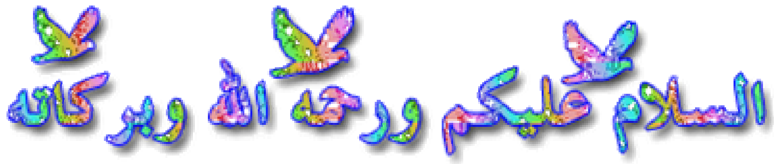
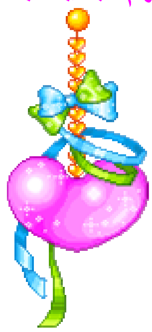
هذه المجموعة من الدروس في نظرية الزمر من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com



سأقدم لكم بإذن الله شرح كامل ووافي لـ 7 فصول في الزمره في مواضيع منفصلة هي عبارة عن بحث التخرج لصديقاتي المقربات وقد أحببن أن يستفيد الجميع من هذا البحث لأنهم بذلوا مجهود كبير فيه فأرجوا منكم الدعاء لهم جميعا بالتوفيق بالدنيا والآخرة



المراجع المستخدمة في 7 فصول:

***نظرية الزمر**

أ . د / صفوان محمد عادل عويره

أ . د / محمود عبدالباقي محمد أحمد

***نظرية الزمر**

د / معروف عبدالرحمن سمحان

د / فوزي بن أحمد صالح الذكير

***مواضيع في الجبر**

اي.ان-هيرستين

***المدخل الى نظرية الزمر**

أ.د فالح الدوسري

أ.عبد الحميد بيك

الفصل الرابع

الضرب المباشر للزمر

Direct Product of Groups

إذا كانت لدينا زمرتان G,H يمكننا إنشاء زمرة جديدة من الضرب الديكارتي
(Cartesian Product)
وفي بعض الأحيان الزمرتان G,H يمكن أن تتماثل مع الضرب المباشر للزمرتين G,H .

وسوف ندرس في هذا الفصل زمرة الضرب المباشر بشئ من االتفصيل كذلك نبين
كيفية تفريق أي زمرة كحاصل ضرب مباشر لبعض زمرها الجزئية.

تعريف(٤-١):

إذا كانت $G_1 \times G_2 \times \dots\dots\dots \times G_n$ زمرا" وأن
$G = G_1 \times G_2 \times \dots\dots\dots \times G_n$
زمرة حيث العملية الثنائية المعرفة على Gهي:

$$(a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n)(b_1, b_2, \dots\dots\dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots\dots\dots, a_n b_n)$$

تسمى الزمرة G زمرة الضرب المباشر الخارجي (External Direct Product) للزمر. $G_1 \times G_2 \times \dots\dots\dots \times G_n$

مثال(٤-١):

لتكن R زمرة الأعداد الحقيقية مع الجمع ، الضرب المباشر ل R مع نفسها $R^2 = R \times R$ وهي كذلك زمرة مع عملية الجمع في كل احداثي..

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

والعنصر المحايد للزمرة R^2 هي $(0,0)$ ومعكوس العنصر (a,b) هو $(-a,-b)$.

مثال(٤-٢):

لتكن $(Z,+),(C^*,\cdot)$ زمرتان

$$Z \times C^* = \left((x,y): x \in Z, y \in C^*, *\right)$$

زمرة عنصرها المحايد هو $(0,1)$، ومعكوس العنصر $(x\ ,\ y)$ هو $(-x\ ,\ y^{-1})$ حيث

* العملية الجبرية الثنائية بالشكل :

$$(x,y)*(z,t)=(x+z\ \ ,\ y\cdot t)$$

إذن، $(Z \times C^*,*)$ زمرة الضرب المباشر الخارجي للزمرتين $(Z,+),(C^*,\cdot)$.

مثال(٤-٣):

إذا كانت

$G_1 = \left\langle a : a^3 = 1 \right\rangle$,$G_2 = \left\langle b : b^4 = 1 \right\rangle$ زمرتان ما.

$G_1 = \{1,a,a^2\}$ ،$G_2 = \{1,b,b^2,b^3\}$

$$G_1 \times G_2 = \{(1,1),(1,b),(1,b^2),(1,b^3),(a,1),(a,b),(a,b^2),$$
$$(a,b^3),(a^2,1),(a^2,b),(a^2,b^2),(a^2,b^3)\}$$

إذن، G زمرة الضرب المباشر الخارجي للزمرتين G_1, G_2 .

مثال(٤-٤):

لتكن $Z_2 \times Z_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ بالرغم من أن

$$|Z_2 \times Z_2| = 4$$

تساوي رتبة الزمرة Z_4 ولكن $Z_2 \times Z_2 \neq Z_4$ كل عنصر من (a,b) في $Z_2 \times Z_2$ من الرتبة الثانية ، بينما Z_4 دائرية تحتوي عنصر من الرتبة الرابعة.

