هذه المجموعة من الدروس في نظرية الزمر من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com

سأقدم لكم بإذن الله شرح كامل ووافي لـ 7 فصول في الزمره في مواضيع منفصلة هي عبارة عن بحث التخرج لصديقاتي المقربات وقد أحببن أن يستفيد الجميع من هذا البحث لأنهم بذلوا مجهود كبير فيه فأرجوا منكم الدعاء لهم جميعا بالتوفيق بالدنيا والآخرة

المراجع المستخدمة في 7 فصول:

*نظرية الزمر

أ . د / صفوان محمد عادل عويره

أ . د / محمود عبدالباقي محمد أحمد

*نظرية الزمر

د / معروف عبدالرحمن سمحان

د / فوزي بن أحمد صالح الذكير

*مواضيع في الجبر

اي.ان-هيرستين

*المدخل الى نظرية الزمر

أ.د فالح الدوسري

أ.عبد الحميد بيك

الفصل الأول

تعاريف ونظريات أساسية

سندرس في هذا الفصل مفهوم الزمرة وخواصها الأساسية.

تعريف (١-١):الزمرة (Group)

يقال عن $(G,*)$ إنها زمرة حيث G مجموعة غير خالية إذا تحقق:

١) $*$عملية ثنائية على G.

$$a*b \in G, \forall a,b \in G$$

٢) $*$عملية تجميعية على G.

$$(a*b)*c = a*(b*c), \forall a,b,c \in G$$

٣) يوجد عنصر محايد $e \in G$ بحيث أن:

$$e*a = a*e, \forall a \in G$$

٤) لكل $a \in G$ يوجد $a^{-1} \in G$ معكوس بحيث أن:

$$a*a^{-1} = a^{-1}*a, \forall a \in G$$

حيث e العنصر المحايد.

نظرية(١-١):

إذا كانت$(G,*)$ زمرة فإن:

١) العنصر المحايد يكون وحيد.

٢) لكل عنصر $a \in G$ معكوس وحيد.

مثال (١-١):

نفرض أن:

$$A = \{a,b\}$$

$$P(A) = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}\}$$

فإن $(P(A),U)$: ليست زمرة.

U	ϕ	{a}	{b}	A
ϕ	ϕ	{a}	{b}	A
{a }	{a }	{a}	A	A
{b}	{b}	A	{b}	A
A	A	A	A	A

مثال (١-٢):

لتكن $V=\{e,a,b,c\}$.

$*$	e	a	B	C
E	e	a	B	C
a	a	e	C	B
b	b	c	E	A
c	c	b	A	E

نجد أن $(V,*)$ زمرة.

تعريف (١-٢):الزمرة الإبدالية (Abelian Group).

إذا كانت $(G,*)$زمرة تحقق:

$$a*b=b*a\ ,\forall a,b\in G$$

فيقال عن G إنها زمرة إبدالية.

مثال(١-٣):

١) Z,R,Q,C مع الجمع العادي زمرة إبدالية وكذلك R^*,Q^*,C^* مع عمليه الضرب العادي .

٢) $(Z^*,.)$ ليست زمرة لان لا يوجد لكل عنصر معكوس عدا العنصرين 1و-1

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \notin Z^*$$

وعلى سبيل المثال $2 \in Z^*$ ولكن $\frac{1}{2} \notin Z^*$.

نظرية (١-٢): قانون الحذ ف (الاختصار) (Cancellation low).

إذا كانت $(G,*)$ زمرة فإنه :

$$a*b = a*c \Rightarrow b = c \quad \forall a,b,c \in G$$

$$b*a = c*a \Rightarrow b = c$$

نظرية (١-٣):

إذا كانت $(G,*)$ زمرة فإنه لكل $a,b \in G$ لدينا :

١) $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

٢) $(ab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$

٣) زمره G إبدالية إذا وإذا فقط كان $(ab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$

٤) يوجد حل وحيد لكل من المعادلتين :

$ax = b, \ ya = b$ في الزمرة G.

- إذا كان $a \in G, n \in Z$ فإن $a^n \in G$ حيث :

$$a^n = \begin{cases} a.a..a, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ a^{-1}.a^{-1}..a^{-1}, & n < 0 \end{cases}$$

نظرية (١-٤):

إذا كانت $a,b \in G$ وكانت $m,n \in Z^+$ فإن :

١) $a^m a^n = a^{m+n}$

٢) $(a^n)^{-1} = a^{-n}$

٣) $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$

٤) كانت G إبدالية فإن $(ab)^n = a^n b^n$

مثال (١-٤) :

إذا كانت G زمرة حيث $a^2=e$ لكل $a \in G$ فأثبت ان G زمره إبدالية .

الحل :

نلاحظ أن $a^2 = e \rightarrow a = a^{-1}$

نفرض ان $a, b \in G$

$(ab)^2 = e \rightarrow abab = e$

بضرب العلاقة في $b^{-1}a^{-1}$ من اليمين نحصل على

$\rightarrow ab = b^{-1}a^{-1} = ba$

مثال (١-٥) :

إذاكانت G زمرة وكانت $a, b \in G$ حيث

$a^{-1}b^2a = b^3 \ , a^2 = e$

فأثبت أن $b^5= e$.

الحل :

$\because a^2 = e \rightarrow a = a^{-1}$

$a^{-1}b^2a = b^3 \rightarrow b^2a = ab^3 \rightarrow a = b^{-2}ab^3$

$e = a^2 = b^{-2}ab^3b^{-2}ab^3 = b^{-2}abab^3 \rightarrow b^2 = abab^3$

$b^2 = abab^3 \rightarrow e = abab \rightarrow a^{-1} = bab \rightarrow a = bab$

$b^3 = a^{-1}b^2a = abba \rightarrow b^4 = babba \rightarrow b^5 = babbab = aa = a^2 = e$

تعريف (١-٣) :

يقال عن $(G,*)$ زمرة أنها منتهية (finite) إذاوإذا فقط كانت المجموعة G منتهية.
وإذا كانت G مجموعة غير منتهية فيقال عن الزمرة G أنهاغير منتهية (in finite)، وترمز
لعدد عناصر الزمرةG بالرمز|G| وتسمى برتبة الزمرةG (order of G).

مثال (١-٦) :

$(S_n,\circ)$حيثS_n هي مجموعة التبديلات على {1,2…,n}
و∘هي عملية تحصيل التبديلات زمرة غير إبدالية لكل $n \geq 2$ وتسمى زمرة التبديلات ورتبتها n!.
لنأخذ $(S_3, \circ)$ على سبيل المثال :

$$S_3 = \{(1),(1\quad 2\quad 3),(1\quad 3\quad 2),(2\quad 3),(1\quad 3),(1\quad 2)\}$$

زمرة غير إبدالية منتهية ورتبتها 6=3!.

مثال (١-٧) :

لتكن $V = \{e, a, b, c\}$

.	E	a	B	C
e	E	a	B	C
a	A	e	C	B
b	B	c	E	A
c	C	b	A	E

من جدول كيلي نجد ان (V,.) زمرة إبدالية ورتبتها 4.

مثال (١-٨) :

جميع الزمر في مثال (١-٢)(١)زمرة إبدالية غير منتهية.

نظرية (١-٥) :

إذا كانت G زمرة ليست إبدالية فإن $|G| \geq 6$
كمثال على ذلك الزمرة $(S_3, \circ)$.

تعريف (١-٤) :

لتكن $(G,*)$ زمرة $a \in G$، نقول ان رتبة (order)العنصر a هي n اذا كان n
هو اصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^n=e$ ، e العنصر المحايد في الزمرة G
ونقول ان العنصر a ذو رتبة لانهائية (in finite order) إذا لم يوجد عدد صحيح
موجب n يحقق $a^n=e$ ويرمز عادة لرتبة العنصر a بالرمز $|a|$ أو $O(a)$.

مثال (١-٩) :

لتكن$G= (Z_4, \oplus)$ بماأن
$Z_4=\{0,1,2,3\}$، $|Z_4|=4$
0هو محايد الزمره G

$0^1=0$

إذن $|0|=1$

$1^1=1$
$1^2=1\oplus1=2$
$1^3=1\oplus1\oplus1=3$
$1^4=1\oplus1\oplus1\oplus1=0$

إذن $|1|=4$

$2^1=2$
$2^2=2\oplus2=0$

إذن $|2|=2$

$3^1=1$
$3^2=3\oplus3=2$
$3^3=3\oplus3\oplus3=1$
$3^4=3\oplus3\oplus3\oplus3=0$

إذن $|3|=4$

نظرية (١-٦):

إذا كانت G زمرة منتهية فإن رتبة كل عنصر فيها منتهية أيضا .

ملاحظات:

١) العنصر الوحيد في $(G,*)$ الذي رتبته تساوي الواحد هو العنصر المحايد.
٢) عكس نظريه (١-٦) غير صحيح أي انه إذا كانت رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة G
منتهية فليس من الضروري ان تكون G زمرة منتهية ،وكمثال على ذلك:
إذا كانت X مجموعة غير منتهية وكانت $G=(P(X),+)$ حيث
$$A+B=(A\cup B)-(A\cap B)$$
من الواضح ان G زمرة لانهائية ولكن لكل $A\in G$ نجد أن $A+A=\phi$ وعليه فإن $|\mathbf{A}|=2$.

