g = I(g) = \varphi^2\left(a^{-1}\varphi(a)\right) = \varphi(\varphi\left(a^{-1}\right)\varphi^2(a) = \varphi(\varphi(a^{-1}a) = \varphi\left(g^{-1}\right)\varphi(g) = g^{-1}$$

لنفرض الآن $a,b \in G$

عندئذ $(ab)^{-1} = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$ وبالتالي

$.ab = ba$

تعريف (٣-٣):

الزمرة الجزئية المميزة (Characteristic Subgroup).

لتكن $H \leq G$ نقول أن H مجموعة جزئيه مميزة إذا
تحقق $f(H) = H$ بحيث $f \in Aut(G)$ ويرمز لها بالرمز $H \ char\ G$.

ملاحظة:

١) إذا $Z(G)$ مجموعة جزئية مميزة لأن:
$zg = gz \Rightarrow g \in G \Rightarrow f(z)f(g) = f(g)f(z)$

٢)إذا كانت H مجموعة جزئية وحيدة من Gمن الرتبة n أن تكون مميزة وكذلك $f(H) = H$ من الرتبة n تكون مجموعة جزئية مميزة.

مثال: (٣-٥):

أثبت أن H مميزة إذا وإذا فقط كانت $f(H) = H$
لكل $f \in Aut(G)$
لنفترض أن $H \leq G$ مميزة عندئذ $f(H) \leq H$ لكل $f \in Aut(G)$.

الحل:

بما أن: $f^{-1}Aut(G)$ فإن $f^{-1}(H)\le H$: وعليه فإن:
$H=f\left(f^{-1}(H)\le f(H)\right)$ وبالتالي فإن: $f(H)=H$.

أما برهان العكس
$f(H)=H\ ,\forall f\in Aut(G)$
$f(H)=xHx^{-1}=H,\forall x\in G$ ، وعليه فان: $H\subseteq G$.
$H,\forall f_x\in In(G)$

مثال (٣-٦):

لتكن $H\le G$ نقول أن H زمرة جزئية لا متغيرة تماماً (Fully invariant) إذا كان $f(H)\subseteq H$ فإن كان H لا متغيرة تماماً فأثبت أن H مميزة.

الحل:

لنفرض أن H لا متغيرة تماماً ولنفرض أن $f\in Aut(G)$.بما أن f تشاكل ذاتي وأن H لامتغيرة تماماً فإننا نلخص إلى $f(H)\le H$ وبالتالي H مميزة $f(H)\subseteq H$.

مثال (٣-٧):

إذا كانت H مميزة فأثبت أن $H\rhd G$ أعط مثال يبين العكس غير صحيح.

الحل :

لنفترض أن $H \leq G$ مميزة ولنفترض أن $g \in G$ عندئذ $f_g \in Aut(G)$

ومنه فإن:

$f_g(H) \subseteq H$ أي أن $gHg^{-1} \subseteq H$ وبالتالي فإن: $H \rhd G$.

ولإثبات العكس غير صحيح،

أعتبر $G = V$

$H = \{e, a\}$ من الواضح أن $H \rhd G$ ليكن $\phi : G \to G$ التطابق

المعرف على النحو التالي:

$\phi(e) = e$ ، $\phi(a) = b$ ، $\phi(b) = c$ ، $\phi(c) = a$

من الواضح $\phi \in Aut(G)$ ولكن $\phi(H) = \{e, b\} \not\subset H$.

تمارين محلولة

(١) أثبت أن $Inn(D_4) \cong Inn(Q_8)$.

الحل:

ندرس كلا على حدا

أولاً

$D_4 = \langle a,b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$:

ولتكن $f_x : G \to G, x \in G$ بحيث أن:

$$f_x(y) = xyx^{-1}, \forall y \in G$$

نجد أن

$$f_a(y) = aya^{-1}$$
$$f_b(y) = byb^{-1}$$
$$f_{ab}(y) = abyb^{-1}a^{-1}.$$
$$Inn(D_4) = \{f_\circ, f_a, f_b, f_{ab}\}$$

ومن النتيجة(٣-٧)

$$Inn(D_4) \cong D_4 / Z(D_4)$$

نعلم أن

$$Z(D_4) = \langle 1, a^2 \rangle$$

نجد أن $Inn(D_4)$ من الرتبة الرابعة توجد زمرتان من الرتبة نفسها أما V_4 أو Z_4.

