هذه المجموعة من الدروس في نظرية الزمر من إعداد الأستاذة جوري المديرة العامة لمركز الرياضيات والفيزياء والكيمياء

http://www.syr-math.com

سأقدم لكم بإذن الله شرح كامل ووافي لـ 7 فصول في الزمره في مواضيع منفصلة هي عبارة عن بحث التخرج لصديقاتي المقربات وقد أحببن أن يستفيد الجميع من هذا البحث لأنهم بذلوا مجهود كبير فيه فأرجوا منكم الدعاء لهم جميعا بالتوفيق بالدنيا والآخرة

المراجع المستخدمة في 7 فصول:

*نظرية الزمر

أ . د / صفوان محمد عادل عويره

أ . د / محمود عبدالباقي محمد أحمد

*نظرية الزمر

د / معروف عبدالرحمن سمحان

د / فوزي بن أحمد صالح الذكير

*مواضيع في الجبر

اي.ان-هيرستين

*المدخل الى نظرية الزمر

أ.د فالح الدوسري

أ.عبد الحميد بيك

الفصل السادس

نظريات سيلو وتطبيقاتها

Sylow theorems and its applcotions

في هذا الفصل سندرس نظريات سيلو وبعض تطبيقاتها وسندرس بعض الزمر البسيطه.

نظريه(٦-١) : نظريه سيلو الأولى (sylow's first theorem)

إذا كانت G زمره منتهيه رتبتها $p^n m$ حيث p عدد اولي ، $n \in Z^+$ ، $\gcd(p,m)=1$ فان:

١) G تحتوي على زمرة جزئيه رتبتها p^k لكل $1 \le k \le n$.

٢) اذ كانت $H \le G$ حيث $|H| = p^k$ ، $1 \le k \le n$ فأن يوجد زمره جزئيه K من G رتبتها p^{k+1} بحيث تكون $H \lhd K$.

نتيجة(٦-١):

إذا كانت G زمره منتهية ،p عدد اولي يقسم رتبة G ،فـأن G تحتوي عنصر واحد على الاقل رتبةp.

تعريف(٦-١):

نقول أن الزمرة الجزئية P منG هي زمرة سيلو من النوع p اذ كانت G زمرة منتهيةوكان p عدد اولي يقسم رتبة G اذ كانت P زمرة جزئية اعظمية من النوع p (اي انها غير محتواه فعليا في زمرة جزئية اخرى من النوع p)

1

ملاحظة:

نظرية سيلو الاولى تضمن لنا وجود زمرة من النوع p لكل p يقسم رتبه G اذ كانت $|G| = p^n m$ فأن رتبة زمرة سيلو من النوعp هي p^n . سنرمز لمجموعة سيلو الجزئية من G من النوعp بالرمز $syl_p(G)$.

مثال (٦-١) :

١)اذ كانت $G = (S_3, o)$ فأن $A_3 = \langle (123) \rangle$ زمرة سيلو -3 كما ان $\langle (12) \rangle$ ، $\langle (13) \rangle$ ، $\langle (23) \rangle$ زمره سيلو -2

٢)اذا كانت $G = (Z_{12}, \oplus)$ فأن $\langle 4 \rangle = \{0,4,8\}$ زمره سيلو-3 كما ان $\langle 3 \rangle = \{0,3,6,9\}$ زمرة سيلو-2 ولكن $\langle 6 \rangle = \{0,6\}$ ليست زمره سيلو لانها محتواه في الزمرة الجزئية $\langle 3 \rangle$.

٣)إذا كانت (A_4, o) فان $A = \langle (12)(34) \rangle = \{(1), (12)(34)\}$ ليست سيلو -2 لانها

$A = \langle (12)(34) \rangle \subseteq \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

تعريف(٦-٢):

يقال عن زمرتين جزئيتين H,K انهما مترافقتان اذ وجد $x \in G$ حيث ان $A = B^x$ او ان $A = x^{-1}Bx$.