نظرية (١-٧):

لتكن G زمرة $a\in G$ حيث ان $|a|=n$ عندئذ:
١) $|a|=|a^{-1}|$
٢) إذا كان $a^m=e$ حيث $m\in Z^+$ فأن $n|m$.
٣) إذا كان $t\in Z^+$ حيث $(t,n)=d$ فأن $|a^t|=n/d$

نتيجة (١-١):

إذا كان $a \in G$ حيث $|a| = n$ فأن $|a^t| = n$ إذا و إذا فقط كان $(t,n) = 1$.

تعريف (١-٥):(الزمرة الجزئية Sup groups):

لتكن $(G,*)$ زمرة ولتكن $H \leq G \neq \phi$ يقال عن H أنها زمرة جزئية من G إذا كانت $(H,*)$ زمرة ويرمز لها بالرمز $H \leq G$.

ملاحظات:

١) اذ كانت $H \leq G$ وكانت $H \neq G$ تسمى H زمرة جزئية فعلية .
٢) اذ كانت $H \leq G$ و $K \leq H$ فإن $K \leq G$
٣) لكل زمرة $(G,*)$ زمرتان جزئيتان على الأقل هما $(G,*)$ و $(\{e\},*)$ تسمى الأخيرة منها زمرة جزئية واضحة (Trivial Subgroup).

مثال(١-١٠):

من الواضح ان $(2Z,+) \leq (Z,+) \leq (Q,+) \leq (R,+) \leq (C,+)$ $(Q^*,.) \leq (R^*,.) \leq (C^*,.)$.

نظرية (١-٨):

اذا كانت $(G,*)$ زمرة وكانت $H \subseteq G \neq \phi$ فإن $H \leq G$ إذا وإذا فقط كان

$$\forall a, b \in H : ab^{-1} \in H$$

نتيجة (١-٢):

اذا كانت G زمرة وكانت H مجموعة جزئية منتهية غير خالية من G فإن:

$H \leq G$ إذا وإذا فقط

$$\forall a,b \in H, \quad ab \in H$$

مثال(١-١١):

١) إذا كانت $G=R^{*} \times R$ حيث $(a,b)(c,d)=(ac,bc+d)$ فأن:
$H=\{(a,0):a>0\}$ زمرة جزئية من G لأن
$$(a,0),(c,0) \in H \;, H \subseteq G \neq \phi$$
فإن:
$$(a,0)(c,0)^{-1}=(a,0)(\frac{1}{c},0)=(\frac{a}{c},0) \in H$$

أما المجموعة $K=\{(a,3a^{3}):a \neq 0\}$ ليست زمرة جزئية من G لأن العنصر محايد $(1,0)$ لاينتمي الى K .

٢) المجموعه الجزئيه $H=\{2^{n}:n \in Z\}$ زمرة جزئية من $(Q^{*},.)$ لان
$H \subseteq Q^{*} \neq \phi$
فإن $x=2^{n}, y=2^{m} \in H$
$$xy^{-1}=2^{n}2^{-m}=2^{n-m} \in H : n-m \in Z$$

٢) لتكن $(\{-1,1\},\bullet)$ زمرة عندئذ فأن $(\{1\},\bullet) \leq (\{-1,1\},\bullet)$ حيث • الضرب العادي .

٣) إذا كانت $V=\{e,a,b,c\}$ نجد كلا من $\{e,a\}$ و $\{e,b\}$ و $\{e,c\}$ زمرة جزئية من V لكن $\{e,b,c\}$ ليست كذلك.

٤) إذا كانت مجموعة A_n مجموعة التبديلات الزوجية من S_n بحيث أن $n \geq 2$ فإن $A_n \leq S_n$.

نظرية (١-٩):

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئيه من الزمرة $(G,*)$ فإن :

١) اذ كانت e, e' هما العنصران المحايدان في G و H على الترتيب فإن $e = e'$.

٢) معكوس العنصر a في الزمرة الجزئية H هو نفسه معكوس العنصر a في الزمرة G .

نظرية (١-١٠):

$(G, *)$ زمرة ما $H \subseteq G \neq \phi$ فإن: $H \le G$ إذا وإذا فقط كانت

$$\forall a, b \in H, \quad a^{-1} \in H \ , a * b \in H$$

نظرية (١-١١):

إذا كانت $H_i \le G$ لكل i فإن : $\bigcap_i H_i \le G$.

ملاحظات:

إذا كانت G زمرة وكانت A وB زمرتان جزئيتان من G فان $A \cup B$ قد لايكون زمرة جزئية من G على سبيل المثال :

(١) لتكن $(G, .)$ زمرة ابدالية

$$H_1 = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H_2 = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

كلا من H_1, H_2 زمرة جزئية من $(G, .)$.

لكن $H_1 \cup H_2 = \{I, A, B\}$ ليست زمرة جزئية من $(G, .)$ لأن

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin H_1 \cup H_2$$

(٢) $A=(2Z,+), G=(Z,+), B=(3Z,+)$ فإن كلا من A,B زمرة جزئية من G لكن $A\cup B$ ليست زمرة جزئية من G لان $2,3\in A\cup B$ لكن $2+3=5\notin A\cup B$.

نظرية (١-١١):

لتكن H_1,H_2 زمرتان جزئيتان من الزمرة $(G,*)$ عندئذ فأن $H_1\cup H_2$ زمرة جزئية من الزمرة G إذا وإذا فقط كان $H_1\subseteq H_2$ او $H_2\subseteq H_1$.

نتيجة (١-٣):

أي زمرة لا يمكن ان تكون كإتحاد لزمرتين جزئيتين فعليتين منها.

مثال (١-١٢):

لتكن الزمرة $(R^*,.)$ ولتكن المجموعتان

$$H=\{x\in R^*: x=1 \vee x\in \overline{Q}\}$$
$$K=\{x\in R^*: x\geq 1\}$$

حيث $\overline{Q}$ مجموعة الأعداد غير النسبية.

هل $(H,.)$ و $(K,.)$ زمرتين جزئيتين من الزمرة $(R^*,.)$.

الحل:

$(H,.)$ ليست زمرة جزئية من الزمرة $(R^*,.)$ لانه على سبيل المثال $\sqrt{2}\in H$ لكن $\sqrt{2}.\sqrt{2}=2\notin H$ وكذلك $(K,.)$ ليست زمرة جزئية من $(R^*,.)$ لانه على سبيل المثال $2\in k$ لكن $2^{-1}=\frac{1}{2}\notin k$.

تعريف (١-٦): مركز الزمرة (Center of a Group).

لتكن $(G,*)$ زمرة يعرف مركز الزمرة G بأنه المجموعة

$$z(G)=\{x\in G: xa=ax, \forall a\in G\}$$

مثال (١-١٣):

١) إذا كانت $G = (S_3, \circ)$ فإن:

$$z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} = \{(1)\}$$

٢) إذا كانت $G = GL(2,R)$ زمرة المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية فإن

٣) $z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \neq 0, a \in R \right\}$

نظرية (١-١٢):

لتكن $(G,*)$ زمرة فإن $Z(G)$ زمرة جزئية إبدالية من $(G,*)$.

نظرية (١-١٣):

لتكن $(G,*)$ زمرة فإن $Z(G) = G$ إذا و إذا فقط كانت G إبدالية.

تعريف (١-٧):

الزمرة الجزئية المولدة للمجموعة Subgroup Generated by – S **.**(S)

لتكن G زمرة و $S \subseteq G$ تعرف الزمرة الجزئية المولدة بـ S ويرمز لها بالرمز $\langle S \rangle$ على أنها: $\langle S \rangle = \bigcap_{r \in \Gamma} \{H_r : S \subseteq H_r \leq G\}$ أي إن $\langle S \rangle$ هي الزمرة الجزئية التي نحصل عليها من تقاطع جميع الزمر الجزئية من G التي تحتوي على S.

ملاحظات:

١) إذا كانت $G=\langle S\rangle$ فنقول إن المجموعة S تولد G (أو إن G مولدة بالمجموعة S).
٢) اذا كانت $S=\phi$ أو كانت $S=\{e\}$ فإنه $\langle S\rangle=\{e\}$.
٣) اذا كانت G زمرة فإن $G=\langle G\rangle$.
٤) اذا كانت $G=\langle S\rangle$ وكانت S منتهية فنقول أن G منتهية التوليد (Finitely Generated).

نظرية (١-١٤):

اذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G فإن $H=\langle S\rangle$ حيث $H=\{a_1^{e_1}a_2^{e_2}\dots a_n^{e_n}:a_i\in S, e_i=\pm 1, 1\le i\le n, n\in\mathbb{Z}^+\}$.

مثال (١-١٤):

١) زمرة الرباعيات (Quaternion Group) على انها الزمرة Q_8 المولدة بالعنصرين a,b حيث $ba=a^3b=a^{-1}b$، $a^2=b^2$

$$Q_8=\langle a,b \mid a^4=1, a^2=b^2, aba=b\rangle=\{1,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$$

$|a|=|b|=4$ زمرة غير إبدالية رتبتها 8.

