مثال

الزمرة$(Z,+)$ زمرة جزئية ناظمية من $(\Re,+)$

مثال 2-7-2

مركز الزمرة G والذي يعرف كما يلي $Z(G)=\{g\in G: gx=xg \quad \forall x\in G\}$ يكون زمرة جزئية ناظمية من G وذلك لأن $Z(G)$ زمرة جزئية من G (من السهل برهنة ذلك) علاوة على ذلك إذا كان $x\in Z(G)$ فإن $xg=gx$ لكل $g\in G$ وبالتالي $gxg^{-1}=x\in Z(G)$.

تعريف

تسمى G بالزمرة البسيطة (simple) إذا كانت G لا تحتوي على أي زمرة جزئية ناظمية عدا $\{e\}$ و G نفسها.

تعريف

إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G فإن المجموعة التي عناصرها كل المجموعات المصاحبة للزمرة N في G تسمى بمجموعة القسمة ويرمز لها بالرمز G/N أي أن $G/N=\{gN: g\in G\}$

وتعرف العملية $*$ على G/N كالتالي: $(g_1N*g_2N)=(g_1*g_2)N$

مبرهنة

مجموعة القسمة $G/N=\{gN: g\in G\}$ مع العملية $*$ المعرفة أعلاه تكون زمرة .

البرهان:

نفرض أن $aN,bN,cN\in G/N$

الآن:

$$aN\,bN=abN\in G/N \quad \forall aN,bN\in G/N$$

$$aN(bN\,cN)=aN(bcN)=a(bc)N=(ab)cN$$

$$=(abN)cN=(aN\,bN)cN$$

ولكل $e\in N$ فإنه $eN=N$ و $eN=N\in G/N$

وكذلك $\forall aN\in G/N,\ aNeN=aeN=aN=eaN=eNaN$

ولكل $aN\in G/N$ حيث $a\in G$ يوجد $a^{-1}\in G$ وبذلك يوجد $a^{-1}N\in G/N$ ويحقق $aNa^{-1}N=aa^{-1}N=eN=a^{-1}aN=a^{-1}N\,aN$.وبهذا فإن G/N زمرة .

مثال

مجموعة الأعداد الصحيحة Z تحت عملية الجمع زمرة تبديلية والزمرة الجزئية $3Z=\{3x: x\in Z\}$ زمرة جزئية ناظمية من Z .لذلك $Z/3Z=\{0+3Z,1+3Z,2+3Z\}$ تكون زمرة القسمة Z على 3Z

مبرهنة

إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من الزمرة المنتهية G فإن: $O(G/N)=\dfrac{O(G)}{O(N)}$

البرهان:

نفرض أن $O(G)=m$, $O(N)=n$ ونفرض أن عدد المجموعات المصاحبة للزمرة الجزئية N هو s

استناداً إلى مبرهنة لاجرانج فإن $O(G)=s\times O(N)$ أي أن $m=sn$ ولذلك $s=\dfrac{m}{n}$

وبما أن عدد عناصر G/N هو s (عدد المجموعات المصاحبة) فإن:

$$O(G/N)=\frac{m}{n}=\frac{O(G)}{O(N)}$$

مبرهنة

زمرة القسمة للزمرة الدورية تكون دورية.

البرهان:

ليكن G زمرة دورية مولدها العنصر a وليكن $x\in G/N$

إذاً $x=hN \ :h\in G$

وبما أن $h=a^n, n\in Z$ فإن $x=hN=a^nN=(aN)^n$

إذاً G/N زمرة دورية.

التشاكل الزمري Group Homomorphism

الدالة التي تحافظ على العملية الثنائية المعرفة على الزمرة G بحيث تنقلها إلى نفس التأثير بالعملية الثنائية المعرفة على زمرة أخرى G' تسمى بالتشاكل ،ولهذه الدالة أهمية كبيرة في الجبر.

تعريف

الدالة φ من الزمرة G إلى زمرة أخرى G' تسمى تشاكل من G إلى G' إذا كان $\varphi(a * b) = \varphi(a) \square \varphi(b) \quad \forall\ a, b \in G$ حيث $*$ العملية المعرفة على G والعملية $\square$ معرفة على G'.

ملاحظة

من الآن فصاعداً نسقط العمليتين من الكتابة آخذين في الاعتبار بأن العملية بين عناصر G هي العملية المعرفة على G ،والعملية بين صور عناصر G هي العملية المعرفة على الزمرة G'، وتكتب $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

مثال

إذا كانت الدالة $\varphi: Z \to Z$ حيث Z زمرة الأعداد الصحيحة مع عملية الجمع المعرفة بـ $\forall\ x \in Z \quad \varphi(x) = 2x$ فإن φ دالة تشاكل لأن:

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= 2(x+y)\\ &= 2x+2y\\ &= \varphi(x)+\varphi(y)\end{aligned}$$

وهذا يوضح أن φ تشاكل من Z إلى نفسها.

