هذه المجموعة من الدروس في نظرية الزمر من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com

سأقدم لكم بإذن الله شرح كامل ووافي لـ 7 فصول في الزمره في مواضيع منفصلة هي عبارة عن بحث التخرج لصديقاتي المقربات وقد أحببن أن يستفيد الجميع من هذا البحث لأنهم بذلوا مجهود كبير فيه

فأرجوا منكم الدعاء لهم جميعا بالتوفيق بالدنيا والآخرة

المراجع المستخدمة في 7 فصول:

***نظرية الزمر**

أ . د / صفوان محمد عادل عويره

أ . د / محمود عبدالباقي محمد أحمد

***نظرية الزمر**

د / معروف عبدالرحمن سمحان

د / فوزي بن أحمد صالح الذكير

***مواضيع في الجبر**

اي.ان-هيرستين

***المدخل الى نظرية الزمر**

أ.د فالح الدوسري

أ.عبد الحميد بيك

الفصل الثاني

التشاكل Homomorphism

نقوم في هذا لفصل بدراسة علاقة بين زمرتين G_1 و G_2 تأخذ شكل التطبيق $f : G_1 \to G_2$ يحافظ على التركيب الداخلي للزمر ويطلق عليه تشاكل الزمر.في البداية نقوم بتعريف هذا التشاكل وندرس خواصة الأساسية ثم نقدم نظرية كيلي التي تبين لنا العلاقة بين الزمر بشكلها العام وبين زمرة التبديلات.وفي نهاية هذا الفصل نقدم نظريات التماثل التي هي صحيحة لأي نظام رياضي وليست قاصرة على الزمر.

تعريف(٢-١):

ليكن $(G_2,\circ),(G_1,*)$ زمرتين وليكن $f : G_1 \to G_2$ تطبيقا" نقول إن

f تشاكل (Homomorphism)

إذا كان $f(x*y) = f(x)\circ f(y)$ لكل $x,y \in G$

تعريف(٢-٢):

ليكن $f : G_1 \to G_2$ تشاكل ولنرمز ل e_2 العنصر المحايد للزمرة G_2 نسمي المجموعة $\{a \in G_1 : f(a) = e_2\}$ بنواة f ونرمز لها بالرمز ker f اذن Ker f=$\{a \in G_1 : f(a) = e_2\}$.

نظرية(٢-١):

ليكن $f : G_1 \to G_2$ تشاكل فإن:

١) $f(e_1) = e_2$

٢) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ لكل $a \in G$

٣) اذا كانت $A \le G_1$ فإن $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \le G_2$

٤) اذا كانت $B \le G_2$ فإن $f^{-1}(B) = \{b \in G \mid (b) \in B\} \le G_1$

٥) اذا كانت $f^{-1}(B) \lhd G_2$ فإن $f^{-1}(B) \lhd G_1$

٦) اذا كانت $A \lhd G_1$ ،تطبيق شامل فإن $f(A) \lhd G_2$

٧) اذا كانت $A \leq G_1$ ، $\ker f \subseteq A$ فإن $A = f^{-1}(f(a))$

نظرية(٢-٢):

ليكن $f : G_1 \to G_2$ تشاكل فإن:

١) $\ker f \lhd G_1$

٢) $\ker f = \{e_1\}$ اذا وفقط اذا كان **f** تطبيق احادي<<متباين>>.

تعريف(٢-٣):

ليكن $f : G_1 \to G_2$ تشاكل

١) نقول ان f تشاكل غامر او شامل(epimorphism) اذا كان **f** تطبيق شامل في هذه الحالة نقول ان G_2 صورة تشاكلية (homomorphism image) للزمرة G_1

٢) نقول ان f تشاكل احادي (monomorphism) اذا كان f تطبيق احادي

٣) نقول ان f تماثل(isomorphism)اذا كان f تقابل (اي احادي وشامل)

٤) نقول ان الزمرتين G_1 ، G_2 متماثلتان(isomorphic)ونكتب $G_1 \cong G_2$ اذا وجد تماثل $f : G_1 \to G_2$

مثال(٢-١):

التطبيق $f : (R^*, +) \to (R^+, .)$ المعرف بالقاعدة $f(x) = e^x$ لكل $x \in R^*$ تشاكل،

لأنه لكل $x, y \in R^*$ لـديـنـا $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y$

الآن $\ker f = \{x \in R^* : f(x) = 1\} = \{x \in R^* : e^x = 1\} = \{0\}$ ، ولذا فإن f احـــادي كـمـــا

ان f شامل لأنه لكل $y \in R^+$ لدينا $f(\ln y) = e^{\ln y} = y$. اذن $(R^*, +) \cong (R^+, .)$.