٢) الزمرة الزوجية (Dihedral Group) تكون من الدرجة $n\ge 3$ يرمز لها بالرمز D_n وهي زمرة غير ابدالية مولدة بالعنصرين a,bحيث $|a|=n, |b|=2$ وتحقق العلاقة $ba=a^{-1}b$ و $|D_n|=2n$ حيث $n\ge 3$، $D_n=\langle a,b \mid a^n=b^n=(ab)^2=1\rangle$.

تعريف(١-٨): الزمر الجزئية الدائرية (Cyclic Sub groups).
لتكن G زمرة وليكن $a\in G$ تسمى الزمرة الجزئية من G المولدة بالعنصر a زمرة جزئية دائرية ويرمز لها بالرمز $\langle a\rangle$. أي أن $\langle a\rangle=\{a^n:n\in Z\}$.

وتكون الزمرة G زمرة دائرية إذا وجد $a \in G$ بحيث يكون $G = \langle a \rangle$.

مثال(١-١٥):

١) الزمرة $(Z,+)$ زمرة دائرية غير منتهية مولدها 1 (أو العدد -1)
كذلك الزمرة $(Z_n, \oplus)$ دائرية منتهية لان $Z_n = \langle [1] \rangle$.

٢) الزمرة $(G,.)$ حيث $G = \{1,-1,i,-i\}$ و $\sqrt{-1} = i$ هي زمرة دائرية منتهية مولدها i أو $-i$ (معكوس الـ i) وذلك لان:

$$i^1 = i$$
$$i^2 = i.i = -1$$
$$i^3 = i.i.i = -i$$
$$i^4 = i.i.i.i = 1$$

٣) الزمرة $V-gp$ ليست دائرية لأن $a^2 = b^2 = c^2 = e$ لذا فإنه لا يمكن إيجاد عنصر يولد V .

٤) الزمرة $(Q,+)$ ليست دائرية لأنه لو وجد $\frac{a}{b} \in Q$ حيث $Q = \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle$
و حيث $(a,b) = 1$ فإن $\frac{a}{2b} \in Q$ ولذا فان $\frac{a}{2b} = n\frac{a}{b}$ حيث
$0 \neq n \in z$
ومنه فإن $n = \frac{1}{2} \in z$ وهذا مستحيل.

نظرية (١-١٥):

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دائرية فإن G إبدالية.

ملاحظة:
عكس النظرية السابقة غير صحيح دائما أي انه ليس بالضرورة إذا كانت G إبدالية أن تكون G زمرة دائرية مثل $V-gp$.

نظرية (١-١٦):

كل زمرة جزئية من زمرة دائرية تكون دائرية أيضا.

نظرية (١-١٧):

إذا كانت $G=\langle a\rangle$ فان رتبة G تساوي رتبة a.

نظرية (١-١٨):

إذا كانت $G=\langle a\rangle$ زمرة دائرية منتهية رتبتها n فان
$G=\{e,a,a^2,\dots,a^{n-1}\}$.

نظرية (١-١٩):

إذا كانت $G=\langle a\rangle$ زمرة دائرية منتهية رتبتها n :

١) فانه لكل قاسم موجب d للعدد n توجد زمرة جزئية وحيدة من G رتبتها d.

٢) d القاسم المشترك الأعظم للعددين t و n حيث $t\in Z^+$ عندئذ للزمرة الجزئية الدائرية من G المولدة بالعنصر a^t رتبه تساوي $\frac{n}{d}$.

نتيجة (١-٤):

الشرط اللازم والكافي لكي يكون a^t مولدا للزمرة الدائرية المنتهية المولدة بالعنصر a في G التي رتبتها n هو ان يكون العددان صحيحان موجبان t و n واوليان نسبيان في Z^+.

مثال (١-١٦):

عين جميع الزمر الجزئية من $(Z_{18},\oplus)$.

الحل:

١) مولدات Z_{18} بما أن $Z_{18}=\langle 1\rangle$ وان $|Z_{18}|=18$

k [1] مولدا للزمرة $Z_{18} \Leftrightarrow (k,18)=1$ أي أن $k=1,5,7,11,13,17$.

$$Z_{18}=\langle 1\rangle,\langle 5\rangle,\langle 7\rangle,\langle 11\rangle,\langle 13\rangle,\langle 17\rangle$$

٢) نجد الان $\langle 2\rangle$:

$$\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10,12,14,16\}$$

زمرة جزئية من Z_{18} رتبتها ٩ فإن مولداتها

$$\langle 2\rangle=\langle 4\rangle=\langle 8\rangle=\langle 10\rangle=\langle 14\rangle=\langle 16\rangle.$$

٣) عند الزمرة الجزئية $\langle 6\rangle$:

$\langle 6\rangle=\{0,6,12\}$ مولداتها $\langle 6\rangle=\langle 12\rangle$.

٤) نجد الان $\langle 3\rangle$:

$\langle 3\rangle=\{0,3,6,9,12,15\}$ مولداتها $\langle 3\rangle=\langle 15\rangle$.

٥) عند $\langle 9\rangle$:

$\langle 9\rangle=\{0,9\}$.

نظرية (١-٢٠):

لتكن $G=\langle a\rangle$ زمرة دائرية غير منتهية:

١) اذا كانت $\{e\}\neq H\leq G$ فان غير منتهية أيضا.

٢) $a^r=a^t$ إذا وإذا فقط كان $r=t$ لكل $r,t\in Z$.

٣) a و a^{-1} هما المولدان الوحيدان للزمرة G.

تعريف (١-٩): صفوف التجاور (Cosets).

١)إذا كانت $(G,*)$ زمرة ولتكن $H \leq G$ و $a \in G$ تعرف صف تجاوز أيمن (Right Coset) للزمرة الجزئية H التي تحتوي a بأنها $\{ha : h \in H\}$ = Ha.

٢)تعرف صف تجاور ايسر(Left Cost) للزمرة الجزئية H التي تحتوي a بانها $aH = \{ah : h \in H\}$

مثال (١-١٧):

١) إذا كانت $G = (Z,+)$ ، $A = \langle 4 \rangle$ فإن A زمرة جزئية من G ، صفوف التجاور اليمنى للزمرة الجزئية A في G هي:

$$A = \{0, \pm 4, \pm 8, \ldots\} = A + 4$$
$$A + 1 = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$$
$$A + 2 = \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \ldots\}$$
$$A + 3 = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, \ldots\}$$

وصفوف التجاور اليسرى للزمرة الجزئية A في G هي:

$$A = \{0, \pm 4, \pm 8, \ldots\} = 4 + A$$
$$1 + A = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$$
$$2 + A = \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \ldots\}$$
$$3 + A = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, \ldots\}$$

نلاحظ أن $x + A = A + x$ لكل $x \in G$ لان G زمرة إبدالية.

٢) إذا كانت

$$G = D_3 = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$$

$A = \langle x \rangle, B = \langle y \rangle$ كلا من A و B زمر جزئية من G.

صفوف التجاور اليمنى لـ A في G هي:

$$A = A.1 = \{1, x, x^2\} = A.x = A.x^2$$
$$A.y = \{y, xy, x^2y\} = A.xy = A.x^2y$$

صفوف التجاور اليسرى لـ A في G هي:

$$B = B.1 = \{1, y\} = B.y$$
$$B.x = \{x, x^2y\} = B.x^2y$$
$$B.x^2 = \{x^2, xy\} = B.xy$$

صفوف التجاوز اليسرى لـ B في G هي:

$$B = 1.B = \{1, y\} = y.B$$
$$x.B = \{x, xy\} = xy.B$$
$$x^2.B = \{x^2, x^2y\} = x^2y.B$$

نلاحظ ان $Ab = bA$ لكل $b \in G$ بينما $Bb \neq bB$ لكل من $b \in G$ لان $Bx \neq xB$

ملاحظات:

١) نلاحظ ان $eH = H = He$ لكل $H \leq G$.
٢) نلاحظ ان لكل $a \in G$ يكون $a = ae \in aH$ و $a = ae \in Ha$.
٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فانه من الواضح أن $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

نظرية (١-٢١):

إذا كانت G زمرة، $H \leq G$ فان:

١) $H = Ha \Leftrightarrow a \in H$
٢) $aH = bH \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ أو $(b^{-1}a \in H)$ لكل $a, b \in G$.
٣) $aH = bH$ او $aH \cap bH = \phi$ لكل $a, b \in G$ يعني هذا ان كل صفي تجاوز ايسر لـ H في G أما ان يتطابقا او ان يكون ناتج تقاطعهما المجموعة الخالية.
٤) عدد صفوف التجاوز اليمنى لـ H في G يساوي عدد صفوف التجاوز اليسرى لـ H في G أي ان $|H| = |aH| = |Ha|$

٥) اذا كانت $(H,*)$ منتهية وكانت $|H|=m$ عندها كل صف تجاوز ايسر لـ H في G يتألف من m عنصرا.

تعريف (١-١٠): دليل زمرة جزئية (Index of Subgroup).

إذا كانت $H \le G$ فاننا نسمي عدد صفوف التجاوز اليمنى أو اليسرى لـ H في G انه دليل H في G ونرمز لهذا العدد بالرمز $[G:H]$.