إذا كانت $Inn(D_4) \cong Z_4$ فإن:

$Inn(D_4)$ دائرية

ومنه $D_4/Z(D_4)$ دائرية ومنه D_4 أبدالية وهذا تناقض

إذن $Inn(D_4) \cong V_4$.

سندرس الآن

$$Q_8 = \langle a,b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, aba = b \rangle$$

ومن النتيجة(٣-٧):

$$Inn(Q_8) \cong Q_8/Z(Q_8)$$

وحيث أن

$Z(Q_8) = \{1, a^2\}$ ،

$$|Inn(Q_8)| = |Q_8/Z(Q_8)| = 4$$

إذن توجد زمرتان من نفس الرتبة V_4 أو Z_4.

إذا كانت $Inn(Q_8) \cong Z_4$ فإن:

$Inn(Q_8)$ دائرية

ومنه $Q_8/Z(Q_8)$ دائرية

ومنه Q_8 إبدالية وهذا تناقض .

ومنه

$$Inn(Q_8) \cong V_4 .$$

إذن

$$Inn(Q_8) \cong Inn(D_4) .$$

(٢) أثبت أن $Aut(Z_2 \times Z_2) \cong S_3$.

الحل:

نجد أن

$$Aut(Z_2 \times Z_2) = \{f_\circ, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$

حيث :

$$\begin{aligned} f_0 : (0,0) &\to (0,0) \\ (0,1) &\to (0,1) \\ (1,0) &\to (1,0) \\ (1,1) &\to (1,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 : (0,0) &\to (0,0) \\ (0,1) &\to (0,1) \\ (1,0) &\to (1,1) \\ (1,1) &\to (1,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : (0,0) &\to (0,0) \\ (0,1) &\to (1,1) \\ (1,0) &\to (1,0) \\ (1,1) &\to (0,1) \end{aligned}$$

$$f_3 : (0,0) \to (0,0)$$
$$(0,1) \to (1,0)$$
$$(1,0) \to (0,1)$$
$$(1,1) \to (1,1)$$

$$f_4 : (0,0) \to (0,0)$$
$$(0,1) \to (1,0)$$
$$(1,0) \to (1,1)$$
$$(1,1) \to (0,1)$$

$$f_5 : (0,0) \to (0,0)$$
$$(0,1) \to (1,1)$$
$$(1,0) \to (0,1)$$
$$(1,1) \to (1,0)$$

ومنه نجد أن

$$|Aut(Z_2 \times Z_2)| = 6$$

توجد زمرتان من الرتبة السادسة أما Z_6 أو S_3
نجد أن رتب العناصر لزمرة
$Aut(Z_2 \times Z_2)$
أما من الرتبة 2 أو 3 إذن
$Aut(Z_2 \times Z_2) \cong S_3$.

(٣)بين أيا من العبارات الآتية صائبة أو خاطئة:

أ) إذا كانت $Aut(G) \cong Aut(H)$ فان: $G \cong H$.

ب)إذا كانت $|G| \geq 2$ وكانت G غير إبدالية فان من الممكن أن تكون $Aut(G) = \{e\}$.

ج) إذا كانت G زمرة إبدالية تحتوي على عنصر رتبته لا تساوي2 فإن: $Aut(G) \neq \{e\}$.

د) إذا كانت $H \triangleleft S_3$ فأن H مميزة في S_3.

ه) $Aut(Z_8) \cong Z_2 \times Z_2$.

و) $Aut(Z_{105}) \cong Z_2 \times Z_4 \times Z_6$.