مثال(٢-٢):

التطبيق $(R^*,.)\to(R^+,.)$: المعرف بالقاعدة $f(x)=|x|$ لكل $x\in R^*$ تشاكل، لأنه

لكل $x,y\in R^*$ لـديـنـا $f(xy)=|xy|=|x||y|=f(x)f(y)$.

الآن $\ker f=\{x\in R^*:|x|=1\}=\{-1,1\}$

لذا فإن f ليست احادي.

لاحظ ان f تشاكل شامل.

مثال(٢-٣):

التطبيق $f:(Z,+)\to(Z,+)$ المعرف بالقاعده $f(x)=2x$ لكل $x\in Z$ تشاكل، لأنه لكل $x,y\in Z$ لديـــــنا

$f(x+y)=2(x+y)=2x+2y=f(x)+f(y)$.

مثال(٢-٤):

التطبيق $f:S_n\to Z_2$ المعرف بالقاعدة:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,x \text{ فردي}\\ 0 & ,x \text{ زوجي}\end{cases}$$

تشاكل، لأنه لكل $x,y\in S_n$ لدينا $f(x\circ y)=f(x)+f(y)$ <<تحقق من ذلك>>

ويمكن أخذ حالة خاصة $f:S_3\to Z_2$

من الواضح ان f شامل. الآن $\ker f=\{x\in S_n:f(n)=0\}=A_n$ اذن f ليست احادي .

مثال(٢-٥):

التطبيق $f:(n,R)\to(R^*,.)$ المعرف بالقاعدة

لكل $A \in GL(n,R)$ $f(A)=\det A$

تشاكل،لأنه لكل $A,B \in GL(n,R)$

لدينا $f(AB)=\det(AB)=(\det A)(\det B)=f(A)f(B)$

مثال(٢-٦):

سنثبت ان$(C,+)\cong(R\times R,+)$ نعرف التطبيق $f:C\to R\times R$ بالقاعدة

$$f(x+iy)=(x,y)$$

لكل $x+iy\in C$ عندئذ لكل $a+ib,c+id$ لدينا

$$f((a+ib)+(c+id))=f((a+c)+i(b+d))=(a+c,b+d)$$

$$=(a,b)+(c,d)=f(a+ib)+f(c+id)$$

ولذا فإن f تشاكل ومن الواضح انه احادي وشامل .

ولذا فإن f تقابل وبالتالي فإنهما متماثلتان.

نظرية (٢-٣): نظرية كيلي

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$

١) التطبيق $\lambda_a : G \to G$ المعرف بالقاعدة $\lambda_a(x)=ax$ لكل $x \in G$ تبديلا"

٢) $H=\{\lambda_a : a \in G\} \leq S_G$

٣) $G \cong H$

وهذا يعني ان كل زمرةG تماثل زمرة جزئية من زمرة التباديل S_G.

مثال(٢-٧):

إذا كانت $G=V_4$ فأوجد زمرة جزئية من S_4 تماثل G. لتكن $f_\alpha : G \to G$ معرفة

كالتالي $f_\alpha = \alpha x$ لكل $x \in G$ اذن اذا كانت $\alpha = 1$

فإن $f_1(x)=x$ لكل $x \in G$ وهذا يعني $f_1 = (1)$

$\alpha = a$ فإن $f_a(x)=ax$ وعليه فإن $f_a = (1a)(b\ ab)$

$\alpha = b$ فإن $f_b(x)=bx$ وعليه فإن $f_b = (1b)(a\ ab)$

$\alpha = ab$ فإن $f_{ab}(x)=abx$ وعليه فإن $f_{ab}=(1ab)(a\ b)$

في نهاية هذا الفصل نقدم النظريات الأساسية للتماثل:

نظرية(٢-٤): (النظرية الأساسية الأولى (first isomorphism theorm))

إذا كان $f:G_1 \to G_2$ تشاكلا" فإن $G_1 \backslash \ker f \cong f(G_1)$

نتيجة(٢-١):

إذا كان $f:G_1 \to G_2$ تشاكل شامل فإن $G_1 \backslash \ker f \cong G_2$

مثال(٢-٨):

بالرجوع إلى المثال(٢-٢) نجد ان التطبيق $f:(R^*,.) \to (R^*,.)$ المعرف بالقاعدة

$f(x)=|x|$ تشاكل شامل وان

$\mathrm{Ker}\ f=\{-1,1\} \cong Z_2$

اذن بإستخدام النظرية الأولى للتماثل نجد $(R^*,.)\backslash Z_2 \cong (R^*,.)$.

مثال(٢-٩):

بالرجوع إلى المثال (٢-٤) نجد ان التطبيق $f:S_n \to Z_2$ المعرف بالقاعدة $f(x)=1$ اذا كان x فرديا" و $f(x)=0$ اذا كان زوجيا"،تشاكلا" شاملا" وان $\ker f=A_n$ اذن $S_n \backslash A_n \cong Z_2$.

تكمن أهمية النظرية الأولى للتماثل في أنها تكشف لنا عن وجود تقابل بين الصور التشاكلية لزمرة G وبين الزمر الجزئية الناظمية من G

ولتوضيح هذا التقابل لاحظ انه اذا كان $f:G\to G_1$ تشاكل شامل فإنه بإستخدام نظرية التماثل الأولى نستطيع ايجاد زمرة جزئية ناظمية $\ker f=K$ من G بحيث يكون $G\backslash K\cong G_1$ وبالعكس لكل زمرة جزئية ناظمية K من G تكون $G\backslash K$ صورة تشاكلية للزمرة ،اذن نخلص إلى انه لإيجاد صور التشاكلية يكفي ان نجد زمر Gالجزئية الناظمية.

مثال(٢-١٠):

لاحظ ان الزمر الجزئية الناظمية من S_3 هي S_3، $A=<(1\ 2\ 3)>$، $\{e\}$ ولذا فإن صور S_3التشاكلية هي:

$$S_3 \backslash S_3 \cong \{e\}\text{،}S_3 \backslash A\cong Z_2\text{،}S_3 \backslash\{e\} \cong S_3$$

نظرية(٢-٥): (النظرية الأساسية الثانية Second isomorphism theorem)

إذا كانت $A\leq G$ ، $B\lhd G$ فإن $A\backslash(A\cap B)\cong AB\backslash B$

مثال(٢-١١):

اذا كانت $G=S_n$ ، $A=<(1\ 2)>$ ، $B=A_n$ فإن $A\cap B=\{e\}$ لأن $(1\ 2)$ فردي،

بإستخدام النظرية الثانية للتماثل نجد أن $AA_n \backslash A_n \cong A\backslash(A\cap A_n)\cong A\cong Z_2$

مثال(٢-١٢):

$$G = Z \times Z \times Z,\ \ A = Z \times Z \times \{0\}\ ,$$

$$B = \{0\} \times Z \times Z$$

$$AB = \{\ ab : a \in A\ ,\ b \in B\ \}$$

$$AB = \{\ (\ a\ ,\ a_1\ ,\ 0\ ) * (\ 0\ ,\ b\ ,\ b_1\ ) : a\ ,\ a_1\ \in A\ ;\ \ b\ ,\ b_1\ \in\ \ B\ \}$$

$$= \{\ (a\ ,\ a_1\ +\ b\ ,b_1\ ) \in\ Z \times Z \times Z$$

$$A\cap B = \{0\} \times Z \times \{0\}\quad ,\quad (\ AB\ ) / B \cong Z\quad ,\quad A / (\ A \cap B\ ) \cong Z$$

نظرية(٢-٦): (النظرية الأساسية الثالثة Third isomorphism theorem)

إذا كانت كل من A ، B زمرة جزئية ناظمية من G حيث $B \leq A$

١) $A / B \lhd G / B$

٢) $G / B\ /\ A / B \cong G / A$

مثال(٢-١٣):