مثال (١-١٨):

في المثال (١-١٧) نجد أن:
١) $[G:A]=4$.
٢) $[G,B]=3$, $[G:A]=2$.

مثال (١-١٩):

إذا كانت $G=Z$ وكانت $H=3Z$ نجد ان صفوف التجاوز اليسرى لـ H في G هي:

$$H=3Z \ ,1+H=1+3Z\ ,\ 2+H=2+3Z$$

$[Z:3Z]=3$.

وبصورة عامة صفوف التجاوز اليسرى (اليمنى) للزمرة nZ حيث $n \in Z^{+}$ هي:

$$1+nZ\ ,2+nZ\ ,\ldots,(n-1)+nZ\ ,nZ$$

أي أن $[Z:nZ]=n$.

نظرية (١-٢٢):

إذا كانت G زمرة، $A,B \le G$ وإذا كانت $[G:A]=m$ ، $[G,B]=n$ فإن:

$[G:A\cap B]\le mn$ وعندما $(m,n)=1$ يكون $[G:A\cap B]=mn$.

نظرية (١-٢٣): نظرية لاجرانج (Lagrange's Theorem).

إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية G فإن:
$|G| = [G:H]|H|$ ومن ثم فان $|H|$ يقسم $|G|$ أي رتبة H تقسم رتبة G.

نتيجة (١-٥):

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكان $a \in G$ فإن $a^n = e$.

نتيجة (١-٦):

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها عددا أوليا p فإن G دائرية.

نتيجة (١-٧):

إذا كانت G زمرة منتهية. $a \in G$ فإن $|a| \backslash |G|$.

نظرية (١-٢٤):

إذا كانت A, B زمرتين جزئيتين منتهيتين من الزمرة G فإن

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

مثال (١-٢٠):

لاتوجد زمرة جزئية من A_4 رتبتها 6.

نظرية (١-٢٥):

إذا كانت $k \leq H \leq G$ وكان كل من $[G:H]$ و $[H:k]$ منتهيا فإن:
$[G:k]$ منته وأن $[G:k] = [G:H][H:k]$

مثال (١-٢١):

لتكن G زمره من الرتبة P^n حيث P عدد أولي. أثبت أن G تحتوي على عنصر رتبته P.

الحل:

لنفرض $e \neq a \in G$, $H = \langle a \rangle$ زمرة جزئية دائرية من G وأن $|H|$ يقسم p^n لذا فإن فإن $|H| = p^m$ حيث $o < m \leq n$.

بما أن H دائرية و p تقسم $|H|$ فإنه توجد زمره جزئية $T \leq H$ حيث $|T| = P$

ولكن T دائرية.

$\therefore$ يوجد $b \in T$ حيث $T = \langle b \rangle$ بتالي $|b| = p$.

تعريف (١-١١):

لتكن G زمره وَ $a \in G$. يعرف ممركز a في G (Centralizer of a in G) بأنه المجموعة $C(a) = \{x \in G: xa = ax\}$.

أي أنه مجموعة عناصر G التي تحقق خاصية الإبدال مع العنصر a.

مثال (١-٢٢):

إذا كانت $G = D_4 = \langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$

$C(1) = G$

$C(a) = \{1, a, a^2, a^3\} = C(a^3)$

$C(a^2) = G \quad \rightarrow a^2 \in Z(G)$

$C(b) = \{1, b, a^2, a^2 b\} = C(a^2 b)$

$C(ab) = \{1, ab, a^2, a^3 b\} = C(a^3 b)$

مثال: (١-٢٣):

إذا كانت G زمرة وكان $a, x\in G$ فأثبت أن

$$C(x a x^{-1}) = x C(a) x^{-1}$$

الحل:

$$C(x a x^{-1})\ \{g \in G \mid g x a x^{-1} = x a x^{-1} g\}$$

وَ $C(a) = \{g\in G : ga = ag\}$ منها

$$xC(a) x^{-1} = \{xgx^{-1} : ga = ag\}$$

بفرض $h \in x C(a) x^{-1}$ نجد أن

$h = x g x^{-1}$ حيث $ga = ag$

الاتجاه الأول $xC(a) x^{-1} \subseteq C(x a x^{-1})$

$$hxax^{-1} = (xgx^{-1})(xax^{-1}) = xgax^{-1} = xagx^{-1}$$

$$= (xax^{-1})(xgx^{-1}) = xax^{-1}h$$

$$h \in C(xax^{-1}) \rightarrow (1)$$

الاتجاه الثاني $C(xax^{-1}) \subseteq x C(a) x^{-1}$

إذا كان $h \in C(xax^{-1})$ فإن $hxax^{-1} = xax^{-1}h$

بوضع $g = x^{-1}hx$ نجد أن $h = xgx^{-1}$

$$hxax^{-1} = xax^{-1}h \Rightarrow x^{-1}hxax^{-1} = ax^{-1}h$$

$$\Rightarrow gax^{-1} = ax^{-1}h \Rightarrow gax^{-1}h^{-1}x = a$$

$$\Rightarrow ga(x^{-1}hx)^{-1} = a \Rightarrow gag^{-1} = a \Rightarrow ga = ag$$

$$h \in xC(a)x^{-1} \rightarrow (2)$$

من (1), (2) نجد

$$C(xax^{-1}) = x C(a) x^{-1}$$

تعريف (١-١٢):

إذا كانت G زمرة، $a,b \in G$ فيقال عن a أنها ترافق ≈ (Conjugate) b إذا وجد $x \in G$ بحيث أن $a=x^{-1}bx$ ويعبر عن ذلك بالشكل $a=b^x$

مثال (١-٢٤):

١) $G = D_4 = G = D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$

فإن

a ترافق a^3 لأن $a = (a^3)^{ab}$

ab ترافق a^3b لأن $(ab) = (a^3b)^b$

a^2b ترافق b لأن $(a^2b) = (b)^a$

٢) إذا كانت $G=S_3$ فإن

(123) ترافق (123) لأن $(123) = (123)^{(1)}$

(12) ترافق (13) لأن $(12) = (13)^{(132)}$

(23) ترافق (13) لأن $(23) = (13)^{(123)}$

(132) ترافق (123) لأن $(132) = (123)^{(12)}$

نظرية (١-٢٧) :

إذا كانت G زمرة، ≈ علاقة معرفة على G كالتالي:

$a \approx b \Leftrightarrow a = b^x$ وَ $a, b \in G$ فإن ≈ علاقة تكافؤ على G.

ملاحظة:

بما ان كل علاقة تكافؤ على مجموعة تجزئ تلك المجموعة الى فصول تكافؤ. إذن علاقة التكافؤ ≈ تجزئ G إلى فصول تكافؤ، نسمي كلاً منها فصل ترافق (Conjugacy Class) ونرمز له بالرمز C_a.

$C_a \{x^{-1}ax \mid x \in G\}$

ملاحظة:

كل زمرة جزئية من الزمرة G مترافقة مع نفسها.

مثال (١-٢٥):

١) إذا كانت $G= S_3$ فإن فصول الترافق هي:

$C_1= \{(1)\}$,

$C_{(12)} = \{(12), (13), (23)\} = C_{(13)} = C_{(23)}$

$C_{(123)} = \{(123), (132)\} = C_{(132)}$

٢) $G = D_4 = \langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ فإن فصول الترافق هي:

$C_1= \{(1)\}$,

$C_a= \{(a,a^3\}= C_{a^3}$, $C_b = \{b,a^2b\} = C_{a^2b}$

$C_{a^2} = \{a^2\}$, $C_{ab} = \{ab, a^3b\}$

تعريف (١-١٣):

لتكن G زمرة تؤثر (من اليمين) على المجموعة X وليكن $a\in X$. يقال عن مجموعة عناصر G التي تدع a مستقرة (ثابته) أنها مثبت (stablizer) العنصر a ويرمز له عادة بالرمز stab (a) أو G_a.

$$\therefore\ G_a = \{x\in G|\ a * x = a\}$$

أما إذا كانت G تؤثر على X من اليسار فإن :

$$\therefore\ G_a = \{x\in G|\ x * a = a\}$$

مثال (١-٢٦):

١) إذا كانت $G=S_3$ نجد أن G تؤثر على $X = \{1,2,3\}$

$$G_1 = \{f\in S_3 \mid f(1) = 1\} = \{(1), (23)\}$$

$$G_2 = \{f\in S_3 \mid f(2) = 2\} = \{(1), (13)\}$$

$$G_3 = \{f\in S_3 \mid f(3) = 3\} = \{(1), (12)\}$$

٢) إذا كانت H زمرة جزئية من G وعرّفنا $a * x = a x$

لكل $a\in G$، $x\in h$ فمن الواضح أن

H تؤثر على G ويكون

$$G_a = \{x\in H , ax = a\} = \{e\}$$

نظرية (١-٢٨):

إذا كانت G تؤثر من اليمين أو اليسار على X, $a \in X$ فإن $G_a \leq G$.

مثال (١- ٢٧):

في مثال $(1-26)$

١) نلاحظ أن كلاً من G_3, G_2, G_1 زمرة جزئية من G.