2

مثال(٦-٢):

إذا كانت $G=(S_3,o)$ فأن $H=\langle(12)\rangle$، $K=\langle(13)\rangle$
زمرتان جزئيتان مترافقتان لان $H=K^{(23)}$ نلاحظ ان H,K
زمرة سيلو -2 جزئية من G واذ كانت $C=\langle(123)\rangle$
زمرة سيلو-3 جزئية من G ولاكن C لاترافقH ولاترافقK .

نظرية (٦-٢):(نظرية سيلو الثانية sylow's second theorem)

إذا كانت $|G|=p^nm$ حيث p عدد أولي، $n\in Z^+$
، $\gcd(p,m)=1$ وكانت $H,K\in syl_p(G)$ فأن H,K مترافقتان (ومن ثم مترافقتان).

نتيجة (٦-٢):

اذ كانت G زمرة منتهية وكانت $H\in syl_p(G)$ فأن H وحيده اذواذ فقط إذا كانت $H\lhd G$

نظرية (٦-٣):

اذ كانت G زمرة منتية من الرتبة p^nm حيث p عدد اولي
، $n\in Z^+$، $\gcd(p,m)=1$ وإذا كان n_p هو عدد زمر سيلو الجزئية من النوع p فأن :

١) $n_p\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ أي أن $n_p=1+\lambda p$ حيث λ عدد صحيح غير سالب .
٢) n_p يقسم رتبته G .

3

مثال (٦-٣):

سنحدد في هذا المثال جميع زمر سيلو الجزئيه لزمرة S_3 ،
لدينا $|S_3| = 2 \times 3$
باستخدام نظرية سيلو الثالثة نجد ان

$$n_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$$

ويقسم 6 ومنه $n_2 = 1$ او $n_2 = 3$ ولكن كل من

$$\langle (12) \rangle, \langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle$$

زمرة جزئية من S_3 رتبتها 2 إذن $n_2 = 3$ وبما إن

$$n_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$$

فأن $n_3=1$ اذن توجد زمرة سيلو وحيده من النوع 3
وهي $H = \langle (123) \rangle$ ومن ثم فأن $H \lhd G$.

مثال(٦-٤):

سنحدد جميع زمر سيلو الجزئيه من A_4 من المعلوم ان

$$|A_4| = 12 = 2^2 \times 3$$

كما إن $n_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ ولذا فأن $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$
ولكن باستخدام نظرية لاجرانج نعلم ان اي زمرة جزئية من A_4 رتبتها 4 لايمكن ان تحتوي على دوره طولها 3 إذن $n_2 = 1$ وهذه الزمرة هي

$$H = \{(1), (13)(24), (14)(23), (12)(34)\} \lhd A_4$$

الآن $n_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ ولذا فأن $n_3 = 1$ أو $n_3 = 4$
ولكن كل من الزمرة التالية زمرة جزئية من A_4 رتبتها 3 :

$$H_1 = \langle (123) \rangle, H_2 = \langle (124) \rangle, H_3 = \langle (134) \rangle, H_4 = \langle (234) \rangle$$

وبالتالي $n_3 = 4$

4

مثال (٦-٥):

سنجد جميع زمر سيلو للزمرة S_4 ونبين أنها مترافقة لاحظ ان

$$|S_4| = 24 = 2^3 \times 3$$

وان $n_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ فإن

$$n_3 = 1 \text{ او } n_3 = 4$$

ولكن كل من الزمر التاليه زمرة رتبتها 3:

$$\langle (234) \rangle \quad ، \quad \langle (134) \rangle \quad ، \quad \langle (124) \rangle \quad ، \quad \langle (123) \rangle$$