لاحظ ان $6 Z \lhd 2 Z \lhd Z$

و بالتالي فان

$$\frac{Z}{2Z} = \{2Z+0\ ,\ 2Z+1\} \cong z_2$$

بينما

$$\frac{Z}{6Z} = \{6Z,\ 6Z+1\ ,\ 6Z+2\ ,\ 6Z+3\ ,\ 6Z+4, 6Z+\ 5\} \cong Z_6$$

$$\frac{2Z}{6Z} = 2Z = \langle 2 \rangle$$

وبتطبيق نظرية التماثل الثالثة نجد أن

$$\left(\frac{Z}{6Z}\right) / \left(\frac{2Z}{6Z}\right) \cong \frac{Z_6}{(2)} \cong Z_2 \cong \frac{Z}{2Z}$$

تمارين محلولة:

(١) بين ما إذا كان التطبيق تشاكلاً من الزمرة G_1 الى الزمرة G_2 ثم عين ker f .

أ) $f : (Z ، +) \to (R ، +)$ معرف بالقاعدة $f (a) = a$

الحل :

لكل $a , b \in Z$ نجد ان $f (a + b) = a + b = f (a) + f (b)$

$$\ker f = \{ a \in z : f (a) = 0 \} = \{ 0 \}$$

ب) $f :(R,+) \to (R^*,.)$ و معرف بالقاعدة $f(x) = 3^x$

الحل:

لكل $x,y \in R$ نجد أن :

$$f(x+y) = 3^{x+y} = 3^x \ 3^y = f(x).f(y)$$

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x \in R : \ f(x) = 1\} \\ &= \{x \in R : \ 3^x = 1\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

متباين لأنه إذا كان:

$$f(x) = f(y)$$

$$3^x = 3^y$$

$$x = y$$

لإثبات انه شامل :

نثبت انه لكل $y \in R^*$ يوجد $x \in R$ بحيث ان $f(x) = y$

$$3^x = y \Leftrightarrow x = \log_3 y$$

$$f(x) = f(\log_3 y) = 3^{\log_3 y} = y$$

ج) $f:(R^*,.) \to (R^*,.)$ و معرف بالقاعدة $f(x) = x^2$.

الحل :

لكل $x,y \in R^*$ نجد أن

$$f(xy) = (xy)^2 = (xy)(xy) = (xx)(yy) = x^2y^2 = f(x)f(y)$$

لأن $(R^*,.)$ ابدالية .

$$\ker f = \{x \in R^* : x^2 = 1\}$$
$$= \{1,-1\}$$

ليس متباين لأنه مثلاً

$$f(2) = f(-2)$$
$$4 = 4$$

لكن $2 \neq -2$

بالتالي ليس تماثل .

د) $f:(R^*,.) \to (R,+)$ و معرف بالقاعدة $f(x) = \ln x$.

الحل:

لكل $x,y \in R$ نجد ان

$$f(xy) = \ln(xy) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y)$$

$$\begin{aligned}\ker f &= \{x\in R^*,\ f(x)=0\}\\ &= \{x\in R^*,\ \ln x = 0\}\\ &= \{1\}\end{aligned}$$

متباين لأن

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y)\\ \ln x &= \ln y\\ x &= y\end{aligned}$$

لإثبات انه شامل

نريد اثبات انه لكل $y\in R$ يوجد $x = e^y \in R^*$ بحيث ان:

$$\begin{aligned} f(x) &= y\\ \ln x &= y\\ x &= e^y\end{aligned}$$

نؤثر بالدالة الأسية

$$f(x) = f(e^y) = \ln(e^y) = y$$

بالتالي فانه لكل $y\in R$ يوجد $x\in R^*$ بحيث ان $f(x)=y$.