مثال(٤-٥):

أثبتي أن:

$$Z_2 \times Z_3 \cong Z_6$$

الحل:

بما أن $Z_2 = \{0,1\},\ Z_3\{0,1,2\}$ فإن:

$$Z_2 \times Z_3 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

وأن:

$$2(1,2)=(1,2)+(1,2)=(0,1)$$
$$3(1,2)=(1,2)+(0,1)=(1,0)$$
$$4(1,2)=(1,2)+(1,0)=(0,2)$$
$$5(1,2)=(1,2)+(0,2)=(1,1)$$
$$6(1,2)=(1,2)+(1,1)=(0,0)$$

فإن رتبة العنصر $(1,2)$ من $Z_2 \times Z_3$ تساوي 6 وبالتالي فإنه يولد الزمرة $(Z_2 \times Z_3, *)$

أي إنها زمرة دائرية وبما أن زمرة دائرية رتبتها منتهية و لتكن n ، تماثل الزمرة $(Z_n, \oplus)$

فإن:

$$Z_2 \times Z_3 \cong Z_6$$

حيث الزمر الدائرية من الرتبة نفسها تكون متماثلة .

ملاحظة:

يمكن تعميم مفهوم الضرب الخارجي لعدد منته من الزمر بالشكل الآتي :

لتكن $(G_i, *_i)$ حيث $i=1,2,.......,n$ عائلة من الزمر ، ولنعرف

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \times G_2 \times .... \times G_n$$

نظرية(٤-١):

إذا كانت $G = G_1 \times G_2 \times .... \times G_n$

وكان

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in G$$

حيث $o(a_i) = r_i$ لكل $1 \le i \le n$ فان :

$$o(a) = lcm(r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots, r_n)$$

هو المضاعف المشترك الأصغر.

مثال(٤-٦):

احسب رتبة العنصر

$(8,4,10) \in Z_{12} \times Z_{60} \times Z_{24}$.

الحل:

لاحظ أن :

$$o(4) = \frac{60}{god(60,4)} = 15$$

$$o(8) = \frac{12}{god(12,8)} = 3$$

$$o(10) = \frac{24}{god(24,10)} = 12$$

إذن ،

$$o(8,4,10) = lcm(3,15,12,) = 60$$

مثال(٤-٧):

جد جميع العناصر $Z_9 \times Z_3$ التي رتبة كل منها ٣.

الحل:

لنفرض أن $c=(a,b)\in Z_9\times Z_3$ حيث $o(c)=3$.

إذن،

$$lcm\,(o(a),o(b))=3$$

ولذا فإن:

العناصر التي من الرتبة ٣ في Z_9 هي $\{3,6\}$.

$$o(3)=\frac{9}{\gcd(9,3)}=3$$

$$o(6)=\frac{9}{\gcd(9,6)}=3$$

العناصر التي من الرتبة ٣ في Z_3 هي $\{1,2\}$.

$$o(1)=\frac{3}{\gcd(3,1)}=3$$

$$o(2)=\frac{3}{\gcd(3,2)}=3$$

١) إذا كانت $o(a)=o(b)=3$

فإن:

$c=(3,1)$ ومنه $o(c)=lcm\left(o(3),o(1)\right)=3$

$c=(6,2)$ ومنه $o(c)=lcm\left(o(6),o(2)\right)=3$

$c=(6,1)$ ومنه $o(c)=lcm\left(o(6),o(1)\right)=3$

٢) إذا كانت $o(a)=3$ ، $o(b)=1$ حيث $o(0)=1$

فإن:

$c=(3,0)$ ومنه $o(c)=lcm\left(o(3),o(0)\right)=3$

$c=(6,0)$ ومنه $o(c)=lcm\left(o(6),o(0)\right)=3$

٣)إذا كانت $o(b)=3$ ،$o(a)=1$ حيث$o(0)=1$
فإن:

$c=(0,1)$ ومنه $o(c)=lcm\left(o(0),o(1)\right)=3$

$c=(0,2)$ ومنه $o(c)=lcm\left(o(0),o(2)\right)=3$

فإن جميع العناصر التي من الرتبة ٣ في $Z_9\times Z_3$ هي:

$$\{(3,1),(3,2),(6,1),(6,2),(3,0),(6,0),(0,1),(0,2)\}$$

نظرية(٤-٢):

إذا كانت كل من $G=\langle a\rangle, H=\langle b\rangle$ زمرة دائرية (Cyclic Group) منتهية من الرتبة n,m على التوالي فان $G\times H$ زمرة دائرية اذا وفقط اذا كان $\gcd(m,n)=1$.

نتيجة (٤-١):

لتكن $G_1\times G_2\times.........\times G_n$ زمرة دائرية منتهية رتبها $m_1\times m_2\times......\times m_n$ على التوالي .عندئذ $G=G_1\times G_2\times..........\times G_n$ زمرة دائرية اذا وفقط اذا كان $\gcd(m_i,m_j)=1$ لكل $i\neq j$.