مثال

الدالة $\varphi:(\Re^*,.) \to (\Re-\{-2\},*)$ المعرفة بالقاعدة $\forall r \in \Re^* \quad \varphi(r)=r-2$ تكون دالة تشاكل حيث $a*b=ab+2a+2b+2$ وذلك لأن: $\forall a,b \in \Re^* \quad \varphi(ab)=ab-2$

$$\begin{aligned}\varphi(a)*\varphi(b) &= (a-2)*(b-2) = (a-2)\ (b-2)+2(a-2)+2(b-2)+2\\ &= ab-2 = \varphi(ab)\end{aligned}$$

إذاً $\varphi(ab)=\varphi(a)*\varphi(b)$ لكل $a,b \in \Re^*$

مثال

الدالة $\varphi:(G,+) \to (G',+)$ المعرفة بالقاعدة: $\varphi(x)=x^2$ *لكل* $x \in G$

ليست دالة تشاكل لأن: $\forall a, b \in G \quad \varphi(a+b) = (a+b)^2 = a^2+b^2+ab+ba$

ولكن $\varphi(a)+\varphi(b) = a^2+b^2$ أي أن $\varphi(a+b) \neq \varphi(a)+\varphi(b)$

مثال

الدالة $\varphi:(\Re,+) \to (\Re^+,\times)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(x) = 2^x$

تكون دالة تشاكل لأن: $\forall x,y\in\Re \quad \varphi(x+y)=2^{x+y}=2^x2^y=\varphi(x)\varphi(y)$

مثال

الدالة $\varphi:(\mathbb{C},+)\to(\Re,+)$ المعرفة بالقاعدة: $\varphi(z)=|z|$ لكل $z\in\mathbb{C}$ ليست دالة تشاكل لأنه ليس دائماً $w,z\in\mathbb{C}$, $|w+z|=|w|+|z|$ ولنأخذ مثلاً $w=-1,z=1$ عندئذ $|w+z|=0$

بينما $|w|+|z|=2$ أي أن $\varphi(w+z)\neq\varphi(w)+\varphi(z)$

ملاحظة

إذا كانت φ تشاكل من الزمرة G إلى نفسها ،فإنها تسمى تشاكل داخلي (endomorphism)

مبرهنة

إذا كان φ تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة G' ، فإن

1- $\varphi(e)=e'$ حيث e العنصر المحايد في G و e' العنصر المحايد في G' .

2- $\varphi(g^{-1})=(\varphi(g))^{-1}$.

البرهان:

1- لنفرض أن $g\in G$

$\varphi(g)e'=\varphi(g)=\varphi(ge)=\varphi(g)\varphi(e)$

من قانون الاختصار نصل إلى أن $\varphi(e)=e'$.

2- $\varphi(g)\varphi(g^{-1})=\varphi(gg^{-1})=\varphi(e)=e'$ وكذلك $\varphi(g^{-1})\varphi(g)=\varphi(g^{-1}g)=\varphi(e)=e'$

هذا يعني أن $\varphi(g^{-1})$ هو معكوس العنصر $\varphi(g)$ أي أن: $\varphi(g^{-1})=(\varphi(g))^{-1}$

تعريف

التشاكل التقابلي بين الزمرتين G,G' هو دالة أحادية فوقية φ من G إلى G' بحيث لكل $x,y\in G$ يكون $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$.

ملاحظة:

إذا كانت G,G' متشاكلتين تقابليا فيرمز لذلك بالرمز $G\approx G'$ ولإثبات أن الزمرة G متشاكلة تقابليًا مع الزمرة G' نتبع الخطوات التالية:

1. نعرف دالة φ حيث $\varphi:G\to G'$.
2. نثبت أن φ دالة أحادية وفوقية.
3. نثبت أن $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ *لكل* $x,y\in G$.

مثال

إذا كانت G زمرة و $\varphi : G \to G$ دالة فوقية حيث $\varphi(a) = a^{-1}$

فإن φ تشاكل تقابلي ذاتي إذا وإذا كان فقط G زمرة تبديلية.

البرهان

أولاً: نفرض أن φ تشاكل تقابلي ذاتي ونبرهن أن G زمرة تبديلية

نفرض أن $a,b \in G$

إذاً $\varphi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$= \varphi(b)\,\varphi(a) = \varphi(ba)$

إذاً $\varphi(ab) = \varphi(ba)$

إذاً $ab = ba$

إذاً G زمرة تبديلية.

ثانيًا: نفرض أن G زمرة تبديلية ونبرهن أن φ تشاكل تقابلي ذاتي.

$\varphi(ab) = (ab)^{-1}$

$= b^{-1}a^{-1}$

$= a^{-1}b^{-1}$

$= \varphi(a)\,\varphi(b)$

إذاً $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$

إذاً φ تشاكل.

واضح أن φ تشاكل فوقي ذاتي ويكفي أن نبرهن أن φ أحادية

نفرض أن $\varphi(a) = \varphi(b)$

إذاً $a^{-1} = b^{-1}$

$aa^{-1}b = ab^{-1}b$

إذاً $a = b$

إذاً φ دالة أحادية

إذاً φ تشاكل تقابلي ذاتي.

مبرهنة

إذا كان φ تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة G' ،فإن:

1- $\varphi(H)$ زمرة جزئية من G' لكل زمرة جزئية H من G.

2- $\varphi^{-1}(K)$ زمرة جزئية من G لكل زمرة جزئية K من G'.

البرهان:

1- من المعلوم أن $\varphi(H) = \{\varphi(h) : h \in H\}$

واضح أن $\varphi(H) \neq \phi$ لأنها على الأقل تحتوي على e'

لنفــرض أن $\varphi(h_1),\varphi(h_2)\in\varphi(H)$ هــذا يعنـــي أن $h_1 , h_2 \in H$ وبـــذلك يكـــون $h_1 h_2^{-1} \in H$

الآن $\varphi(h_1)(\varphi(h_2))^{-1} = \varphi(h_1)\varphi(h_2^{-1})$

$= \varphi(h_1 h_2^{-1}) \in \varphi(H)$

إذن $\varphi(H)$ زمرة جزئية من G'.