هـ) $f : S_4 \to S_3$ المعرف بالقاعدة

$$f(\sigma) = \begin{cases}(12) & , \sigma \text{ فـردي}\\ (1) & , \sigma \text{ زوجي}\end{cases}$$

الحل:

إذا كان كلا من σ_2, σ_1 تباديل فردية في S_4 فان ناتج التحصيل تبديله زوجية

وهذا يعني ان $f(\sigma_1\sigma_2)=1$

$$f(\sigma_1)\ f(\sigma_2)=(12)\ (12)=1$$

إذا كان كلا من σ_2, σ_1 تباديل زوجية

$$f(\sigma_1\sigma_2)=1$$

$$f(\sigma_1)\ f(\sigma_2)=(1)\ (1)=1$$

اذا كان σ_1 تبديله فردية ، σ_2 تبديلة زوجية فان ناتج التحصيل فردي

$$f(\sigma_1\sigma_2)=(12)\ (1)$$

$$f(\sigma_1)\ f(\sigma_2)=(12)\ (1)=(12)$$

$$\ker f = \{\ \sigma \in s_4 :\ f(\sigma)=1\}$$

$=\{\ \sigma \in s_4$: التباديل الزوجية$\}$

$$\cong\ A_4$$

ليس متباين لأنه:

$$\sigma_1=(1243)\quad ,\sigma_2=(1234)$$
$$f(\sigma_1)=(12)$$
$$f(\sigma_2)=(12)$$

اي ان $f(\sigma_1)=f(\sigma_2)$ لكن $\sigma_1\neq\sigma_2$ بالتالي ليس تماثل .

و) $f: Z_3 \to S_3$ و معرف بالقاعدة

$$f(2) = (1\,3\,2)$$
$$f(1) = (1\,2\,3)$$
$$f(0) = 1$$

الحل:

$Z_3 = \{0,1,2\}$ ندرس جميع عناصر Z_3

لكل $0,1 \in z_3$ نجد ان

$$f(0+1) = f(1) = (123) \quad f(0) \circ f(1)$$

$0,2 \in z_3$ نجد ان

$$f(0+2) = f(2) = (132) \quad f(0) \circ f(2)$$

$1,2 \in z_3$ نجد ان

$$f(1+2) = f(0) = (1) \quad f(1) \circ f(2)$$

بالتالي فان التطبيق المتبقي تشاكل

$$\ker f = \{x \in z_3 : f(x) = 1\}$$
$$= \{0\}$$

التطبيق ليس شامل لأنه يوجد $y \in s_3$ ولكن لايوجد $x \in z_3$ بحيث ان $f(x) = y$

$\therefore$ ليس تماثل

ز) $f : Z \to G$ معرفاً بالقاعدة $A_n : f(n)$ حيث :

$$G = \left\{A_n \in GL(2,Z) : A_n = \begin{bmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{bmatrix}, n \in Z\right\}$$

الحل :

لكل $x, y \in Z$ نجد أن $f(x+y) = A_{x+y} = f(x)f(y)$

$$A_{x+y} = \begin{bmatrix} 1-(x+y) & -(x+y) \\ x+y & 1+x+y \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1-x & -x \\ x & 1+x \end{bmatrix} \quad , \quad f(y) = \begin{bmatrix} 1-y & -y \\ y & 1+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \begin{bmatrix} 1-x & -x \\ x & 1+x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-y & -y \\ y & 1+y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-x)(1-y)-xy & (1-x)(-y)-x-xy \\ x(1-y)+y+yx & -xy+(1+x)(1+y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-y-x-xy-xy & -y+xy-x-xy \\ x-xy+y+xy & -xy+1+y+x+xy \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-y-x & -y-x \\ x+y & 1+y+x \end{bmatrix} \\ &= f(x+y) \end{aligned}$$

$$\ker f = \left\{x \in z : f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left\{x \in z : \begin{bmatrix} 1-x & -x \\ x & 1+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \{0\}$$

ح) $f : Z \times Z \to 2Z$ معرفاً بالقاعدة $f(x, y) = 2x$

الحل :

لكل $x , y \in z \times z$ بأخذ $x = (a , b) , y = (c , d)$

$$= 2(a + c) = 2a+2c$$

$$= f(a , b) + f(c , d)$$

$$\ker f = \{ (a , b) \in z \times z : f(a , b) = 0 \}$$

$$= (0 , b)$$

ط) $f : 2Z \to Z \times Z$ معرفاً بالقاعدة $f(2x) = (x , 0)$

الحل :

لكل $x , y \in z$ نجد ان

$$= (x , 0) + (y , 0)$$

$$= f(2x) + f(2y)$$

$$\ker f = \{ x \in 2z : (x , 0) = (0 , 0) \}$$

$$= \{ 0 \}$$

(٢) جد جميع التشاكلات من $Z_2 \times Z_3$ الى Z_6؟ .