نتيجة(٤-٢):

إذا كان $m = n_1 n_2 .... n_k$ فإن:

$$Z \cong Z_{n1} \times Z_{n2} \times .... \times Z_{nn}$$

إذا وفقط إذا كان

$\gcd(n_i, n_j) = 1$ لكل $i \neq j$.

نتيجة (٤-٣):

إذا كان $n = p_1^{n^1} p_2^{n^2} .... p_n^{n^k}$ هو تحليل العدد n إلى عوامله الأولية حيث $p_1, p_2, ..., p_n$ أعداد أولية جميعها مختلفة فان:

$$Z_n \cong Z_{p_1^{n^1}} \times Z_{p_2^{n^2}} \times .... \times Z_{p_n^{n^k}}.$$

تعريف(٤-٢):

نقول أن G هي زمرة الضرب المباشر الداخلي (Internal Direct Product للزمر الجزيئية الناظمية $H_1, H_2, ..., H_n$ من G إذا كان لكل $a \in G$ يوجد عنصر وحيد $a_i \in H$ $1 \leq i \leq n$, حيث:

$$a = a_1 a_2 ...... a_n$$

تعرف النظرية التالية بتعريف مكافىء لزمرة الضرب المباشر الداخلي.

نظرية(٤-٣):

تكون الزمرة G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزيئية الناظمية $H_1,H_2,......,H_n$ من G إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$G = H_1, H_2........H_n *$$

$$1 \le i \le n \text{ لكل } H_i \cap \left(H_1 H_2....H_{i-} H_{i+1} ....H_n\right) = \{e\} *$$

مثال(٤-٨):

لتكن الزمرة $(Z_6, \oplus)$،وبفرض أن H, F زمرتين جزيئيتين من الزمرة $(Z_6, \oplus)$

حيث أن:

$$H = \langle 3 \rangle \ , \ F = \langle 2 \rangle$$

برهن أن

$$.Z_6 = H \oplus F$$

الحل:

بما أن:

$$H \cap F = \{0\}$$
$$H \otimes F = \{0,1,2,3,4,5\} = Z_6$$

كما أن :

$H, F \lhd Z_6$ لأن الزمرة $(Z_6,\oplus)$ أبدالية فإن

$$.Z_6 = H \oplus F$$

<u>مثال(٤-٩):</u>

بفرض

$$A = \langle 5 \rangle = (\{0,5\}, \oplus)$$
$$B = (\{0,2,4,6,8\}, \oplus)$$

زمرتين جزئيتين ناظمتين من الزمرة $G = (Z_{10}, \oplus)$ برهن أن $Z_{10} \cong Z_2 \oplus Z_5$.

<u>الحل:</u>

بما أن

$$A \cap B = \{0\}$$
$$|A| \cdot |B| = |G|$$

فإن:

$$Z_{10} = A \otimes B$$

وحسب النظرية :

G زمرة منتهية و $A \;,\; B \triangleright G$ بحيث

$$A \cap B = \{0\}, G = A \cdot B, |G| = |A||B|$$

فإن: $G = A \otimes B$

وبما أن:

$$A \cong Z_2, B \cong Z_5$$

فإن :

$$Z_{10} \cong Z_2 \oplus Z_5 \;.$$

مثال (٤-١٠):

لتكن

$$V_4 = \left\langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \right\rangle$$

إذا كانت الزمر الجزئية الناظمية التالية من V_4

$$K = \langle a,b \rangle, F = \langle b \rangle, H = \langle a \rangle$$

بين فيما إذا كانت

$$.V_4 = H \otimes F \otimes K$$

الحل:

$$، V_4 = HFK \ , \ |V_4| = 4$$

$$H \cap F = F \cap K = K \cap H = \{e\}$$

بما أن

$$\left| H \otimes F \otimes K \right| = 8$$

إذن ،

$$.G \neq H \otimes F \otimes K$$

مثال (٤-١١):

لتكن $\{1, 3, 5, 7\} = \varphi(8)$ زمرة الضرب المباشر الداخلي للزمرتين الجزئيتين الناظمتين من

$$H = \{1, 3\}, K = \{1, 5\}$$

أوجد

$$.G = H \otimes K$$

الحل:

بما أن $\varphi(8)$ زمرة منتهية و $H, K \lhd G$ بحيث

$$|G| = |H||K|$$

$$H \cap K = \{1,3\} \cap \{1,5\} = \{1\}$$

فإن:

$$G = H \otimes K.$$

النظرية التالية تبين لنا إمكانية اعتبار الضرب المباشر الخارجي ضربا" مباشرا" داخليا".

نظرية (٤-٤):

إذا كانت

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots\dots\dots \times G_n$$

زمرة ضرب مباشر خارجي وكانت

$H_i = \{(e_1, \dots\dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots\dots e_n) : a_i \in G\}$ لكل $1 \le n \le i$

فان:

١) $H_i \lhd G$ لكل $1 \le i \le n$

٢) $H_i \cong G_i$ لكل $1 \le i \le n$

٣) G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية $H_1, H_2, \dots\dots, H_n$.