-2 من المعلوم أن $\varphi^{-1}(K) = \{g\in G : \varphi(g)\in K\}$

واضح أن $\varphi^{-1}(K)\neq\phi$ لأنها على الأقل تحتوي على e

الآن إذا كان $g_1 , g_2 \in\varphi^{-1}(K)$ فإن $\varphi(g_1),\varphi(g_2)\in K$

وبذلك فإن $\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1}\in K$ ولكن $\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = \varphi(g_1)\varphi(g_2^{-1}) = \varphi(g_1 g_2^{-1})$

هذا يعني أن $g_1 g_2^{-1} \in\varphi^{-1}(K)$ وبالتالي فإن $\varphi^{-1}(K)$ زمرة جزئية من G.

نتيجة

إذا كان Φ تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة G' ،فإن:

1. $\Phi(H)$ زمرة جزئية ناظمية من G' لكل زمرة جزئية ناظمية H من G عندما يكون Φ تشاكل فوقي.
2. $\Phi^{-1}(K)$ زمرة جزئية ناظمية من G لكل زمرة جزئية ناظمية K من G'.

مبرهنة

أي زمرة دورية Cyclic غير منتهية تتشاكل مع الزمرة Z (مجموعة الأعداد الصحيحة مع عملية الجمع).

البرهان:

لتكن G زمرة دورية أي أن: $G = < a > = \{a^n : n\in Z\}$

بما أن G زمرة دورية غير منتهية فإن كل العناصر a^n مختلفة:

1. نعرف الدالة $\Phi : G \to Z$ بالقاعدة: $\Phi(a^n)=n$
2. نفرض أن $\Phi(a^n) = \Phi(a^m)$

إذاً $n = m$

إذاً $a^n = a^m$

وهذا يثبت أن Φ دالة أحادية.

واضح من تعريف Φ أن لكل $n \in Z$ يوجد $a^n \in G$ بحيث $\Phi (a^n) = n$ أي أن Φ دالة فوقية.

3. $\Phi(a^n a^m) = \Phi(a^{n+m})=n+m=\Phi(a^n)+\Phi(a^m)$ لكل $a^n ,a^m \in G$

ملاحظة:

إن عملية التشاكل التقابلي بين الزمر تعني أن الصفات البنيوية يجب أن تتصف بها كل الزمر المتشاكلة ومن هنا يمكن أن نبين أن الزمرتين G و G' تكونان غير متشاكلتين تقابليًا عندما.

1. لا توجد دالة أحادية بينهما.
2. لا توجد دالة فوقية بينهما.
3. نجد أن أحد الزمرتين لها صفة بنيوية بينما الأخرى لا تمتلك تلك الصفة البنيوية وأهم الصفات البنيوية ما يلي.

الزمرة دورية والزمرة إبدالية والزمرة منتهية والزمرة لها رتبة 8 مثلاً والزمرة لها بالضبط عنصران ذو رتبة 6 مثلاً وللمعادلة $x^2 = a$ حل لكل a في الزمرة.

مثال الزمرتين $(Z, +)$ و $(Q, +)$ ليستا متشاكلتين لأن الزمرة $(Z, +)$ دورية بينما Q ليست دورية.

وكذلك الزمرة Q^* للعناصر غير الصفرية في Q مع عملية الضرب ليست متشاكلة مع الزمرة $\Re^*$ للعناصر غير الصفرية في $\Re$ مع عملية الضرب وذلك لأن أي عنصر في $\Re^*$ هو مكعب أحد عناصر $\Re^*$، أي أن لكل $a \in \Re^*$ يكون للمعادلة $x^3 = a$ حل في $\Re^*$ ولكن على سبيل المثال لا يوجد حل للمعادلة $x^3 = 2$ في Q^*

تعريف

إذا كان φ تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة G' فإن مجموعة العناصر في G ،والتي تعطي تحت تأثير التشاكل العنصر المحايد في G' تسمى نواة التشاكل φ (Kernal of Homomorphism) ويرمز لها بالرمز $\operatorname{Ker}(\varphi)$ أي أن: $Ker(\varphi) = \{x \in G : \varphi(x) = e'\}$

مثال

عين نواة التشاكل $\varphi : \Re \to \Re^*$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = e^x \ \forall x \in \Re$

الحل:

$$\ker\varphi = \{x \in \Re : \varphi(x) = 1\} = \{x \in \Re : e^x = 1\} = \{0\}$$

ملاحظة:

$\ker \varphi \neq \{\ \}$ لأي تشاكل φ لأنها تحتوي على الأقل على العنصر المحايد e في G.

ملاحظة:

من النتيجة السابقة نستنتج أن $\ker \Phi$ زمرة جزئية ناظمية من G

لأن: $\ker \Phi = \Phi^{-1}(\{e'\})$

ويمكن توضيح ذلك كالتالي:

نفرض $\ker\Phi = \{e'\}$ وسنبرهن أن $\Phi^{-1}(\ker\Phi)$ ناظمية من G.

لاحظ أن $\ker \Phi$ هي الزمرة التافهة وبالتالي فهي زمرة جزئية من G' وكذلك هي زمرة جزئية ناظمية من G'.لأن لكل $x \in G'$ و $e' \in k$ فإن $x\, e'\, x^{-1} = e' \in \ker\Phi$

إذاً $\ker \Phi$ زمرة جزئية ناظمية من G' وبالتالي فإن $\Phi^{-1}(\ker\Phi)$ زمرة جزئية ناظمية من G.

إذاً $\ker \Phi$ زمرة جزئية ناظمية من G لأي تشاكل Φ من الزمرة G إلى الزمرة G'.