نتيجة (١-٩):

إذا كانت G زمرة، $a\in G$ فإن $C(a) \leq G$.

تعريف (١-١٤):

إذا كـــان a عنصـــرًا ثابتًـــا فـــي X فيقـــال عـــن فصـــل التكـــافؤ $arb(a) = \{a * x | x\in G\}$ للعنصـــر a وفـق العلاقـة $\approx$ أنــه مـدار (orbit) العنصر a في G.

نظرية (١-٢٩): Orbit Stabilizer Theorem:

إذا كانت G تؤثر (من اليمن أو اليسار) على $a \in x, x$ فإن: $|orb(a)| = [G: G_a]$. وإذا كانت G زمرة منتهية فإن:

$$|G| = |arb(a)||G_a|$$

مثال (١-٢٨):

إذا كانت $G=S_3$ فإن $orb(1) = \{1,2,3\}$

$|orb(1)| = 3$, $G_1 = \{(1), (2\ 3)\}$ وعليه فإن $|G_1| = 2$

$\therefore |S_3| = |orb(1)||G_1| = 6$

نتيجة (١-١٠):

إذا كانت G زمرة، $a \in G$ فإن $|C_a| = [G : C(a)]$.

نتيجة (١-١١):

إذا كانت G زمرة منتهية فإن: $|G| = \sum_{i=1}^{r} [G : C(a_i)]$.

نتيجة (١-١٢):

إذا كانت G زمرة منتهية $Z= (G)$ فإن: $|G| = |Z(G)| + \sum_{a_i \notin Z} |C_{ai}|$

ملاحظة:

تسمى المعادلة $|G| = \sum_{i=1}^{r} |G : C(a_i)| = |Z| + \sum_{a_i \notin Z} |C_{a_i}|$

معادلة فصول الترافق (The Class Equation) .

نظرية (١-٣٠):

إذا كانت G زمرة، p عدد أولي

١) إذا كانت $|G| = p^n$ فإن $Z(G) \neq \{e\}$، حيث e العنصر المحايد في G.

٢) إذا كانت $|G| = p^2$ فإن G إبدالية.

تعريف (١-١٥): (الزمرة الجزئية الناظمية Normal subgroup)

لتكن $H \leq G$ نقول أن H زمرة جزئية ناظمية من G إذا كان $aH=Ha$ لكل $a \in G$.

ملاحظات:

١) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G نكتب $H \lhd G$

٢) الزمرتان الجزئيتان $\{e\}$,G من الزمرة $(G,*)$ ناظميتان من الزمرة $(G,*)$.

٣) لتكن $H_2 \leq G$ ولتكن $H_1 \lhd G$ بحيث يكون $H_1 \subseteq H_2$ عندئذ الزمرة الجزئية الناظمية H_1 تكون زمرة جزئية ناظمية من الزمرة الجزئية H_2.

٤) إذا كانت $aH = Ha$ لا يعني بالضرورة أن $ah = ha$ لكل $a \in G$ وَ $h \in H$ ولكنه يعني أنه إذا كان $ah \in aH$ فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيث $ah= h_1a$.

٥) إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $H \lhd G$ لكل $H \leq G$.

نظرية (١-٣١):

إذا كانت G زمرة، $H \leq G$ فإن العبارات التالية متكافئة:

١) $H \lhd G$.

٢) لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ حيث $xh = h_1x$.

٣) $x^{-1} h x \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

٤) $x^{-1} H x \subseteq H$ لكل $x \in G$.

٥) $x^{-1} Hx = H$ لكل $x \in G$.

٦) $(x H) (y H) = (xy) H$ لكل $x, y \in G$.

نتيجة (١-١٣):

إذا كانت G زمرة فإن $Z (G) \lhd G$.

مثال (١-٢٩):

١) إذا كانت $H = \langle (1 \quad 2) \rangle \le S_3$ فإن:

$$(1 \quad 3) \circ H = \{(1 \quad 3),\ (1 \quad 2 \quad 3)\}$$

$$H \circ (1 \quad 3) = \{(1 \quad 3),\ (1 \quad 3 \quad 2)\}$$

$$(1 \quad 3) \circ H \neq H \circ (1 \quad 3)$$

$\therefore$ H ليست ناظمية من S_3.

بينما $K = \langle (1 \quad 2 \quad 3) \rangle \le S_3$ فإن:

$$\sigma \circ K = K \circ \sigma \quad , \forall \sigma \in S_3$$

$\therefore$ K نظامية من S_3

٢) لتكن $G= GL(2, R)$ ولتكن

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x & o \\ o & x \end{bmatrix} : o \neq x \in R \right\}$$

فإن $G \triangleleft H$، لأن $Z(G) = H$.

<u>نظرية (١-٣٢):</u>

إذا كانت $H \leq G$ وكان $[G: H] = 2$ فإن : $H \triangleleft G$

<u>مثال (١-٣٠):</u>

١) بما أن $[S_n: A_n]= 2$ فإن $A_n \triangleleft S_n$ لكل $n \geq 2$.

٢) إذا كانت $G = Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, aba = b \rangle$

$A = \langle a \rangle \qquad B = \langle b \rangle \qquad C = \langle ab \rangle$

فإن $A,B,C \leq G$

كما أن $[G:A]= [G:B]= [G:C]=2$

وعليه فإن $A,B,C \triangleleft G$.

<u>نظرية (١-٣٣):</u>

إذا كانت G زمرة، $H_i \triangleleft G$ لكل $i \in N$ فإن $\bigcap_i H_i \triangleleft G$.

<u>نظرية (١-٣٤):</u>

إذا كانت G زمرة، $A,B \leq G$ فإن:

١) إذا كانت $A \triangleleft G$ فإن $A \cap B \triangleleft B$.

٢) إذا كانت $A \triangleleft G$ وَ $B \triangleleft G$ فإن $A \cap B \triangleleft G$.

نظرية (١-٣٥):

لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \le G$ حيث $|H| = m$، إذا كانت H هي الزمرة الجزئية الوحيدة من G ذات الرتبة m فإن $H \lhd G$.

مثال: (١-٣١):

١) $H = \{e, a^2\} \le Q_8$ هي الزمرة الجزئية الوحيدة من Q_8 ذات الرتبة 2 وعليه فإن $H \lhd Q_8$.

٢) $H = \langle(1\quad 2\quad 3)\rangle$ هي الزمرة الجزئية الوحيدة من S_3 ذات الرتبة 3 وعليه فإن $H \lhd S_3$.

مثال (١-٣٢):

إذا كانت $G = D_4$ وكانت $H = \{e, a^3b\},\ k = \{e, a^2, ab, a^3b\}$

فإن $H \lhd K \lhd G$ لأن $[G:K] = [K:H] = 2$ ، ولكن H ليست نظامية في G لأن $aH = \{a, b\} \neq Ha = \{a, a^2b\}$

نظرية (١-٣٦):

لتكن $(G,*)$ زمره ولتكن H,F زمرتين جزيئتين نظاميتين من الزمرة $(G,*)$ فإن : $H * F \lhd G$

تعريف (١-١٦):

إذا كانت G زمرة، $a,b \in G$ فيقال عن

$[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^{b}$ إنه مبادل (مُبَدِل Commutator) a,b.

ملاحظة:

إذا كانت G زمره إبدالية فإن:

$$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab=a^{-1}ab^{-1}b=e$$

مثال: (١-٣٣):

١) إذا كانت $G=D_4=\langle a,b \mid a^4=b^2=(ab)^2=1\rangle$

فإن $[a,b]=a^{-1}b^{-1}\ ab=a^3bab=a^2$

$[ab,a]=a^2$

٢) إذا كانت $G=(Z_6,\oplus)$ فإن

$[2,4]=0\ ,\qquad [2,3]=0\ ,\qquad [3,4]=0$

لأن G زمرة إبدالية.

نظرية (١-٣٧):

إذا كانت G زمرة $a,b,c\in G$، e العنصر المحايد في G فإن:

$$[a,b]^{-1}=[b,a]$$

تعريف (١-١٧):

إذا كانـــــت G زمـــــره، $A,B\subseteq G$ يعـــــرّف [A,B]. بأنــــه $\langle [a,b] \mid a\in A, b\in B\rangle$

وإذا كانت A = B =G فيسمى $G^2=G'=[G:G]$ مشتقة G (Derived Subgroup) أو مُبدل (Commentator subgroup).

ملاحظة:

نجد أن $G \geq [A,B]$ كما أن $[A,B] = [B,A]$.

مثال (١-٣٤):

١) إذا كانت $G = (Z_8, \oplus)$ فإن $G' = \{0\}$.

٢) إذا كانت $G = S_3$ فإن $G' = A_3 = \langle (123) \rangle$.

٣) إذا كانت $G = D_4$ فإن $G' = \langle a^2 \rangle$.

٤) إذا كانت $G = S_4$ فإن $G' = A_4$.

٥) $G = V - \text{group} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ فإن $G' = \{1\}$.

نظرية (١-٣٨):

إذا كانت G زمرة، $A \leq G$ فإن $A \lhd G \Leftrightarrow [G, A] \subseteq A$.

نتيجة (١-١٤):

إذا كانت G زمرة فإن $G' \lhd G$.