نظرية(٤-٥):

إذا كانت G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية
$H_1, H_2, ..., H_n$
فإن:
$.G \cong H_1 \times H_2 \times ..... \times H_n$

ملحوظة:

من النظرتين (٤-٤)و(٤-٥) نجد أن مفهومي الضرب المباشر الداخلي والخارجي
$G = H_1 \times H_2 \times .... \times H_n$

إذا كانت زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية
$.H_1, H_2, ..., H_n$

مثال(٤-١٢):

ليكن $\varphi : G \to G_1$ تشاكلاً من الزمرة Gإلى الزمرة G_1
ولتكن $H \lhd G$ وليكن $\varphi|_H : H \to G_1$ تماثلاً،
أثبت أن:
$$G = H \times Ker\varphi$$
وبين أن النتيجة ليست بالضرورة صحيحة إذا لم تكن H زمرة جزئية ناظمية من G.

الحل:

لنفرض أن $a \in G$ عندئذ،

$\varphi(a) \in G_1 = \varphi(H)$.

ولذا فإنه يوجد $h \in H$ حيث $\varphi(a) = \varphi(h)$ ومنه فإن

$$\varphi(h^{-1}a) = e_1$$

أي أن $h^{-1}a \in Ker\varphi$ وبالتالي فإن:

$$a = hh^{-1}a \in HKer\varphi$$

أي أن $G = Ker\varphi$ لنفرض أن

$$a \in H \cap Ker\varphi$$

عندئذ

$a \in H$ و $\varphi(a) = e_1 = \varphi(e)$

وبما أن $\varphi\ |_H$ أحادي فإن $a = e$ وبالتالي فإن:

$$H \cap Ker\varphi = \{e\}$$

أي أن

$$.G = H \times Ker\varphi$$

ولإثبات أن النتيجة $G = H \times Ker\varphi$ ليست صحيحة إذا لم تكن H ناظمية من G.

أعتبر

$$G = S_3, G_1 = Z_2, H = \langle 12 \rangle$$

ولاحظ أن H ليست ناظمية في G.

$$G = S_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

حيث

$$a = (123), b = (23)$$
$$H = \langle (12) \rangle = \{(1), (12)\}$$

لإثبات الناظمية $Hx = xH \quad , \forall x \in G$

$$Hx = (12)(23) = (123), \forall (23) \in G$$
$$xH = (23)(12) = (132), \forall (23) \in G$$
$$Hx \neq xH \quad , \forall x \in G$$

ليكن $\varphi : S_3 \to Z_2$ التطبيق المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma = 1, \sigma = 3 \\ 1, \sigma = 2 \end{cases}$$

من الواضح أن:

$\varphi|_H : H \to Z_2$ تماثل

وأن:

$$Ker\varphi = \{(1),(123),(132)\} = \langle (123) \rangle.$$
$$H \times Ker\varphi = \{(1),(123),(132),(23),(12)\}$$

ولكن:

$$S_3 \neq H \times Ker\varphi.$$

<u>مثال(٤-١٣):</u>

لتكن كل من K , H زمرة جزئية ناظمية من G حيث $G = H \times K$ ولتكن $N \lhd G$ حيث

$$N \cap H = N \cap K = \{e\}.$$

أثبت أن N زمرة إبدالية.

<u>الحل:</u>

لاحظ أولاً أنه إذا كان:

$n \in N \quad , h \in H$ فإن:

$$nhn^{-1} \in N \cap H = \{e\}$$

ولذا فإن:

$$nh = hn$$

وبالمثل،

$nk = kn$ لكل $k \in K, n \in N$

لنفرض أن $a,b \in N$.

بما أن $b \in G$ فإنه يوجد

$k \in K \quad , h \in H$ حيث $b = hk$.

$$ab = a(hk) = (ah)k = h(ka) = (hk)a = ba$$

وبالتالي فإن N إبدالية.

<u>تعريف (٤-٣):</u>

نقول إن الزمرة G متحللة (Decomposable) إذا كانت $G = H \times K$ غير متحللة (In Decomposable) إذا لم تكن متحللة أي إذا كان:

$$G = H \times K \Rightarrow H = \{e\} \text{ أو } k = \{e\}$$

<u>مثال(٤-١٤):</u>

S_3 غير متحللة في الحقيقة ، إذا كانت H زمرة جزيئية فعلية من S_3 فان

$H \cong Z_2$ أو أن $H \cong Z_3$، ولكن

$S_3 \neq Z_2 \times Z_3$.