اذن $n_3 = 4$

$$\langle (132) \rangle = (24)\langle (123) \rangle (24) \text{ ، } \langle (124) \rangle = (34)\langle (123) \rangle (34)$$

$$\langle (234) \rangle = (14)\langle (123) \rangle (14)$$

ولذا فأنها جميعا مترافقة الآن $n_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ ومن ثم فأن $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$ ولكنا نعلم ان D_4 زمرة جزئية من S_4 رتبتها 8 فأذا اعتبرنا ان D_4 زمرة تناظرات المربع الذي رؤوسه 1,2,3,4 فأننا نجد ان:

$$H = D_4 = \{(1),(1324),(13)(24),(1432),(13),(24),(12)(34),(14)(23)\}$$

وإذا أعدنا ترتيب الرؤوس مره على الصورة 1,3,2,4 ومره على الصوره 1,3,2,4 فأن نحصل على الزمرتين

$$K = D_4 = \{(1),(1324),(12)(34),(1423),(12),(34),(14)(23),(13)(24)\}$$

$$L = D_4 = \{(1),(1342),(14)(23),(1243),(14),(23),(13)(24),(12)(34)\}$$

إذن $n_2 = 3$ ومن السهل ايضا ان نرى :

$$L = (234) \circ H \circ (234)^{-1} \text{ و } K = (23) \circ H \circ (23)$$

وبالتالي جميعها مترافقة .

5

نظرية(٦-٤):

عدد الزمر غير متماثله من الرتبة 12 يساوي5 .

نظرية(٦-٥):

إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث p ,q عددان أوليان $p<q$فأن :

١) اذا كانت $q \not\equiv 1(\bmod p)$ فأن G دائريه

(٢)- اذ كان $q \equiv 1(\bmod p)$ فأن $G=\langle a,b\rangle$ حيث $|b|=p$ و $|a|=q$و $ba=a^r b$ حيث q لايقسم r-1 ولاكن q يقسم r^p-1

- باستخدام النظريات و النتائج نكون قد وجدنا جميع الزمر (بأستثناء التماثل)من الرتب التي لاتزيد عن15 ونلخصها بالجدول التالي:

6

الرتبة	عدد الزمر	الزمر الابداليه	الزمر الغير ابدالية
1	1	$\{e\}$	لايوجد
2	1	Z_2	لايوجد
3	1	Z_3	لايوجد
4	2	$Z_2\times Z_2 Z_4,$	لايوجد
5	1	Z_5	لايوجد
6	2	Z_6	D_3
7	1	Z_7	لايوجد
8	5	$Z_2\times Z_4, Z_2\times Z_2\times Z_2 Z_8,$	D_4, Q_8
9	2	$Z_3\times Z_3 Z_9,$	لايوجد
10	2	Z_{10}	D_5
11	1	Z_{11}	لايوجد
12	5	$Z_2\times Z_6 Z_{12},$	A_4, D_6, T
13	1	Z_{13}	لايوجد
14	2	Z_{14}	D_7
15	1	Z_{15}	لايوجد

مثال (٦-٦):

لتكن G زمرة من الرتبه 231 ولتكن
$H \in syl_p(G)$ و $K \in syl_p(G)$ اثبت أن $H \lhd G$ و $K \lhd G$.

الحل :

$|G| = 3\times 7\times 11$ بما أن $n_{11} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 11)$ يقسم 3×7 فأن $n_{11} = 1$
ولذا فأن $H \lhd G$ وبما ان $n_7 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ يقسم 3×11 فأن $n_7 = 1$
ولذا فأن $K \lhd G$.

7

تعريف (٦-٣):

يقال عن الزمرة G انها بسيطه اذا كانتG لاتملك زمرة جزئية فعلية ناظمية A بحيث أن $A \neq \{e\}$

مثال(٦-٧):

١) $(Z_p, \oplus)$ ، حيث p عدد اولي فأن Z_p زمرة بسيطة.
٢) $(Z_4, \oplus)$زمرة ليست بسيطة لأن $\langle 2 \rangle \lhd Z_4 \neq 0$.
٣) $(Z, +)$ زمرة ليست بسيطة لأن $\langle 2 \rangle \lhd Z \neq 0$.