تعريف (١-١٨):

إذا كانت $H \leq G$ فإن منظم H في G.

(Normalizer of H in G) هو المجموعة

$$N(H) = \{x \in G: x^{-1} Hx = H\}$$

نظرية (١-٣٩):

إذا كانت $H \leq G$ فإن:

١) $N(H) \leq G$.

٢) $H \lhd N(H)$.

٣) $H \lhd G$ وإذا فقط كان $N(H) = G$.

٤) إذا كانت $H \lhd K \leq G$ فإن $K \subseteq N(H)$

أي أن $N(H)$ هي أكبر زمرة جزئية من G بحيث تكون H ناظمية فيها.

نظرية (١-٤٠):

إذا كانت G زمرة وَ $H \lhd G$، وعرفنا $G/H = \{xH | x \in G\}$ $(xH)(yH) = (xy)H$ لكل $x, y \in G$ فإن $(G/H, *)$ زمرة.

ملاحظة:

$(G/H, *)$ زمرة عنصرها المحايد هو H ومعكوس كل عنصر $x * H$ منها هو العنصر $x^{-1} * H$ ، نسمي الزمرة $(G/H, *)$ زمرة الباقي (خارج القسمة) (Quotient (Factor) Groups).

مثال (١-٣٥):

١) إذا كانت $G = (Z, +)$, $H = \langle 3 \rangle$ فإن $H \lhd G$

$$G/H = \{H, H+1, H+2\}$$

بصورة عامة إذا كانت $G = (Z, +)$, $H = \langle n \rangle$ فإن

$$G/H = \{H, H+1, \ldots, H+(n-1)\}.$$

٢) إذا كانت $G = V_4 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$،

$H = \langle a \rangle = \{1, a\}$ من الواضح ان $H \lhd G$

$G/H = \{H, Hb\}$ حيث $Hb = \{b, ab\}$.

نظرية (١-٤١):

إذا كانت $H \lhd G$ فإن:

١) إذا كانت G إبدالية فإن G/H إبدالية.

٢) إذا كانت $G = \langle x \rangle$ دائرية فإن $G/H = \langle xH \rangle$ دائرية.

٣) إذا كانت G منتهية فإن $\left| G/H \right| = \dfrac{|G|}{|H|}$.

مثال (١-٣٦):

لتكن $G = Z_{18}$ ولتكن

$$H = \langle 6 \rangle = \{0, 6, 12\}$$

فإن $\left| G/H \right| = \dfrac{|G|}{|H|} = \dfrac{18}{3} = 6$

وبما أن $G = \langle 1 \rangle$ دائرية فإن

$G/H = \langle 1 + H \rangle$ دائرية كما أن

$$G/H = \{H, 1+H, 2+H, 3+H, 4+H, 5+H\}$$

ملاحظة:

معكوس النظرية السابقة (١) غير صحيح لأنه إذا كانت

$G = S_3$, $H = \langle(123)\rangle$ فإن:

G/H زمرة إبدالية لكن G ليست إبدالية.

نظرية (١-٤٢):

إذا كانت G زمرة حيث $G/Z(G)$ دائرية فإن G إبدالية.

نظرية (١-٤٣):

إذا كانت G زمرة فإن:

١) G/G' زمره إبدالية.

٢) إذا كان $H \leq G$ فإن $G' \subseteq H$ إذا وإذا فقط كانت $H \lhd G$ وكانت G/H إبدالية.

مثال (١-٣٧):

في D_4 كانت لمشتقة $D_4' = \langle a^2 \rangle$ نجد أن D_4/D_4' زمرة من الرتبة 4 وهي إبدالية.

تمارين محلولة

(١) بين أيًا من الأنظمة الجبرية في التمارين من (أ) إلى (د) زمره. إذا كان النظام زمره فبين فيما إذا كانت إبدالية، وإذا لم يكن زمره فبين أي الشروط غير متحققة.

أ) $(Z,*)$ حيث $x*y=x+y+xy$.

الحل:

١) بفرض $x, y \in Z$

$$x + y + xy = x*y \in G$$

٢) بفرض $x, y, z \in Z$

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= (x+ y+ xy)\, z \\
&= x+ y+ xy+ z+ (x+ y+ xy)z \\
&= x+ y+ xy+ z+ xz+ yz+ xyz \\
&= x+ y+ z+ yz+xy+ xz+ xyz \\
&= x+ y+ z+ yz+ x\,(y+ z+ yz) \\
&= x * (y+ z+ yz) \\
&= x * (y * z)
\end{aligned}$$

$\therefore$ التجميع متحقق.

٣) بفرض أن e هو العنصر المحايد لـ Z

$x * e = x$

منها

$x + e + xe = x \quad \Rightarrow \quad e + xe = x + (-x)$

$\Rightarrow e\,(1+x) = 0$

أما $e = 0$.

أو $1 + x = 0 \Leftarrow x = -1$ مرفوض

$\therefore\ e = 0$

٤) بفرض أن x^{-1} معكوس العنصر x

$x + x^{-1} = e$

منها

$x + x^{-1} = 0 \qquad \Rightarrow x^{-1} = -x$

$\therefore$ لكل عنصر x في Z معكوس هو $-x$ من 4,3,2,1

$\therefore$ $(Z, *)$ زمره

للتحقق من الإبدال

$x * y = x + y + xy = y + x + yx$

$\quad = y * x$

$\therefore$ الإبدال متحقق

ب) $(N, *)$ حيث $x * y = x + y$.

الحل:

$(N, *)$ ليست زمره لعدم وجود العنصر المحايد للتحقق من ذلك e العنصر المحايد $x * e = x$

منها $\quad x + e = x \qquad \Rightarrow e = 0 \notin N$

جـ) $(N, *)$ حيث $x * y = x^y$.

الحل:

$(N, *)$ ليست زمره لعدم تحقق خاصية التجميع للتحقق من ذلك

$$(2 * 2) * 3 = 2^2 * 3$$

$$= (2^2)^3 = 2^6 \qquad (1)$$

$$2 * (2 * 3) = 2 * (2^3)$$

$$= 2 * 8 = 2^8 \qquad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن

$$(2 * 2) * 3 \neq 2 * (2 * 3)$$

د) $(Q, *)$ حيث $x * y = x\,y + 1$.

الحل:

$(Q, *)$ ليست زمره لعدم تحقق خاصية التجميع.

$$(x * y) * z \quad = (xy + 1) * z$$

$$= (xy + 1)\,z + 1$$

$$= xy\,z + z + 1$$

(1)

$$x * (y * z) \quad = x * (yz + 1)$$

$= x\,(yz + 1) + 1$

$= xyz + x + 1$

(2)

من (١) وَ (٢) نجد أن

$$(x * y) * z \neq x * (y * z)$$

(٢) لتكن $G = R \times R^*$ الثنائية معرفة على G على النحو التالي:

$$(a, b) * (c,d) = (a + bc, bd)$$

أثبت أن $(G, *)$ زمره غير إبدالية ؟

الحل:

١) الإغلاق

بفرض أن $(a,b), (c,d) \in R \times R^*$

بحيث أن $a, c \in R$, $b, d \in R^*$

$$(a, b) * (c,d) = (a + bc, bd) \in R \times R^*$$

لأن $a + bc \in R$, $bd \in R^*$

٢) التجميع

بفرض

$$(a,b), (c,d), (f,g) \in R \times R^*$$

بحيث

$$a, c, f \in R \;,\; b, d, g \in R^*$$

$[(a,b) * (c,d)] * (f,g) =$

$(a + bc, bd) * (f,g) =$

$(a + bc + (bd) f, (bd) g)$

$= a + bc + bdf, b (dg))$

$= (a + b (c + df), b (dg))$

$= (a,b) * (c + df, dg)$

$= (a, b) * [(c,d) * (f,g)]$

٣) المحايد

بفرض أن $(e_1, e_2) \in R \times R^*$ محايد الـ G

$(a,b) * (e_1, e_2) = (a, b)$

$(a + be_1, be_2) = (a,b)$

1) $a + be_1 = a \qquad \Rightarrow be_1 = o$

إما $e_1 = 0$

أو $b = 0$ مرفوض لأن $b \in R^*$

2) $be_2 = b \qquad \Rightarrow e_2 = 1$

إذن العنصر المحايد $(0,1)$.

٤) بفرض أن (h,j) معكوس العنصر (a,b)

$(a, b) * (h, j) = (0, 1)$

$(a + bh , bj) = (0, 1)$

1) $a + bh = 0 \qquad \Rightarrow bh = -a$

$\Rightarrow h = \frac{-a}{b}$

2) $bj = 1 \qquad \Rightarrow \quad j = \frac{1}{b}$

$\therefore$ المعكوس هو $\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)$.

$\therefore$ $(G, *)$ زمره .

٥) الإبدال:

$(a, b) * (c, d)$

$=(a + bc, bd) \qquad (1)$

$(c,d) * (a, b)$

$(c + da , db) \qquad (2)$

من (١) و (٢) نجد أن

$(a, b) * (c,d) \neq (c,d) * (a,b)$

$\therefore$ $(G, *)$ زمره غير إبدالية .