مثال (٤-١٥):

$(Q,+)$ غير متحللة لأنه لو كانت $Q=H\times K$ حيث

$H\neq\{0\}$ و $K\neq\{0\}$

فإنه يوجد

$$0\neq\frac{a}{b}\in H \text{ و } 0\neq\frac{r}{s}\in K$$

بما أن: $H\leq Q$ و $K\leq Q$ فإننا نجد أن:

$$rb\left(\frac{a}{b}\right)=ra\in H \text{ وأن } as\left(\frac{r}{s}\right)=ar\in K$$

إذن، $H\cap K\neq\{0\}$ وهذا مستحيل.

وبالتالي فان Q غير متحللة.

نظرية(٤-٦):

" Z_n غير متحللة إذا وفقط إذا كان $n=p^k$ حيث P عدد أولي و $K\in Z^+$.

نظرية(٤-٧):

إذا كانت كل من G_1,G_2,G_3,G_4 زمرة فإن:

١) إذا كانت $G_1\cong G_3$ و $G_2\cong G_4$ فإن $G_1\times G_2\cong G_3\times G_4$

٢) $G_1\times G_2\cong G_2\times G_1$

٣) $G_1\times(G_2\times G_3)\cong G_1\times G_2\times G_3$

نظرية(٤-٨):

إذا كانت G زمرة ضرب مباشر لزمر غير متحللة.

تمارين محلولة

(١) احسب رتبة كل من العناصر التالية:

أ) $(8,10) \in Z_{12} \times Z_{24}$

ب) $(3,10,9) \in Z_4 \times Z_{12} \times Z_{15}$

ج) $(3,6,12,16) \in Z_4 \times Z_{12} \times Z_{20} \times Z_{24}$

الحل:

أ) $(8,10) \in Z_{12} \times Z_{24}$

لاحظ أن:

$$o(8) = \frac{12}{\gcd(12,8)} = 3$$

$$o(10) = \frac{18}{\gcd(18,10)} = 9$$

إذن،

$$o(8,10) = lcm(3,9) = 9$$

ب) $(3,10,9) \in Z_4 \times Z_{12} \times Z_{15}$

لاحظ أن:

$$o(3) = \frac{4}{\gcd(4,3)} = 4$$

$$o(10) = \frac{12}{\gcd(12,10)} = 6$$

$$o(9) = \frac{15}{\gcd(15,9)} = 5$$

إذن،

$$o(3,10,9) = lcm(4,6,5) = 60$$

ج) $(3,6,12,16) \in Z_4 \times Z_{12} \times Z_{20} \times Z_{24}$

لاحظ أن:

$$o(3) = \frac{4}{\gcd(4,3)} = 4$$

$$o(6) = \frac{12}{\gcd(12,6)} = 2$$

$$o(12) = \frac{20}{\gcd(20,12)} = 5$$

$$o(16) = \frac{24}{\gcd(24,16)} = 3$$

إذن،

$$o(3,6,12,16) = lcm(4,2,5,3) = 60$$

(٢) جد جميع العناصر من الرتبة ٥ في الزمرة $Z_{25} \times Z_5$؟

الحل:

لنفرض أن:

$$c = (a,b) \in Z_{25} \times Z_5$$

حيث

$$o(c) = lcm(o(a), o(b)) = 5$$

العناصر التي من الرتبة ٥ في Z_{25} هي

$\{5,10,15,20\}$.

العناصر التي من الرتبة ٥ في Z_5 هي

$\{1,2,3,4\}$.

١) إذا كان

$$o(a) = 5$$

$$o(b) = 5$$

فإن :

في هذه الحالة a تأخذ إحدى القيم التالية:

$$\{5,10,15,20\}$$

بينما b تأخذ إحدى القيم التالية:

$\{1,2,3,4\}$.

مما سبق نجد أن

$$c = (a,b)$$

تأخذ إحدى القيم التالية:

$$\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(10,1),(10,2),(10,3),(10,4),(15,1),$$
$$(15,2),(15,3),(15,4),(0,1),(20,2),(20,3),(20,4)\}$$

٢) إذا كان

$$o(a) = 5$$

$$o(b) = 1$$

فإن:

حيث$o(0)=1$ و هذا يعني أن$b=0$ بينما a تأخذ أحد القيم التالية:

$$\{5,10,15,20\}$$

وتكون $c=(a,b)$ إحدى القيم التالية:

$$.\{(5,0),(10,0),(15,0),(20,0)\}$$

٣)إذا كان

$$o(a) = 1$$

$$o(b) = 5$$

فإن:

حيث $o(0) = 1$ و هذا يعني أن $a=0$ بينما b تأخذ أحد القيم التالية :

$$\{1,2,3,4\}$$

وتكون $c = (a,b)$ إحدى القيم التالية:

$$.\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$$

(٣) هل $Z \times Z$ زمرة دائرية ؟ لماذا؟

<u>الحل:</u>

الزمرة $Z \times Z$ زمرة غير دائرية ، لأنها لاتحتوي على مولد يولد جميع عناصر الزمرة $Z \times Z$.