الحل :

$$|1| = |5| = 6$$

$$|2| = |4| = 3$$

$$|3| = 2$$

بالنسبة للزمرة $Z_2 \times Z_3$

رتبة العنصر 1 في Z_2 تساوي 2

رتبة العنصرين 2 , 1 في Z_3 تساوي 3

اذن رتبة العنصرين (1 , 1) و (1 , 2) تساوي 6 في $Z_2 \times Z_3$

بينما رتبة العنصر (1 , 0) تساوي 2

بينما رتبة العنصرين (0 ، 2) ، (0 ، 1) تساوي3

اذن يوجد ٣ تشاكلات

$$f_2 : (0,0) \to 0 \quad (1,1) \to 5 \quad (1,2) \to 1$$

$$f_1 : (0,0) \to 0 \quad (1,1) \to 1 \quad (1,2) \to 5$$

الوحدة f_0

(٣) جد جميع التشاكلات من $Z_2 \times Z_5$ الى Z_{10} ؟.

الحل:

$$|1|=|3|=|7|=|9|=10$$

$$|2|=|4|=|6|=|8|=5$$

$$|5|=2$$

بالنسبة لـ $Z_2 \times Z_5$:

رتبة العنصر 1 في Z_2 تساوي 2

رتبة جميع العناصر في Z_5 تساوي 5

اذن رتبة $(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)$ تساوي 5

رتبة العنصر $(0,1)$ تساوي2

رتبة العناصر $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)$ تساوي10

اذن يوجد ٥ تشاكلات

الوحدة f_0

$$f_1 : (0,0) \to 0$$
$$(1,1) \to 1$$
$$(1,2) \to 3$$
$$(1,3) \to 7$$
$$(1,4) \to 9$$

$$f_2 : (0,0) \to 0$$
$$(1,1) \to 7$$
$$(1,2) \to 9$$
$$(1,3) \to 1$$
$$(1,4) \to 3$$

$$f_3 : (0,0) \to 0$$
$$(1,1) \to 3$$
$$(1,2) \to 7$$
$$(1,3) \to 9$$
$$(1,4) \to 1$$

$$f_4 : (0,0) \to 0$$
$$(1,1) \to 9$$
$$(1,2) \to 1$$
$$(1,3) \to 3$$
$$(1,4) \to 7$$

(٤) جد جميع التماثلات من $Z_8 \leftarrow Z_8$ ؟

الحل :

عدد مولدات Z_8 هي 4 مولدات وهي

$$\langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle$$

لذلك يوجد 4 تماثلات.

(٥) جد جميع التماثلات من $Z_{12} \to Z_{12}$ ؟

الحل :

عدد مولدات Z_{12} هي 4 مولدات وهي $1,5,7,11$ لذلك هناك 4 تماثلات.

(٦) جد جميع التماثلات من $Z_6 \to Z_6$ ؟

الحل:

عدد مولدات Z_6 هي مولدين فقط وهما $1,5$ لذلك هناك تماثلين فقط.

(٧) هل $(Q,+)\backslash(Z,+) \cong (Q,+)$ ؟

عناصر Q/Z عبارة عن صفوف تجاور ومن مسألة سابقة أن صفوف تجاور

Z في Q على الصورة $Z+r$ حيث $0 \le r < 1$

الحل:

$$Q \backslash Z = \{z+q \ , \ q \in Q\}$$

نعرف راسم

$$f : Q \backslash Z \to Q$$

$$Z+q \to q$$

١) لاثبات انه تشاكل:

نفرض $z+q_1, z+q_2 \ \in Q \backslash Z$ فإن:

$$f(z+q_1)+(z+q_2) = f(z+(q_1+q_2)) = q_1+q_2$$

٢) لاثبات انه آحادي: نفرض $z+q_1, z+q_2 \in Q\setminus Z$ بحيث

$$f(z+q_1)=f(z+q_2)$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow z+q_1=z+q_2$$