مبرهنة

إذا كان φ تشاكل زمري ،فإن φ تشاكل أحادي إذا وإذا كان فقط $\mathrm{Ker}(\varphi) \equiv \{e\}$.

البرهان:

نفرض أن φ دالة تشاكل أحادي ونبرهن أن $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$

نفرض أن $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\therefore\ \varphi(a) = e'$

بما أن $\varphi(e) = e'$ فإن $\varphi(e) = \varphi(a)$ وهذا يؤدي إلى أن $e = a$ لأن φ دالة أحادية

هذا يعني أن $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$

العكس

نفرض أن $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$ ونبرهن أن φ تشاكل أحادي

نفرض أن $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ وبالتالي نجد أن

$$\varphi(g_1)(\varphi(g_2))^{-1} = \varphi(g_2)(\varphi(g_2))^{-1}$$

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2^{-1}) = e'$$

$$\varphi(g_1 g_2^{-1}) = e'$$

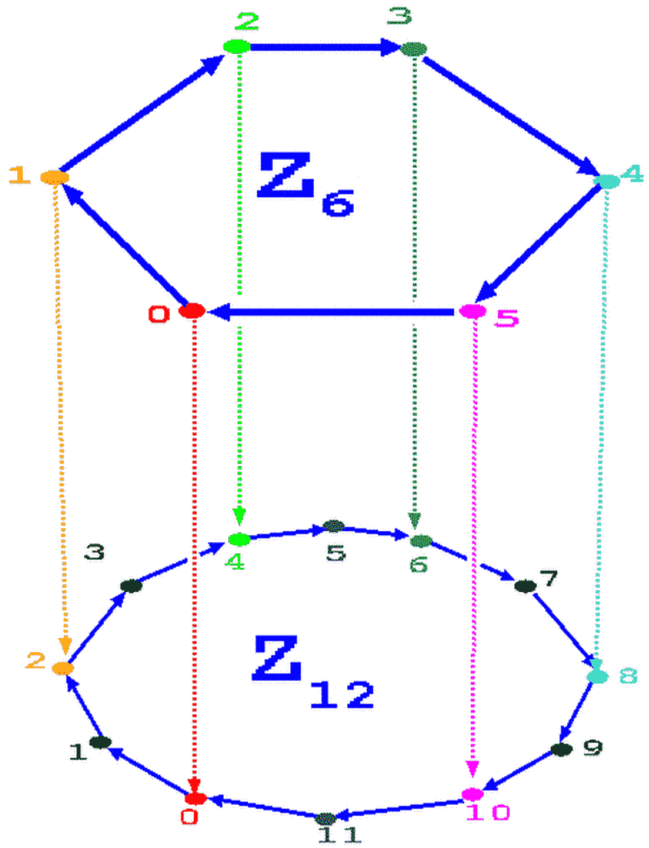
$$g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{Ker}\ \varphi$$

$$\Rightarrow\ g_1 g_2^{-1} = e$$

هذا يعني أن $g_1 = g_2$ وبالتالي فإن التشاكل φ أحادي

مثال

الشكل البياني التالي يوضح التشاكل الأحادي (monomorphism) $\varphi: Z_6 \to Z_{12}$ من Z_6 إلى Z_{12} المعرف بالقاعدة $\varphi([n]_6) = [2n]_{12}$

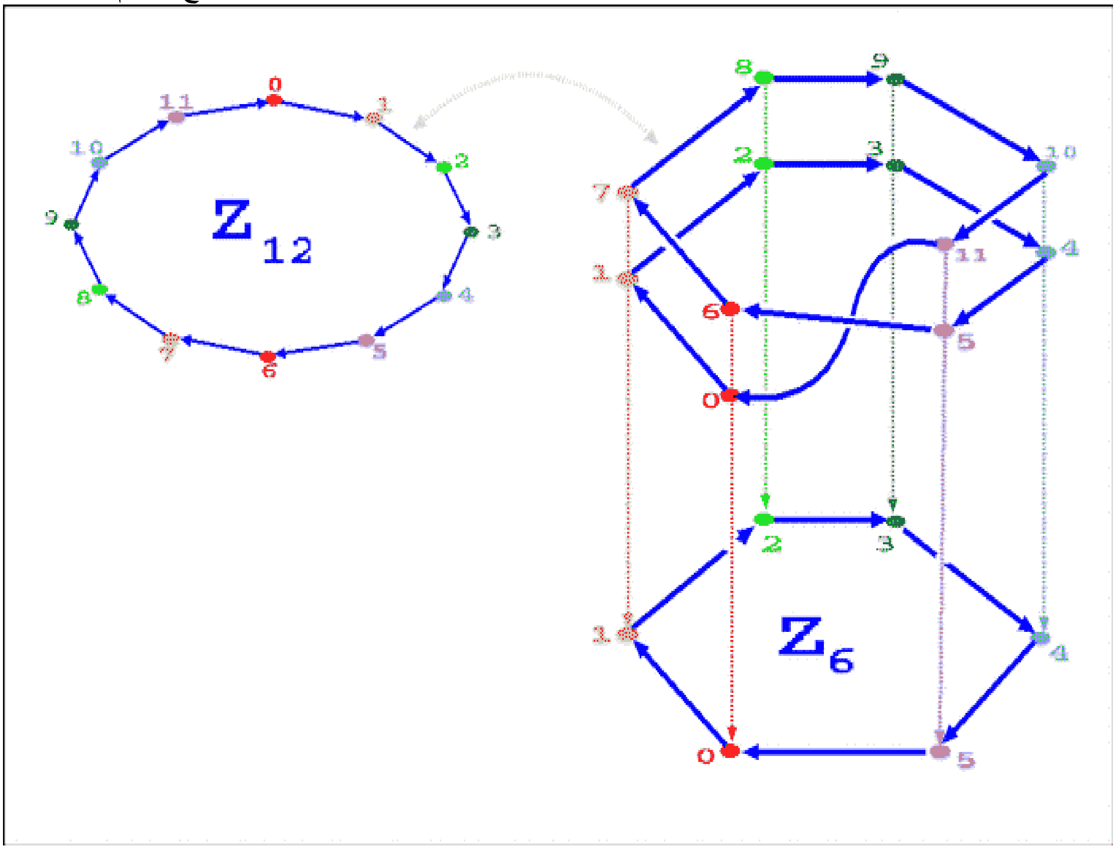


لاحظ أن:

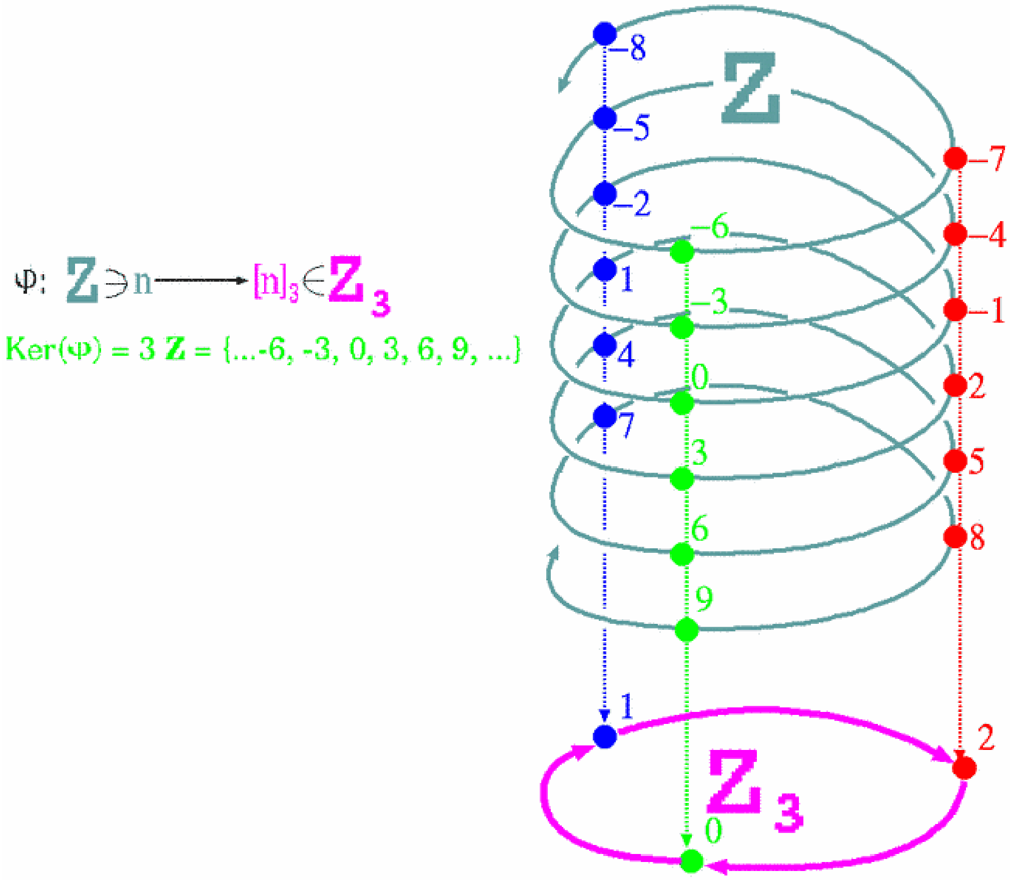
$$\mathrm{Im}(\varphi)=\{[0]_{12},\ [2]_{12},\ [4]_{12},\ [6]_{12},\ [8]_{12},\ [10]_{12}\}\neq Z_{12}$$

مثال

الشكل البياني التالي يوضح التشاكل الفوقي (epimorphism) $\varphi: Z_{12}\to Z_6$ من Z_{12} إلى Z_6 المعرف بالقاعدة $\varphi([n]_{12})=[n]_6$



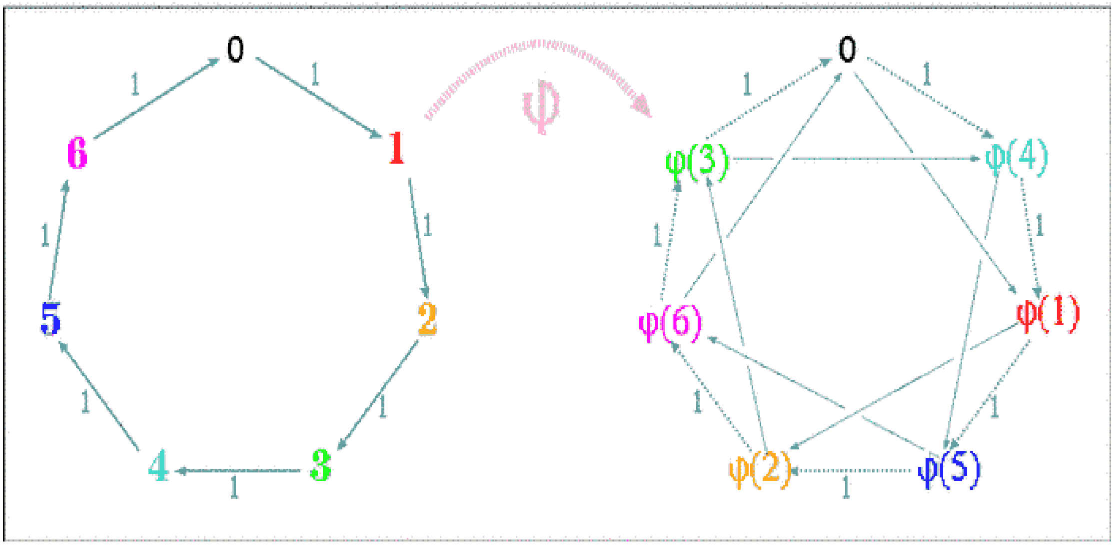
مثال: الشكل البياني التالي يوضح التشاكل $\varphi : Z \to Z_3$ المعرف بالقاعدة $\varphi(n) = [n]_3$