(٤) هل $Z_3 \times Z_9 \cong Z_{27}$ ؟ لماذا؟

الحل:

$Z_3 \times Z_9 \neq Z_{27}$ لأن Z_{27} زمرة دائرية رتبتها ٢٧ بينما $Z_3 \times Z_9$ زمرة غير دائرية لأن
$\gcd(3,9) = 3$.

(٥) جد زمرة جزئية من $Z_{30} \times Z_{12}$ رتبتها ٢٤.

الحل:

نوجد رتب العناصر لزمرة $Z_{30} \times Z_{12}$.

أولاً: رتب العناصر في Z_{30} هي:

$$|1| = |11| = |13| = |17| = |19| = |23| = |29| = 30$$
$$|2| = |4| = |8| = |14| = |16| = |22| = |26| = |28| = 15$$
$$|3| = |9| = |27| = 10$$
$$|5| = |25| = 6$$
$$|10| = |20| = 3$$

ثانياً: رتب العناصر في Z_{12} هي:

$$|1| = |5| = |7| = |11| = 12$$
$$|2| = |4| = |8| = |10| = 6$$
$$|3| = |9| = 4$$
$$|6| = 2$$

إذاً الزمرة الجزئية التي رتبتها ٢٤ هي: $A_1 \times A_2 \leq Z_{30} \times Z_{12}$

$$A_1 = \langle 5 \rangle = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\},\ |5| = 6$$
$$A_2 = \langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\},\ |3| = 4$$

(٦) أثبت أن $D_{42} \cong D_3 \times D_7$.

الحل:

أولاً: نكتب عرض الزمر..

$$D_3 = \left\langle a,b \middle| a^3 = b^2 = (ab)^2 = e \right\rangle$$
$$D_7 = \left\langle a,b \middle| a^7 = b^2 = (ab)^2 = e \right\rangle$$
$$D_{42} = \left\langle a,b \middle| a^{42} = b^2 = (ab)^2 = e \right\rangle$$

ثانياً: نوجد رتب العناصر في $D_3 \times D_7 , D_{42}$.
رتب العناصر في $D_3 \times D_7$ هي:

$$|(a,a)| = |(a,a^2)| = |(a,a^3)| = |(a,a^4)| = |(a,a^5)| = |(a,a^6)| = |(a^2,a)| =$$
$$|(a^2,a^2)| = |(a^2,a^3)| = |(a^2,a^4)| = |(a^2,a^5)| = |(a^2,a^6)| = 21$$
$$|(b,a)| = |(b,a^2)| = |(b,a^3)| = |(b,a^4)| = |(b,a^5)| = |(b,a^6)| = |(ab,a)| =$$
$$|(ab,a^2)| = |(ab,a^3)| = |(ab,a^4)| = |(ab,a^5)| = |(ab,a^6)| = |(a^2b,a)| =$$
$$|(a^2b,a^2)| = |(a^2b,a^3)| = |(a^2b,a^4)| = |(a^2b,a^5)| = |(a^2b,a^6)| = 14$$

$$\begin{aligned}
&\left|(a,b)\right| = \left|(a,ab)\right| = \left|(a,a^2b)\right| = \left|(a,a^3b)\right| = \left|(a,a^4b)\right| = \left|(a,a^5b)\right| \\
&= \left|(a,a^6b)\right| = \left|(a^2,b)\right| = \left|(a^2,ab)\right| = \left|(a^2,a^2b)\right| = \left|(a^2,a^3b)\right| \\
&= \left|(a^2,a^4b)\right| = \left|(a^2,a^5b)\right| = \left|(a^2,a^6b)\right| = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|(b,b)\right| = \left|(b,ab)\right| = \left|(b,a^2b)\right| = \left|(b,a^3b)\right| = \left|(b,a^4b)\right| = \left|(b,a^5b)\right| \\
&= \left|(b,a^6b)\right| = \left|(ab,b)\right| = \left|(ab,ab)\right| = \left|(ab,a^2b)\right| = \left|(ab,a^3b)\right| \\
&= \left|(ab,a^4b)\right| = \left|(ab,a^5b)\right| = \left|(ab,a^6b)\right| = \left|(a^2b,b)\right| = \left|(a^2b,ab)\right| \\
&= \left|(a^2b,a^2b)\right| = \left|(a^2b,a^3b)\right| = \left|(a^2b,a^4b)\right| = \left|(a^2b,a^5b)\right| = \left|(a^2b,a^6b)\right| = 4
\end{aligned}$$