٣) لاثبات انه شامل: نفرض ان لكل $q\in Q$ اذا $z+q \in Q\setminus Z$ بحيث $f(z+q)=q$

(٨) بين اياً من العبارات التالية صحيحة وايها خاطئة :

أ) يوجد تشاكل بين أي زمرتين . (صحيحة)

ب) يوجد تشاكل غير تافه بين أي زمرتين .(خاطئة)

ج) يوجد تشاكل من زمرة غيرمنتهية الى زمرة منتهية.(صحيحة)

د) من الممكن أن أي زمرتين من الرتبة 5 يجب أن تكونا متماثلتين.(صحيحة)

هـ) أذا كانت كل من G و H زمرة منتهية حيث $|G|=|H|$ فإن $G\cong H$.(خاطئة)

و) أذا كانت كل من G و H زمرة منتهية حيث $G\cong H$ فإن $|G|=|H|$.(صحيحة)

ز) من الممكن أن تماثل زمرة إبدالية زمرة غير إبدالية.(خاطئة)

ح)اذا كان $f:Z_8 \to Z_4$ تشاكل غامر فان $\ker f=\{(0),(4)\}$.

ط) $S_3 \not\cong Z_6$

ك)التطبيق $f:(C,+)\to(R,+)$ المعرف بالقاعده $f(x+iy)=x+y$ تشاكل شامل (صحيحة)

ل)التطبيق $f:(C^*,+)\to(R^*,+)$ المعرف بالقاعدة $f(a+ib)=a^2+b^2$ تشاكل .

التوضيح:

ح)العباره صحيحة

$$\ker\ f = \{ x \in z_8 : f(x) = 0\} = (0,4)$$

ط)العباره صحيحة

Z_6 دائرية ، S_3 غير دائرية .

ل)العباره صحيحة

لكل $(a+ib)(c+id) \in C^*$ فان

$$\begin{aligned}
&f(ca+ib).(c+id) = \\
&f((cac-bd)+i(ad+bc)) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \\
&= a^2c^2 + b^2d^2 - 2ac.bd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2bcad \\
&= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\
&= (a^2+b^2).(c^2+d^2) \\
&= f(a+ib).f(c+id)
\end{aligned}$$

(٩) أثبت أن $Z_6 \not\cong S_3$ ولكن كل زمرة جزئية فعلية H من S_3 تماثل زمرة جزئية فعلية K من Z_6؟

الحل:

S_3 غير دائرية ، Z_6 دائرية .

S_3 غير إبدالية ، Z_6 إبدالية .

$$Z_6=\{0,1,2,3,4,5\} \text{ ، } S_3=\langle a,b \mid a^3=b^2=(ab)^2=1\rangle$$

$$=\{1,a,a^2,b,ab,a^2b\}$$

$H=\langle a\rangle=\{1,a,a^2\}=\langle a\rangle^2$ تماثل زمرة جزئية فعلية من Z_6 وهي $K=2,4$

$H=\langle 1\rangle,\langle ab\rangle,\langle a^2b\rangle,\langle b\rangle$ تماثل زمرة جزئية فعلية من Z_6 وهي $K=3$

(١٠) اذا كانت $H\le S_4$ مولدة بالعنصرين $\alpha=(1234),\beta=(24)$ .. فأثبت أن $H\cong D_4$؟.

الحل:

$$H=\{(1),(1234),(13)(24),(1432),(24),(12)(34),(13),(14)(23)\}$$

$$D_4=\langle a,b \mid a^4=b^2=(ab)^2=1\rangle$$

$$|a|=|a^3|=4$$
$$|a^2|=|b|=|ab|=|a^2b|=|a^3b|=2$$

بتعـريف الراسم:

$$H\to D_4$$
$$(1)\to 1$$
$$\alpha=(1234)\to a$$
$$\beta=(24)\to b$$

(١١) إذا كانت $H \leq GL(2,C)$ مولدة بالعنصرين $B=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ .. فأثبت أن $H \cong Q_8$ ؟.