(٣) لتكن $G \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in Z \right\}$

أثبت أن G زمره إبدالية حيث العملية الثنائية هي ضرب المصفوفات؟

الحل:

١) الإغلاق

بفرض أن $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$

بحيث $n, m \in Z$

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$$

بحيث $m+n \in Z$

٢) التجميع

بفرض

$$\begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & m\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & l\\0 & 1\end{bmatrix} \in G$$

بحيث $n, m, L \in Z$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & m\\0 & 1\end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix}1 & l\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & l+(n+m)\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & l+m\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix}1 & m\\0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & l\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

إذن خاصية التجميع متحققة.

(٤) إذا كانت G زمره وكان $a \in G$ حيث $a^2 = a$ فأثبت أن $a = e$.

الحلَ:

$$a^2 = a$$
$$a.\ a=a$$
$$\Rightarrow (a.a)\ a^{-1} = a.a^{-1}$$
$$\Rightarrow a.\ (aa^{-1}) = e$$
$$\Rightarrow a.\ e = e$$
$$\Rightarrow a = e$$

وهو المطلوب .

(٥) أثبت أن رتبة جميع عناصر الزمرة $(Q, +)$ (ماعدا المحايد) غير منتهيه؟

الحل:

من المعلوم أن العناصر في Q على الشكل $\frac{a}{b}$ بحيث أن $a,b \in Z$

بما أن $\frac{a}{b} \in Q$.

نفرض أن رتبة العنصر $\frac{a}{b}$ تساوي n بحيث أن $n \in Z$.

ومن المعلوم أن محايد الزمره $(Q, +)$ هو الصفر.

$$n\ .\ \frac{a}{b} = 0$$

منها

مرفوضة $n=0$ لأن $n \in Z^+$

أيضًا مرفوضة $\frac{a}{b} = 0$

إذن الفرض خاطئ

رتبة جميع عناصر الزمره $(Q, +)$ غير منتهية.

(٦) هل يوجد عنصر (عدا المحايد) في الزمرة $(Q^*,.)$ غير منتهية؟

<u>الحل:</u>

نعم يوجد وهو 1- ورتبته تساوي 2 لأن

محايد الزمره $(Q^*,.)$ هو 1

$(-1)\,(-1) = 1$

(٧) إذا كانت G زمره وَ $a,b \in G$ حيث $ab=ba$ فأثبت أن:

أ) $ab^{-1} = b^{-1}a$

<u>الحل:</u>

معطى أن G زمره

إذن لكل عنصر $b \in G$ له معكوس $b^{-1} \in G$

وبما أن G إبدالية فإن

$ab^{-1} = b^{-1}a$

ب) $(xax^{-1})(xbx^{-1}) = (xbx^{-1})(xax^{-1})$ لكل $x \in G$.

الحل:

من المعطى أن $ab = ba$

$$x(ab)x^{-1} = x(ba)x^{-1}$$
$$x(a(x^{-1}x)b)x^{-1} = x(b(x^{-1}x)a)x^{-1}$$
$$x(ax^{-1})(xb)x^{-1} = x(bx^{-1})(xa)x^{-1}$$
$$(xax^{-1})(xbx^{-1}) = (xbx^{-1})(xax^{-1})$$

(٨) إذا كانت G زمره وكان

$a,b \in G$ حيث $ba = ab^{-1},\ ab = ba^{-1}$

فأثبت أن $a^4 = b^4$ ؟

الحل:

بما أن :

$$ba = ab^{-1}$$

بالضرب في a^{-1} من اليمين نحصل على

١) $b\,a\,a^{-1} = a\,b^{-1}\,a^{-1} \Rightarrow b = a\,b^{-1}\,a^{-1}$

وبما أن

$$ba^{-1} = ab$$

بالضرب في a من اليمين نحصل على

٢) $b\,a^{-1}\,a = aba \Rightarrow b = a\,b\,a$

من (١) و (٢)

$$b^2 = b.b = ab^{-1}\,a^{-1}.\,aba$$

$= a^2$

$\because\ b^2 = a^2 \qquad \Rightarrow\ b^4 = a^4$

(٩) إذا كانت G زمره وكان $a,b \in G$

حيث $a^4 = e$

$a^2b = ba$

فأثبت أن $a=e$ ؟

الحل:

$a^2b = ba$

منها

$b^{-1} a^2b = a$

$a^2 = b^{-1} a^2 b.\ b^{-1} a^2b$

$a^2 = b^{-1} a^4 b$

بما أن $a^4 = e$

$\therefore\ a^2 = b^{-1} e\, b \qquad \Rightarrow\ a^2 = e$

من العلاقة * نعوض عن a^2 بـ e

$b^{-1} e\, b = a \qquad \Rightarrow \qquad a = e$

(١٠) إذا كان $a, b \in G$ حيث :

$b^6 = a \qquad (1)$

$ab = b^4a \qquad (2)$

فأثبت أن

$ab = ba$?

الحل:

$\because b^6 = a$

بالضرب في b من اليمين

$b^7 = a\,b \qquad (3)$

من العلاقة (2) وَ (3)

$b^4 a = b^7$

بالضرب بـ b^{-4} من اليسار

$a = b^3$

بالضرب بـ b من اليمين

$ab = b^4 \qquad (4)$

من العلاقة (3) و (4)

$b^4 = b^7$

بالضرب في b^{-3} من اليمين أو اليسار

$b = b^4$

بالتعويض عن b^4 من العلاقة السابقة في العلاقة (2)

$ab = ba$

(١١) إذا كانت G زمره وكان $a,b \in G$ فأثبت أن:

أ) $|a| = |b^{-1}ab|$

ب) $|ab| = |ab|$

الحل:

أ) بفرض أن $|a| = n, n \in Z^+$

أي أن

$$a^n = \underbrace{a, a, a, \ldots\ldots, a}_{\text{من المرات } n} = e$$

$$(b^{-1}ab)^n = \underbrace{b^{-1}\, ab.\ b^{-1}\, ab.\ b^{-1}\, a\, b.\ \ldots\ .\ b^{-1}\, ab}_{\text{من المرات } n}$$

$$= b^{-1}\ a^n\ b = b^{-1}\ e\ b = b^{-1}\ b = e$$

$$\therefore |a| = |b^{-1}ab|$$

ب) بفرض $|ab| = n, n \in Z^+$

أي أن

$$(ab)^n = \underbrace{ab, ab, ab, \ldots\ldots, ab}_{\text{من المرات } n} = e \qquad (*)$$

$$(ba)^n = \underbrace{ba.\ ba.\ ba.\ \ldots\ .\ ba}_{\text{من المرات } n}$$

$$= b.\ ab.\ ab.\ \ldots\ .a$$

$$= b.\ (ab)^{n-1}.\ a \qquad (**)$$

من العلاقة (*) نجد أن

$$(ab)^n (ab)^{-1} = e\,(ab)^{-1}$$

$$(ab)^{n-1} = (ab)^{-1}$$

$$(ab)^{n-1} = b^{-1} a^{-1}$$

بالتعويض في **

$$(ba)^n = b.\,(b^{-1} a^{-1})\,.a$$

$$= (bb^{-1}).\,(a^{-1}a)$$

$$= e$$

$$\therefore |ab| = |ba|$$

(١٢) لتكن $G = Z \times Z$

حيث

$$(a,b)\,(c,d) = (a + (-1)^b c,\, b + d)$$

أ) أثبت أن G زمره غير إبدالية؟.

الحل:

١- الإغلاق:

نفرض أن $(a,b), (c,d) \in Z \times Z$

بحيث $a,b,c,d \in Z$

$$(a,b)\,(c,d) = (a + (-1)^b c,\, b+d) \in Z \times Z$$

لأن $a + (-1)^b c,\; b + d \in Z$

٢- التجميع:

نفرض أن

$(a,b), (c,d), (f,g) \in Z \times Z$

$[(a,b)\,(c,d)]\,(f,g) = (a+ (-1)^b c, b+d)\,(f,g)$

$= (a+ (-1)^b c + (-1)^{b+d} f, (b+d)+g)$

$= (a + (-1)^b c + (-1)^b(-1)^d f, b+ (d+g))$

$= (a + (-1)^b (c+ (-1)^d f), b + (d+g))$

$= (a,b)\,(c+ (-1)^d f, d+g)$

$= (a,b)\,[(c,d)\,(f,g)]$

٣- بفرض أن (e_1, e_2) هو محايد الزمرة $Z \times Z$

$(a,b)\,(e_1,e_2) = (a,b)$

$(a + (-1)^b e_1, b + e_2) = (a, b)$

(1) $a + (-1)^b e_1 = a$

$(-1)^b e_1 = 0$

إما $(-1)^b = 0$ مرفوضة

أو $e_1 = 0$

(2) $b + e_2 = b$

$e_2 = 0$

$\therefore$ $(0,0)$ هو المحايد.