الحل:

أ)العبارة خاطئة.
نوضح ذلك بالمثال التالي:
لتكن

$$G = (Z_3, \oplus), H = (Z_4, \oplus)$$

و $\phi(4) = \{1,3\}, \phi(3) = \{1,2\}$

حيث

$$Aut(G)=\{f_1,f_3\}$$ ،

$$f_1(a)=a$$ ،

$$f_3(a)=a^3$$ ،

$$Aut(H)=\{f_1,f_2\}$$ ،

$$f_1(a)=a$$ ،

$$f_2(a)=a^2$$

ومنه

$$|Aut(G)|=|Aut(H)|$$

توجد زمرة وحيدة من الرتبة 2 إذن

$$Aut(G)\cong Aut(H)\cong Z_2$$

بينما G لا تماثل H.

ب) العبارة خاطئة

لأن:

$$G=Aut(D_4)$$

زمرة ليست إبدالية ولكن

$$Aut(D_4)\neq\{e\}.$$

ج) العبارة صحيحة

لتكن G زمرة إبدالية تحتوي على عنصر

وليكن a لا تساوي رتبته 2 أي أن $|a|\geq 3$

وهذا يؤدي إلى أن $|G|\geq 3$ وحيث G إبدالية فإن:

$$Z(G)=G$$

ومن نتيجة (٤-٧) نجد أن

$$|Inn(G)| = 1$$

ومنه

$$|Inn(G)| \leq |Aut(G)|$$

وهنا احتمالان:

إذا كانت $|Aut(G)| = 1$

هذا يؤدي إلى أن

$$|G| = 1$$

وهذا يناقض الفرض إذن

$$|Aut(G)| > 1$$

أي أن

$$Aut(G) \neq \{e\}.$$

د)

نعلم أن $S_3 \lhd A_3$

لتكن $\phi : G \to G$

و $A_3 = \{(1),(123),(132)\}$

نجد أن

$$\phi(1) = 1 \text{،}$$

$$\phi(123) = (123) \text{،}$$

$$\phi(132) = (132)$$

أي أن

$$\phi(A_3) = A_3.$$

ه)العبارة صحيحة

من نظريه الزمر الدائرية لتماثلات الذاتية نجد أن

$$Aut(Z_8) = G_8$$

$$\phi(8) = \{1,3,5,7\}$$

$$Aut(Z_8) = \{f_1, f_3, f_5, f_7\}$$

حيث أن

$$f_1(a) = a ،$$

$$f_3(a) = a^3 ،$$

$$f_5(a) = a^5 ،$$

$$f_7(a) = a^7$$

نجد أن رتبته كلا منها ماعدا المحايد تساوي 2

و بالتالي تتماثل مع V_4 أو Z_4.

لكن V_4 ليست دائرية

ونعلم أن

$$Z_4 \cong Z_2 \times Z_2$$

وعليه

$$Aut(Z_8) \cong Z_2 \times Z_2 .$$

ز)العبارة صحيحة

من نظريه الزمر الدائرية لتماثلات الذاتية نجد أن

$$Aut(Z_{105}) = G_{105}$$

حيث

$$|G_{105}| = \phi(105) = 48$$

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

ومنه :

$$\phi(105) = 105(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7}) = 48$$

نوجد الأعداد الاولية مع 105 أن

$$\phi(105) = \{1,2,4,8,11,13,16,17,19,22,23,26,29,31,34,$$
$$37,38,41,44,46,47,52,53,58,59,61,62,64,$$
$$67,68,71,73,74,76,79,82,83,86,88,89,92,$$
$$94,97,101,103,104\}$$

نجد أن رتب العناصر أما 2,3,4,6,12
أي ليست دائرية ونجد أن

$$Z_2 \times Z_4 \times Z_6$$

ليست دائرية لأن

$$(2,4) = (4,6) = (2,6) = 2$$

وأيضا $|Z_2 \times Z_4 \times Z_6| = 48$

ومنه $Aut(Z_{105}) \cong Z_2 \times Z_4 \times Z_6$.