نظرية(٦-٦):

إذا كانت G زمرة أبدالية فإن G زمرة بسيطة إذا وإذا فقط كانت $G \cong Z_P$ حيث P عدداً أولياً أو أن $P = 1$.

نظرية(٦-٧):

إذا كانت $|G| = P^n$ حيث $n > 1$ و P عددا أوليا فإن G زمرة غير بسيطة.

نظرية(٦-٨)

إذا كانت $|G| = P^n m$ حيث $P, n \geq 1$ عددا أولياً و $P > m > 1$ فإن G ليست بسيطة.

8

نظرية(٦-٩):

إذا كانت $|G|=2m$ حيث $m>1$ عددا فرديا فإن G زمرة غير بسيطة.

نظرية(٦-١٠):

إذا كانت G زمرة منتهية بسيطة وكانت $H \leq G$
حيث $[G:H]=n$ فإن G تماثل زمرة جزئية من A_n.

ملاحظة:

من العلوم أن الزمرة من الرتبة 80 ليست بسيطة فإذا كانت $|G|=80=2^2\times 5$ بسيطة وكانت $HeSYL_2(G)$ فإن $[G:H]=5$ ولذا فإن G تماثل زمرة جزئية من A_5
إذن ، 80 يقسم $|A_5|$ وهذا مستحيل
وبالتالي فإن $4!$ ليست بسيطة.

مثال (٦-١١):

إذا كانت $|G|=72=2^3\times 3^2$ فإن G ليست بسيطة.

الحل:

نلاحظ أن $n_3=4$ أو $n_3=1$ ،إذا كان $n_3=1$ فإن G ليست بسيطة
لنفرض أن $HeSY\ (G)$ باستخدام لنظرية الثالثة لسيلو نجد
أن $4=n_3=[G:N\ (G)]$ وبما أن $|G|$ لا يقسم $4!$

فإنه باستخدام مبرهنة الدليل نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية فعلية إذن G ليست بسيطة.

نظرية(٦-١١):

A_n زمرة بسيطة لكل $n \geq 5$.

تمارين محلولة

(١) إذا كانت G زمرة من الرتبة 60 فأثبتي أن $|Z(G)| \neq 4$ ؟

الحل:

إذا كانت $|Z(G)| = 4$ فإن $G/Z(G)$ زمرة دائرية

ومن ثم G أبدالية

أي أن $G = Z(G)$

وهذا تناقض.

10

(٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة 60 فأثبتي أن $|Z(G)| \neq 4$ ؟

الحل:

إذا كانت $|Z(G)| \neq 4$ فإن $G/Z(G)$ زمرة دائرية ومن ثم G أبدالية أي أن $G = Z(G)$ وهذا تناقض.

(٣) أثبتي أن أي زمرة من الرتب التالية يجب أن تكون دائرية؟

15,35,51,77,85,87,115,119,123,141,134,187,323,4747

الحل:

كل منها زمره رتبتها pq حيث $p < q$ ، $q \not\equiv 1 (mod\ p)$.

$15 = 3 \times 5 \rightarrow 3 < 5\ ,\ 5 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

$35 = 7 \times 5 \rightarrow 5 < 7\ ,\ 7 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$

$51 = 3 \times 17 \rightarrow 3 < 17\ ,\ 17 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

$77 = 7 \times 11 \rightarrow 7 < 11\ ,\ 11 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$

$85 = 5 \times 17 \rightarrow 5 < 17\ ,\ 17 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$

$87 = 3 \times 29 \rightarrow 3 < 29\ ,\ 29 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

$115 = 23 \times 5 \rightarrow 5 < 32\ ,\ 32 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$

$119 = 7 \times 17 \rightarrow 7 < 17\ ,\ 17 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$

$123 = 3 \times 41 \rightarrow 3 < 41\ ,\ 41 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

$141 = 3 \times 47 \rightarrow 3 < 47\ ,\ 47 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

$134 = 11 \times 13 \rightarrow 11 < 13\ ,\ 13 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$