لاحظ أن $\mathrm{Ker}\,\varphi = 3Z = \{.....,-6,-3,0,3,6,......\}$

مثال

الشكل التالي يوضح التشاكل التقابلي الذاتي (automorphism) من Z_7 إلى Z_7 المعرف بـ $\varphi([n]_7) = [2n]_7$



مبرهنة

إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G فإنه يمكن تعريف تشاكل فوقي $\varphi: G \to G/N$ بحيث تكون نواته الزمرة الجزئية الناظمية N.

البرهان

واضح أن $\varphi: G \to G/N$ والمعرفة بـ $\varphi(g) = gN$ تشاكل فوقي.

نفرض أن $g \in \text{Ker } \varphi$

$$\varphi(g) = gN = N$$

$$g \in N \;\Rightarrow\; \text{Ker } \varphi \subseteq N \qquad (1)$$

نفرض $y \in N$

$$N = yN = \varphi(y) \Rightarrow y \in \text{Ker } \varphi$$

$$\Rightarrow N \subseteq \text{Ker } \varphi \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $N = \text{Ker } \varphi$

المبرهنة الأساسية للتشاكل

إذا كان G, G' زمرتان وكان $\varphi: G \to G'$ تشاكل فوقي نواته K فإن الزمرتان $G/K\ ,\ G'$ متشاكلتان تقابلياً أي أن $G/K \approx G'$

البرهان:

$$\begin{tikzcd} & G/K \arrow[dr, "f"] & \\ G \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & G' \end{tikzcd}$$

من المبرهنة السابقة عرفنا أن

$\psi: G \to G/K$ تشاكل فوقي

الآن نعرف الدالة f من الزمرة G/K إلى الزمرة G' كما يلي:

$$f(gK) = \varphi(g) \qquad \forall\ gK \in G/K$$

أولاً: نوضح أن f معرفة تعريفاً جيداً

إذا كان $g'K = gK$ حيث $g', g \in G$ فإن

$(g')^{-1}gK = K$ أي أن $(g')^{-1}g \in K$

هذا يعني أن $\varphi\left((g')^{-1}g\right) = e'$ أي أن $\varphi(g^1)^{-1}\varphi(g) = e'$

هذا يعني أن $\varphi(g) = \varphi(g')$ وبالتالي فإن $f(gK) = f(gK)$

إذن الدالة f معرفة تعريفاً جيداً

لإثبات أن f دالة فوقية نفرض أن $g' \in G'$

إذن يوجد $g \in G$ بحيث $\varphi(g) = g$ لأن φ دالة فوقية

هذا يعني أن $g' = \varphi(g) = f(gK)$

إذن لكل $g' \in G^1$ يوجد $gK \in G/K$ حيث $f(gK) = g'$ وبالتالي فإن f فوقية

لبرهنة أن f أحادية نفرض أن $f(g_1K) = f(g_2K)$

إذن $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$

$$(\varphi(g_1))^{-1}\varphi(g_2)=e'$$
$$\varphi(g_1^{-1}g_2)=e' \Rightarrow g_1^{-1}g_2\in K$$
$$g_1K=g_2K$$

$\therefore$ f دالة أحادية.

لبرهنة أن f دالة تشاكل نفرض أن $g_1K\ ,\ g_2K\in G/K$

$$\therefore f(g_1Kg_2K)=f((g_1g_2)K)=\varphi(g_1g_2)$$
$$=\varphi(g_1)\varphi(g_2)$$
$$=f(g_1K)f(g_2K)$$

هذا يعني أن f دالة تشاكل

مبرهنة كيلي

كل زمرة منتهية متشاكلة تقابليا مع زمرة تباديل .

البرهـان:

نفرض أن $(G,*)$زمرة منتهية من الرتبة n.

ليكن$a\in G$ نعرف الدالة $F_a:G\to G$ كالتالي: $\forall x\in G \quad F_a(x)=a*x$

F_a معرفة تعريفا جيدا وذلك لأن $a*x\in G$.

وكذلك إذا فرضنا أن $a*\bar{x}=a*x$ فإن $F_a(\bar{x})=F_a(x)$.

لبرهنة أنF_a دالة أحادية نفرض أن $x,y\in G\ ,$ $F_a(x)=F_a(y)$.

$$\Rightarrow a*x=a*y\Rightarrow x=y$$

وبما أنG منهية , F_a دالة أحادية فإنها تكون فوقية أيضا

$\Leftarrow F_a$ دالة تباديل علىG .

$$Let\quad n=\{F_a : a\in G\}$$

واضح أن لكل$a,b\in G$ إذا كان$a\neq b$ فإن $F_a=F_b$.