٤- بفرض $(h, j) \in Z \times Z$ معكوس العنصر (a,b) منها:

$(a, b)\,(h,j) = (0,0)$

$(a+(-1)^b h, b+j) = (0,0)$

1) $a + (-1)^b h = 0$

$(-1)^b h = -a$

$h = \frac{-a}{(-1)^b} \quad \Rightarrow \quad h = (-1)^{1-b} a$

2) $b + j = 0 \quad \Rightarrow \quad j = -b$

$\therefore$ معكوس العنصر (a,b) في $Z \times Z$

هو $((-1)^{1-b} a, -b)$

من ١ و ٢ وَ ٣ وَ ٤ نجد أن G زمره.

٥- الإبدال:

بفرض أن $(a,b), (c,d) \in Z \times Z$

$(1)(a,b)(c,d) = (a + (-1)^b c, b + d)$

$(2)(c,d)(a,b) = (c + (-1)^d a, d + b)$

$(a,b)(c,d) \neq (c,d)(a,b)$

لتوضيح ذلك بمثال

$(1,2)(-1,3) = (1+(-1)^2(-1), 2+3)$

$= (0, 5)$

$(-1,3)(1,2) = (-1 + (-1)^3 (1), 3+2)$

نجد أن $(0,5) \neq (-2,5)$

$\therefore$ G زمرة ليست إبدالية .

ب) أثبت أن كل من

$H = \{(a,b): b= 0\}$

$K = \{(a,b): a = 0\}$

زمر جزئية من G.

الحل:

١) لإثبات إن $H \leq G$

بما أن G زمره وَ $\phi \neq H \subseteq G$

نفرض $(a, 0), (c, 0) \in H$

$$(a, 0)\,(c,0)^{-1} = (a,0)\,((-1)^{1-0} c, 0)$$
$$= (a, 0)\,(-c,0) = (a+ (-1)^0 (-c), 0 + 0)$$
$$= (a - c,0) \in H$$

لأن $a- c \in Z$

$$\therefore\ H \leq G$$

٢) بما أن G زمره وَ $\phi \neq k \subseteq G$

نفرض أن $(0,b), (0,d) \in H$

$$(0,b)\,(0,d)^{-1} = (0,b)\,((-1)^{1-d} (0), -d)$$
$$= (0,b)\,(0,-d)$$
$$= (0 + (-1)^b (0), b + (-d))$$
$$= (0,b-d) \in k$$

لأن $b-d \in Z$

$$\therefore K \le G$$

(١٣) لتكن $G = \langle x, y \rangle$ حيث

$(xy)^2 = e \qquad , \ |x| = |y| = 3$

أثبت أن

$$G = \{e, x, x^2, y, y^2, xy, yx, x^2y, xy^2, xy^2x, yx^2, y^2x\}$$

$$= \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle.$$

الحل:

بما أن

$$|x| = 3$$

$$x^3 = e \quad \Rightarrow \quad x^2 = x^{-1}$$

$$\langle x \rangle = \{1, x^1, x^3\}$$

بالمثل $|y| = 3$

$$(xy)^2 = e \quad \Rightarrow xyxy = e$$

1- $x^2 y^2 = yx$

لأن $xy\, xy = e$

$$yx = x^{-1} y^{-1} \quad \Rightarrow yx = x^2 y^2 \quad \ldots (*)$$

2- $y^2 x^2 = xy$

$$(xy)^2 = e \quad \Rightarrow \quad xy\, xy = e$$

$$xy = y^{-1}x^{-1} \Rightarrow xy = y^2x^2 \ldots(**)$$

3- $xyx = y^2$

لأن من العلاقة (*)

$x\,(yx) = x\,(x^2y)$

$\Rightarrow xy\,x = x^3\,y \quad \Rightarrow x\,y\,x = y$

4- $x^2\,yx = xy$

لأن من العلاقة (*)

$x^2\,(yx) = x^2\,(x^2y)$

$\Rightarrow x^2\,yx = xy$

5- $xy\,x^2 = y^2\,x$

$(xy)\,x^2 = (y^2x^2)x^2$

$\Rightarrow xy\,x^2 = y^2\,x$

من العلاقات السابقة نجد أن مهما عاملنا عناصر G المتبقية مع بعضها البعض لن تظهر عناصر أخرى غيرهم

$$\therefore G = \{e, x, x^2, y, y^2, xy, xy^2, x^2y, yx, y^2x, yx^2, xy^2x\}$$

(١٤) أعط مثالاً لزمرة غير إبدالية بحيث تكون جميع زمرها الجزئية الفعلية دائرية؟

الحل:

الزمرة D_3

$$D_3 = \langle a,b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$
$$= \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$$

$$\langle a \rangle = \{1, a, a^2\} = \langle a^2 \rangle$$

$$\langle b \rangle = \{1, b\}$$

$$\langle ab \rangle = \{1, ab\}$$

$$\langle a^2b \rangle = \{1, a^2b\}$$

$$\langle a,b \rangle = \langle a,ab \rangle = \langle a,a^2b \rangle = \langle a^2,b \rangle =$$

$$\langle a^2,ab \rangle = \langle a^2,a^2b \rangle = \langle b,ab \rangle = \langle b,a^2b \rangle =$$

$$\langle ab,a^2b \rangle = D_3$$

(١٥) بين أيًا من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة:

أ) كل من عناصر الزمرة الدائرية G يولد الزمرة G.

ب) G زمره إبدالية إذا وإذا فقط كانت G زمره دائرية.

ج) إذا كانت G زمره غير إبدالية فإن جميع الزمر الجزئية الفعلية من G غير إبدالية.

د) كل زمره G رتبتها أقل من أو يساوي ٤ هي زمره دائرية.

هـ) A3 زمره دائرية.
و) إذا كانت جميع الزمر الجزئية الفعلية من الزمرة G دائرية فإن G دائرية.

ز) إذا كانت G زمره غير إبدالية فإن $Z(G) = \{e\}$.
ح) توجد زمرة جزئية فعلية H من $(Z,+)$ تحتوي كل من $4Z, 3Z$.
ط) جميع الزمر الجزئية الفعلية من $(R, +)$ دائرية.
ك) جميع الزمر الجزئية الفعلية من $(R, +)$ دائرية .

الحل:

أ) العباره خاطئة

مثال معاكس:

في الزمرة $(Z,+)$ زمره دائرية مولده بالعنصر 1.

$$2 \in Z$$

$$\langle 2 \rangle = \{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$$

لا تولد الزمرة $(Z, +)$

$\therefore$ ليس كل من عناصر الزمرة الدائرية G يولد الزمره G.

ب)العباره خاطئة

إذا كانت G زمره دائرية فإن G زمره إبدالية (نظرية) ولكن ليست كل زمرة G إبدالية تكون دائرية.

مثال معاكس:

V-gp زمره إبدالية ولكنها ليست دائرية لأن كل عنصر في V-gp من الرتبة الثانية.

ج)العباره خاطئة

مثال معاكس:

في D_4 زمره غير إبدالية

$$D_4 = \langle a,b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

$$= \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

نجد أن

$$\langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\} \leq G$$

لكنها إبدالية

	1	a	a^2	a^3
1	1	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	1
a_2	a^2	a^3	1	A
a_3	a^3	1	a	a^2

د)العباره خاطئة
مثال معاكس
لدينا الزمرة V-gp من الرتبة الرابعة ولكنها ليست دائرية.

ه)العباره صحيحة

$A_3 = \{(1), (123), (132)\}$

مولده بالعنصر (123)

$$\langle (123) \rangle = A_3$$

و)العباره خاطئة

مثال معاكس:

في الزمرة D_3

$$D_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

جميع زمرها الجزئية الفعلية دائرية وهي

$$\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle ab \rangle, \langle a^2 b \rangle$$

ولكن الزمرة D_3 ليست دائرية لأنه لا يوجد عنصر في D_3 يولد جميع عناصرها.

ز)العباره خاطئة

مثال معاكس:

الزمرة D_4 زمره غير إبدالية

ولكن

$Z(G) = \{e, a^2\} \neq \{e\}$

ح)العباره خاطئة

بفرض أن H تحتوي كل من 3Z و 4Z وهي زمره جزئية فعلية من $(Z, +)$.

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \dots\}$

$4Z = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 20, \pm 24, \dots\}$

بما أن H تحتوي 3Z وَ 4Z فإنه

$H= \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9 , \pm 12, 15, \pm 16, \pm 18, \dots\}.$

بما أن $H \leq Z$ فإن H تحقق الإغلاق

$H= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \dots\}= Z$

أي أنه لا توجد زمره جزئية فعلية من Z تحتوي 3Z و 4Z

ط)العباره خاطئة
مثال معاكس:

$$\phi \neq Q \subseteq R$$

و$(Q, +)$ زمره

$\therefore$ $Q \leq R$ ولكن Q زمره ليست دائرية لأنه لا يوجد عنصر في Q يولد جميع عناصرها.

ك)العباره خاطئة

مثال معاكس:

$\langle 2\rangle = \{0,\pm 2, \pm 4,\pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14,\dots\}$

$\langle 4\rangle=\{0,\pm 4,\pm 8,\pm 12,\pm 16,\pm 20,\pm 24,\dots\}$

$\langle 2,4\rangle=\{0,\pm 2,\pm 4,\pm 6,\pm 8,\pm 10,\pm 12,\pm 14,\dots\}$

زمره جزئية فعلية غير دائرية لأنها مولده بالعنصرين 2 وَ 4.