الحل:

$$H=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\right\}$$

$$Q_8=\langle a,b \mid a^4=1, a^4=b^2, aba=b\rangle$$
$$=\{1,a,a^2,a^3,b,b^3,ab,a^3b\}$$
$$|a|=|a^3|=|b|=|b^3|=4$$
$$|a^2|=|ab|=|a^3b|=2$$

بتعريف الراسم:

$$H \rightarrow Q_8$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow 1$$
$$A \rightarrow a$$
$$B \rightarrow b$$

(١٢) أثبت أن Z_9 ليست صورة تشاكلية للزمرة $Z_3 \times Z_3$ ؟

الحل:

$f: Z_3Z_3 \rightarrow Z_9$ تشاكل شامل فإن $Z_3 \times Z_3 \backslash \ker f \cong Z_9$ لذا فإن $\ker f=\{e\}$ اي ان f هو التشاكل التافه.

(١٣) اثبتي ان Z_8 ليست صورة تشاكلية للزمرة Z_{15}؟

الحل:

نفرض انه يوجد صورة تشاكلية $f: Z_{15} \to Z_8$ عندئذ يوجد تشاكل غامر $\frac{Z_{15}}{\ker f} \cong Z_8$

$\ker f \le Z_{15}$، الزمرة الجزئية من Z_{15} هي زمر من الرتبة 3 واخرى من الرتبة 5

$$\ker f \cong Z_5 \qquad\qquad \ker f \cong Z_3$$

$$\frac{Z_{15}}{Z_5} \cong Z_8 \qquad \text{او} \qquad \frac{Z_{15}}{Z_3} \cong Z_8$$

وهذا غير متحقق.

(١٤) إذا كانت $N \lhd G, M \lhd G$ وكانت $H \le G$ حيث $H \cap M = H \cap N$ فأثبت

$HN \setminus N \cong HM \setminus M$؟.

الحل:

بتطبيق نظرية التماثل الثانية:اذا كانت $H \le G,\ N \lhd G$ فإن $HN \setminus N \cong H \setminus H \cap N$

بما ان $H \cap M = H \cap N$ اذن $HN \setminus N \cong H \setminus H \cap M$

وهذا يؤدي الى ان $M \lhd G,\ H \le G$

$\cong HM \setminus M$

(١٥) استخدم مبرهنة التماثل الأولى لإثبات تماثل الزمرتين:

أ) $Z_{12} \setminus Z_4 \cong Z_3$

الحل:

$$f : Z_{12} \to Z_3$$

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x \in Z_{12} : f(x) = 0\} \\ &= \{0,3,6,9\} \cong Z_4 \end{aligned}$$

$$\ker f = Z_4$$

ب) $(Q^*,.) \setminus Z_2 \cong (Q^+,.)$

الحل: $f : Q^* \to Q^+$ المعرف بالقاعدة $f(x) = |x|$ تشاكل شامل

لكل $y \in Q^+$ يوجد $x \in Q^*$ بحيث

$$f(x) = y$$

$$y = |x| = \sqrt{x^2}$$

$$x = \sqrt{y^2}$$

$$f(x) = |\sqrt{y^2}| = \sqrt{y^2}$$

$$y = f(x)$$

اذن شامل.

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x \in Q^* : f(x) = 1\} \\ &= \{x \in Q^* : |x| = 1\} \\ &= \{-1,1\} \cong Z_2 \end{aligned}$$

$$\ker f = Z_2$$

ج) $f:(C,+)\backslash(R,+)\cong(R,+)$

الحل:

$f:C\to R$ *معرف بالقاعدة* $f(x+iy)=x$ *تشاكل شامل*

لكل $x\in R$ *يوجد* $x+iy$ *بحيث* $f(x+iy)=x$

$$\ker f=R$$

(١٦) اثبت ان $\frac{4Z}{12Z}\cong Z_3$ ؟

الحل:

$$\begin{array}{ccc} f:4Z & \to & Z_3 \\ 0 & \to & 0 \\ 4 & \to & 1 \\ 8 & \to & 2 \\ 12 & \to & 0 \\ 16 & \to & 1 \\ 20 & \to & 2 \\ 24 & \to & 0 \end{array}$$

مما سبق نجد ان $\ker f=\{0,12,24,\ldots\}\cong 12Z$ ***بتطبيق نظرية التماثل الأولى***

نجد ان $\frac{4Z}{12Z}\cong Z_3$.