واضح أنn هي مجموعة من التباديل على G

$$Let\quad F_a,F_b\in n\Rightarrow (F_a\circ F_b)_{(x)}=F_a.(F_b(x))$$
$$=F_a(b*x)=a*(b*x)$$
$$=(a*b)*x=F_{a+b}(x)$$
$$\Rightarrow F_a\circ F_b=F_{a+b}\in n$$

n مغلقة تحت العملية $\circ \Rightarrow$.

ولذلك $(n,\circ)$ زمرة جزئية من $(S_n,\circ)$.

الآن نبرهن أن $(n,\circ)\cong(G,*)$.

$$Let \quad \phi : G \to n \ : \ \phi(a) = F_a \quad \forall\, a \in G$$

$$\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow F_a = F_b \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow \phi \ one\ to\ one$$

$$Now \quad o(G) = o(n) = n \quad , \quad \phi \quad one\ to\ one$$

$\therefore \Leftarrow \phi$ دالة فوقية .

$$\phi(a * b) = F_{a*b} = F_a \circ F_b = \phi(a) \circ \phi(b)$$

$\therefore \Leftarrow \phi$ دالة تشاكل تقابلي

$$\Rightarrow (G, *) \cong (n, \circ)$$

مثال

أوجد زمرة تباديل تكون متشاكلة تقابليا مع الزمرة $G = \{1, -1, i, -i\}$ مع عملية الضرب

الحل:

$$Let \quad F_a(x) = a * x \qquad \forall\, a \in G\, ,\, x \in G$$

$$F_1(x) = 1 \times x = x$$

$$F_{-1}(x) = -1 \times x = -x$$

$$F_i(x) = i \times x = ix$$

$$F_{-i}(x) = -i \times x = -ix$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix}, F_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

$$F_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ i & -i & -1 & 1 \end{pmatrix}, F_{-i} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -i & i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow n = \{F_1, F_{-1}, F_i, F_{-i}\}$$

إذاً $(n, \circ)$ زمرة تباديل وهي متشاكلة تقابليا مع $\{1, -1, i, -i\}$.

الجداء المباشر Direct Product

تعريف

إذا كانت $G_1, G_2, ..., G_n$ زمر فإن الجداء المباشر الخارجي $G_1 \times G_2 \times .... \times G_n$ هو المجموعة التي تتكون من النونيات المرتبة $(a_1, a_2, ..., a_n)$ حيث $a_i \in G_i$ لكل $i = 1,2,....,n$

إذا عرفنا عملية ضرب على $G_1 \times G_2 \times .... \times G_n$ كما يلي:

$(a_1, a_2, ..., a_n)(b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, ..., a_n b_n)$ فإن المجموعة $G = G_1 \times G_2 \times .... \times G_n$ تحت هذه العملية تكون زمرة عنصرها المحايد $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ مع ملاحظة أن e_i العنصر المحايد للزمرة G_i ،ومعكوس العنصر

$(a_1, a_2, ..., a_n) \in G$ هو $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, ..., a_n^{-1})$ وتسمى $G = G_1 \times G_2 \times .... \times G_n$ زمرة الجداء (الضرب) المباشر الخارجي للزمر $G_1, G_2, ..., G_n$

تعريف

الزمرة G جداء مباشر داخلي لزمرها الجزئية $N_1, N_2, ..., N_n$ إذا كان لكل $a \in G$ تمثيل وحيد على الشكل $a = a_1 a_2 ...... a_n$ حيث $a_i \in N_i$ لكل $1 \le i \le n$

مبرهنة

إذا كان N, M زمرتان جزئيتان ناظميتان من الزمرة G و $M \cap N = \{e\}$ فإن: $xy = yx$ حيث $x \in N \ , y \in M$

مبرهنة

إذا كانت الزمرة G جداء مباشر داخلي لزمرها الجزئية $N_1, N_2, ..., N_n$ فإن: $N_i \cap N_j = \{e\} \quad : i \ne j$

مبرهنة

إذا كانت الزمرة G جداء مباشر داخلي لزمرها الجزئية $N_1, N_2, ..., N_n$ فإن G تشاكل تقابلياً الجداء المباشر الحارجي $N_1 \times N_2 \times .... \times N_n$ للزمر الجزئية الناظمية N_i حيث $1 \le i \le n$

مبرهنة إذا كان كلاً من G, H زمرة حيث $G \times H$ جدائهما المباشر فإن:

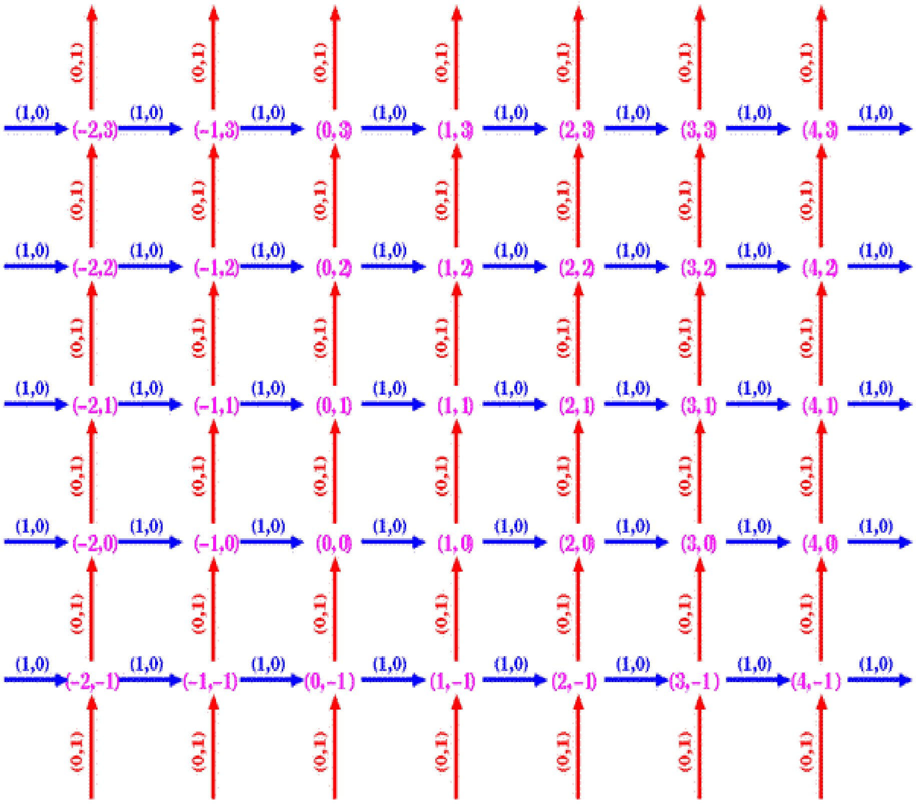
1. $G \times \{e_H\}$ زمرة جزئية ناظمية من $G \times H$
2. $\{e_G\} \times H$ زمرة جزئية ناظمية من $G \times H$
3. $G \approx G \times \{e_H\}$ و $H \approx \{e_G\} \times H$
4. إذا كان كلاً من G, H زمرة منتهية فإن $|G \times H| = |G||H|$