رتب العناصر في D_{42} هي:

$$|a|=|a^5|=|a^{11}|=|a^{13}|=|a^{17}|=|a^{19}|=|a^{23}|=$$
$$|a^{25}|=|a^{29}|=|a^{31}|=|a^{37}|=|a^{41}|=42$$
$$|a^2|=|a^4|=|a^8|=|a^{10}|=|a^{16}|=|a^{20}|=|a^{22}|=$$
$$|a^{26}|=|a^{28}|=|a^{32}|=|a^{34}|=|a^{38}|=|a^{40}|=21$$
$$|a^3|=|a^9|=|a^{15}|=|a^{27}|=|a^{33}|=|a^{39}|=14$$
$$|a^6|=|a^{12}|=|a^{18}|=|a^{24}|=|a^{30}|=|a^{36}|=7$$
$$|a^7|=|a^{14}|=|a^{35}|=6$$
$$|a^{21}|=|b|=|ab|=|a^2b|=|a^3b|=|a^4b|=|a^5b|=|a^6b|=$$
$$|a^7b|=|a^8b|=|a^9b|=|a^{10}b|=|a^{11}b|=|a^{12}b|=|a^{13}b|=$$
$$|a^{14}b|=|a^{15}b|=|a^{16}b|=|a^{17}b|=|a^{18}b|=|a^{19}b|=|a^{20}b|=$$
$$|a^{21}b|=|a^{22}b|=|a^{23}b|=|a^{24}b|=|a^{25}b|=|a^{26}b|=|a^{27}b|=$$
$$|a^{28}b|=|a^{29}b|=|a^{30}b|=|a^{31}b|=|a^{32}b|=|a^{33}b|=|a^{34}b|=$$
$$|a^{35}b|=|a^{36}b|=|a^{37}b|=|a^{38}b|=|a^{39}b|=|a^{40}b|=|a^{41}b|=2$$

نلاحظ أن $D_{42} \neq D_3 \times D_7$ لأن D_{42} تحتوي على عنصر رتبته ٤٢ ولكن $D_3 \times D_7$ لا تحتوي على عناصر من الرتبة ٤٢.

(٧) جد الزمرة التي تماثل $D_3 \times Z_2$ من بين الزمر $D_6, A_4, Z_6 \times Z_2, Z_{12}$.

الحل:

أولاً: نكتب عرض الزمرة $D_3 \times Z_2$.

$$D_3 = \langle a,b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

$$D_3 \times Z_2 = \{(1,0),(a,0),(a^2,0),(b,0),(ab,0),(a^2b,0),$$
$$(1,1),(a,1),(a^2,1),(b,1),(ab,1),(a^2b,1)\}$$

ثانياً: نوجد رتب العناصر للزمرة $D_3 \times Z_2$.

$$|(a,0)| = |(a^2,0)| = 3$$
$$|(1,1)| = |(b,0)| = |(ab,0)| = |(a^2b,0)| = 2$$
$$|(a,1)| = |(a^2,1)| = 6$$
$$|(b,1)| = |(ab,1)| = |(a^2b,1)| = 4$$

أ- الزمرة Z_{12}:

الزمرة $D_3 \times Z_2 \neq Z_{12}$ لأن الزمرة Z_{12} زمرة دائرية رتبتها ١٢ بينما الزمرة

$D_3 \times Z_2$

زمرة غير دائرية لاتحتوي على عنصر يولد جميع عناصر الزمرة $D_3 \times Z_2$.

ب- الزمرة $Z_6 \times Z_2$:

$$Z_6 \times Z_2 = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),$$
$$(5,0),(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1)\}$$

رتب العناصر للزمرة $Z_6 \times Z_2$:

$$|(1,0)| = |(5,0)| = |(2,1)| = |(4,1)| = 6$$
$$|(2,0)| = |(4,0)| = 3$$
$$|(3,0)| = 2$$
$$|(1,1)| = |(5,1)| = 12$$
$$|(3,1)| = 4$$

الزمرة $D_3 \times Z_2 \neq Z_6 \times Z_2$

لأن الزمرة $Z_6 \times Z_2$ تحتوي على عنصر يولد الزمرة

بينما الزمرة $D_3 \times Z_2$

لاتحتوي على عنصر يولد جميع عناصر الزمرة $D_3 \times Z_2$.

ت- الزمرة A_4:

الزمرة $D_3 \times Z_2 \neq A_4$ لأن الزمرة A_4 لاتحتوي على زمرة جزئية من الرتبة ٦.

ث- الزمرة D_6:

أولاً:نكتب عرض الزمرة D_6.

$$D_6 = \langle a,b \mid a^6 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle, |D_6| = 12$$

ثانياً: نوجد رتب العناصر للزمرة D_6.

$$
\begin{aligned}
&|a| = |a^5| = 6 \\
&|a^3| = |b| = |ab| = |a^2b| = |a^3b| = |a^4b| = |a^5b| = 2 \\
&|a^2| = |a^4| = 3
\end{aligned}
$$

الزمرة

$$D_3 \times Z_2 \cong D_6$$

لأن رتب العناصر متساوية نوجد التماثل:

$$f_1 : (1,0) \to 1$$

$$
\begin{aligned}
f_2 &: (a,1) \to a \\
&: (a^2,1) \to a^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3 &: (a,1) \to a^5 \\
&: (a^2,1) \to a
\end{aligned}
$$

(٨) احسب رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة $Z_3 \times Z_3 \times Z_3$.