$177 = 3 \times 59 \rightarrow 3 < 59\ ,\ 59 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

$187 = 11 \times 17 \rightarrow 11 < 17\ ,\ 17 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$

$323 = 17 \times 19 \rightarrow 17 < 19\ ,\ 19 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$

$4747 = 47 \times 101 \rightarrow 47 < 101\ ,\ 101 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 47)$

11

(٣) بيّن أي من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة:

أ) توجد زمرة منتهية G حيث أن $\left|{}^{G}/_{Z(G)}\right| = 91$

ب) توجد زمرة غير إبدالية من الرتبة 225

ج) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $P \epsilon Syl_p(H)$ فإن $gPg^{-1} \epsilon Syl_p(gHg^{-1})$ لكل $g \in G$

الحل:

أ) (العبارة خاطئة)

$\left|{}^{G}/_{Z(G)}\right| = 91$ فإن ${}^{G}/_{Z(G)}$ زمرة دائرية ومنه G إبدالية إذا $G = Z(G)$ وهذا مستحيل.

ب) (العبارة خاطئة)

$255 = 85 \times 3$ ونجد أن 5و38 عددان أوليان $3 < 85$ ولكن تحقق

$85 \equiv 1 \, (mod\ 3)$

$85 = 1 + 3(28) = 1 + 3\lambda$.

ج) (العبارة صحيحة)

لنفرض $gPg^{-1} \epsilon Syl_p(gHg^{-1})$ بوضع $g^{-1}Pg = K$ و $g^{-1}Hg = Q$ ،

وحيث أن $Q \leq G$ فإن $gPg^{-1} \epsilon Syl_p(gQg^{-1})$ ، $K \epsilon Syl_p(Q)$

ومنه تناقض وعليه $gPg^{-1} \epsilon Syl_p(gHg^{-1})$. $P \epsilon Syl_p(H)$

12

الفصل السابع

الزمر القابلة للحل والزمر المتلاشية

Solvable and nilpotent groups.

لتكن G زمرة غير منتهية إذا كانت G ليست بسيطة فإننا نستطيع إبعاد زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة H_{n-1} من H_{n-2} وبالاستمرار على هذا المنوال نحصل على سلسلة $\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd ..... \lhd H_{n-1} \lhd H_n$ بحيث أن $H_n \lhd G$ إن هذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٧-١):

لتكن G زمرة ولتكن $\{e\} = H_0 \le H_1 \le ..... \le H_{n-1} \le H_n = G$ سلسلة من زمر G الجزيئية..

١)نقول إن السلسلة ناظمية جزئياً(subnormal series) إذا كانت $H_{i-1} \lhd H_i$ لكل $1 \le n \le i$

٢) إذا كانت $H \le G$ فإننا نقول إن الزمرة H زمرة جزيئية ناظمية جزئياً (sub normal group) من الزمرة G إذا كانت H حداً في سلسلة ناظمية جزئياً للزمرة G.

٣) نقول إن السلسلة ناظمية (narmal series) إذا كانت $H_n \lhd G$ لكل $0 \le i \le n-1$.

13

ملاحظات:

١)في الزمرة الإبدالية تتطابق السلاسل الناظمية جزئياً والناظمية.

٢) من الواضح أن $\{e\} \subseteq G$ سلسلة ناظمية لأي زمرة .

الزمر القابلة للحل

Solvable groups

تعريف(٧-٢):

١)نقول أن السلسة الناظمية

$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots\ldots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ جزئياً

سلسلة قابلة للحل إذا كانت H_i/H_{i-1} زمرة إبداليةلكل $1 \leq i \leq n$

.

٢)نقول أن الزمرة G قابلة للحل إذا وجدت سلسلة قابلة للحل للزمرة G .

ملحوظة:

من الواضح أن أي زمرة إبدالية يجب أن تكون قابلة للحل .

14

نظرية(٧-١):

إذا كانت G زمرة قابلة للحل وكانت $H \leq G$ فإن H قابلة للحل .