مثال

الزمرة $Z_2 \times Z_3$ تحتوي على ستة عناصر هي $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$ وهي زمرة دورية مولدها $(1,1)$ وأن $Z_2 \times Z_3 \approx Z_6$

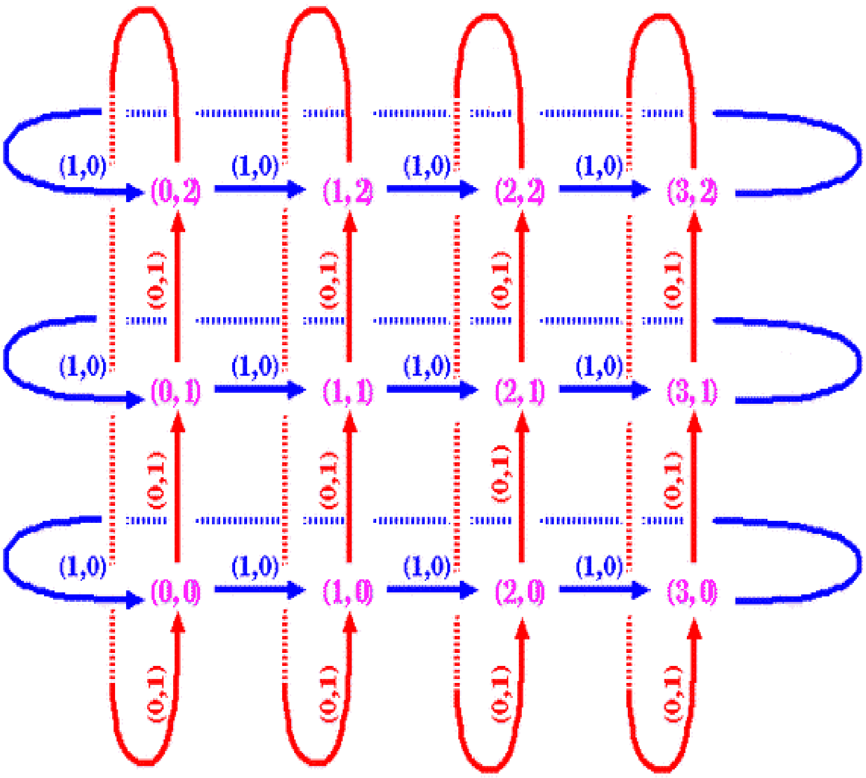
مثال

الشكل البياني بالصفحة التالية يوضح شجرة ثنائية الأبعاد للزمرة التبديلية غير المنتهية $Z^2 = Z \times Z$ مع المولدين $(0,1), (1,0)$



مثال

الشكل البياني التالي يوضح الزمرة التبديلية المنتهية $Z_4 \times Z_3$ مع المولدين $(1,0),(0,1)$



المثال التالي يوضح طريقة مبسطة لتحديد رتبة عنصر في زمرة جداء مباشر.

مثال

أوجد رتبة العنصر $(8,10)$ في الزمرة $Z_{12} \times Z_{18}$ وكذلك رتبة العنصر $(3,10,9)$ في الزمرة $Z_4 \times Z_{12} \times Z_{15}$

الحل

لإيجاد رتبة العنصر $(8,10)$ نوجد:

أولاً: رتبة العنصر 8 في Z_{12} التي تساوي $3 = \frac{12}{4} = \frac{12}{\gcd(8,12)}$

ثانياً: نوجد رتبة العنصر 10 في Z_{18} والتي تساوي $9 = \frac{18}{2} = \frac{18}{\gcd(10,18)}$

$\therefore$ رتبة العنصر $(8,10)$ هي $\operatorname{lcm}(3,9) = 9$

وبنفس الطريقة نوجد رتبة العنصر $(3,10,9)$ في الزمرة $Z_4 \times Z_{12} \times Z_{15}$

$$O(3) = \frac{4}{\gcd(3,4)} = \frac{4}{1} = 4$$
$$O(10) = \frac{12}{\gcd(10,12)} = \frac{12}{2} = 6$$
$$O(9) = \frac{15}{\gcd(9,15)} = \frac{15}{3} = 5$$
$$\therefore O(3,10,9) = \operatorname{lcm}(4,6,5) = 60$$