<u>الحل:</u>

$$
\begin{aligned}
Z_3 \times Z_3 \times Z_3 = \{&(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0)\\
&,(0,2,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,1)\\
&,(0,2,2),(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2)\\
&,(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0)\\
&,(1,2,1),(1,2,2),(2,0,0),(2,0,1)\\
&,(2,0,2),(2,1,0),(2,1,1),(2,1,2)\\
&,(2,2,0),(2,2,1),(2,2,2)\}
\end{aligned}
$$

رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة $Z_3 \times Z_3 \times Z_3$ هي ٣.

(٩) جد زمرة جزئية من الزمرة $Z_{12} \times Z_{20}$ تماثل $Z_4 \times Z_5$.

<u>الحل:</u>

نوجد رتب العناصر لزمرة $Z_{12} \times Z_{20}$.

أولاً: رتب العناصر في Z_{12} هي:

$$
\begin{aligned}
&|1| = |5| = |7| = |11| = 12\\
&|2| = |4| = |8| = |10| = 6\\
&|3| = |9| = 4\\
&|6| = 2
\end{aligned}
$$

الزمرة الجزئية التي تتماثل مع Z_4 هي:

$$A = \langle 3 \rangle = \{0,3,6,9\} \cong Z_4$$

ثانياً: رتب العناصر في Z_{20} هي:

$$|1| = |3| = |7| = |9| = |11| = |13| = |17| = |19| = 20$$
$$|2| = |6| = |14| = |18| = 10$$
$$|4| = |8| = |12| = |16| = 5$$
$$|5| = |10| = |15| = 4$$

الزمرة الجزئية التي تتماثل مع Z_5 هي:

$$B = \langle 4 \rangle = \{0,4,8,12,16\} \cong Z_5$$

الزمرة الجزئية التي تتماثل مع $Z_4 \times Z_5$ هي $\langle 4 \rangle \times \langle 3 \rangle$.

$$A \times B = \langle 3 \rangle \times \langle 4 \rangle \cong Z_4 \times Z_5$$

(١٠) أثبت أن كل من الزمر A_4, D_4 غير متحللة؟.

الحل:

أ- الزمرة D_4:

$$D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b = (ab) = 1 \rangle, |D_4| = 8$$

إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من D_4 فإن:

$H \cong Z_4$ أو $H \cong Z_2$

ولكن $D_4 \neq Z_2 \times Z_4$ لأن D_4 زمرة غير دائرية لاتحتوي على مولد لها بينما الزمرة $Z_2 \times Z_4$ زمرة دائرية تحتوي على المولد $(1,3)$.

$\therefore D_4$ زمرة غير متحللة.

ب- الزمرة A_4 :

إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من A_4 فإن:

$H \cong Z_3$ أو $H \cong Z_4$

ولكن $A_4 \neq Z_3 \times Z_4$ لأن A_4 زمرة غير دائرية لاتحتوي على مولد لها بينما الزمرة $Z_3 \times Z_4$ زمرة دائرية لأن $\gcd(3,4) = 1$.

$\therefore A_4$ زمرة غير متحللة.

(١١)بين أيا من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

أ) $Z \times Z$ زمرة دائرية.

ب) $Z_4 \times Z_{15} \cong Z_6 \times Z_{10}$.

ج) $D_{12} \cong Z_3 \times D_4$.

د)إذا كان $a = (2, 3, (123)\circ(15)) \in \phi_{15} \times Z_{10} \times S_5$ فإن $o(a) = 20$.

الحل:

أ) العبارة خاطئة.
$Z \times Z$ زمرة غير دائرية لأن لا يوجد عنصر يولد جميع العناصر.

ب)العبارة خاطئة.
لأن $Z_6 \times Z_{10}$ زمرة غير دائرية $\gcd(6,10) = 2$ رتبتها ٦٠ بينما $Z_4 \times Z_{15}$ زمرة دائرية رتبتها ٦٠.

ج)العبارة خاطئة.
$D_{12} \neq Z_3 \times D_4$ لأن الزمرة $D_{12} = \langle a, b \mid a^{12} = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ لا تحتوي على عنصر رتبته ١٢ بينما الزمرة $Z_3 \times D_4$ تحتوي عنصر رتبته ١٢هو $(2, a)$.

د)العبارة *صائبة*.

$$a=\left(2,3,(123)\circ(15)\right)\in \phi_{15}\times Z_{10}\times S_5$$

$$\phi_{15}=(5-1)(3-1)=8$$

$$o(2)=\frac{8}{\gcd(8,2)}=4$$

$$o(3)=\frac{10}{\gcd(10,3)}=10$$

$$o((123)\circ(15))=o((1523))=\frac{5}{\gcd(5,4)}=5$$

إذن ،

$$o(a)=lcm\left(o(2),o(3),o((123)\circ(15))\right)=lcm(4,10,5)=20$$