نظرية(٧-٢):

إذا كانت G زمرة قابلة للحل وكانت $H \lhd G$ فإن G/H زمرة قابلة للحل .

نظرية (٧-٣):

إذا كانت $H \lhd G$ حيث كل من H و G/H قابلة للحل فإن G قابلة للحل .

نتيجة (٧-١):

الزمرة S_n غير قابلة للحل لكل $n \geq 5$.

مثال (٧-١):

إذا كانت $G = D_4 = \langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ فإن G زمرة قابلة للحل

لأن $1 \leq \langle a \rangle \leq D_4$ متسلسلة إبدالية .

تعريف(٧-٢):

١) نقول إن السلسلة الناظمية

15

$\{e\}=H_o \le H_1 \le \ldots\ldots \le H_{n-1} \le H_n = G$ هي سلسلة مركزية (Central Series) إذا كان $H_{i-1}/H_i \le Z(G)$ لكل $i = 0,1,\ldots\ldots,n$.

٢) نقول إن الزمرة متلاشية (Nilpotent Group) إذ وجدت سلسلة مركزية للزمرة G.

ملاحظات:

١)إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $\{e\} \le Z(G) = G$ سلسلة مركزية للزمرة G وبالتالي فإن G زمرة متلاشية.

٢)إذا كانت G زمرة متلاشية فإن أي سلسلة مركزية للزمرة G هي سلسلة قابلة للحل وذلك لأن $Z(G/H_i)$ زمرة إبدالية وبالتالي فإن أي زمرة متلاشية يجب أن تكون قابلة للحل ولكن العكس ليس صحيحا".

مثال(٧-٢):

الزمرة S_3 قابلة للحل ولها سلسلتين ناظمتين هما $\{e\} \le A_3 \le S_3, \{e\} \le S_3$ للسلسلة الأولى لدينا $S_3/\{e\} \cong S_3 < Z(S_3/\{e\})$.
وأما السلسلة الثانية فإن $A_3/\{e\} \cong A_3$ وإن $A_3 \notin Z(S_3/\{e\})$ وبالتالي فإن S_3 ليست زمرة متلاشية.

16

مثال(٧-٣):

أثبت أن المرباعيات

$$Q_8 = \left\langle a,b \middle| a^4 = e, a^2 = b^2, ab = ba^{-1} \right\rangle$$

زمرة متلاشية.

الحل:

لاحـــــــظ أن $Q_8 = \left\langle a,b \middle| a^4 = e, a^2 = b^2, aba = b \right\rangle$ ، $|Q_8| = 8$ ،

$$Z(Q_8) = \{e, a^2\} = \langle a^2 \rangle \cong Z_2$$

$$Q_8/Z(Q_8) = \{Z(Q_8), aZ(Q_8), bZ(Q_8), abZ(Q_8)\}$$ ،

$$Z_2 \times Z_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

إذا

$Q_8/Z(Q_8) \cong Z_2 \times Z_2$ وبالتالي فإن $\{e\} \leq Z_2 \leq Q_8$ سلسلة مركزية للزمرة Q_8 وبالتالي زمرة متلاشية.

نظرية(٧-٤):

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع P حيث P عدد أوليا فإن G زمرة متلاشية.

نظرية(٧-٥):

إذا كانت G زمرة متلاشية فإن أي زمرة جزئية من G يجب أن تكون متلاشية.

17

نظرية(٧-٦):

إذا كانت G زمرة متلاشية وكانت $H \lhd G$ فإن G/H زمرة متلاشية.

نظرية(٧-٧):

إذا كانت كل من G_1, G_2 زمرة متلاشية فإن $G_1 \times G_2$ زمرة متلاشية.

نتيجة (٧-٢):

إذا كانت كل من $G_1, G_2, \ldots\ldots, G_n$ زمرة متلاشية فإن $G_1 \times G_2 \times \ldots\ldots \times G_n$ زمرة متلاشية.