2-10-2017

نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الاولى ◄ عنوان المحاضرة : المجموعات

يقسم المقرر الى قسمين

المجموعات ونظرية الزمر وهو من مقررات الجبر المجرد .

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعاريف في المجموعات .

٢ـ تعريف صف التكافؤ.

٣ـ مبرهنتان .

مدخل في نظرية المجموعات

المجموعة : هي كمية (أسرة) من العناصر تشترك فيما بينها بخاصة معينة أو تجمعها صفة مشتركة حيث تمكننا هذه الصفة من الحكم على عنصر ما فيما اذا كان ينتمي الى هذه المجموعة ام لا.

نرمز للمجموعة بالأحرف الكبيرة $A, B, C, \dots \dots$ أما عناصرها بالأحرف الصغيرة $a, b, c, \dots \dots$.

تعريف الجداء الديكارتي : لتكن A, B مجموعات غير خالية نسمي المجموعة

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

بالجداء الديكارتي للمجموعتين A, B .

مثال: $R^2 = R \times R$

العلاقة: **هي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ علاقة من A الى B**

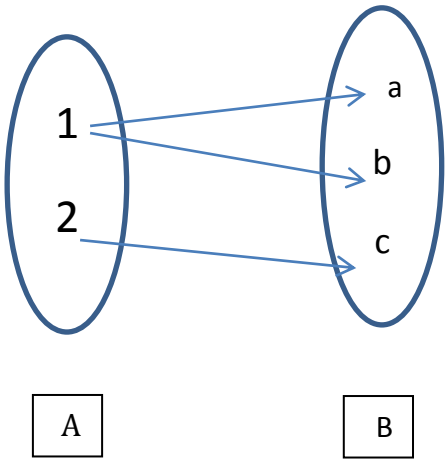
Syria Math Team

مثال: لتكن $A = \{1,2\}$ $B = \{a , b , c\}$

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$\mathcal{P} = \{(1,a),(1,b),(2,c)\}$$

حيث $\mathcal{P}$ علاقة من A الى B لان $\mathcal{P} \subseteq A \times B$



ملاحظات :

١- الجداء الديكارتي غير تبديلي .
٢- تعريف المجموعة الجزئية:نقول عن A مجموعة جزئية من B اذا كان كل عنصر من A موجود في B
٣- نقول ان $A=B$ اذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

تعريف العلاقات الثنائية : عندما $A = B$ لتكن P مجموعة غير خالية نسمي كل مجموعة جزئية في الجداء الديكارتي $P \times P$.

علاقة ثنائية على P ويرمز لها $(\mathcal{P})$.

إذا كانت $\mathcal{P}$ علاقة ثنائية على المجموعة P وكان $(a,b) \in \mathcal{P}$ فإننا نقول إن العنصر b يرتبط بالعنصر a وفق العلاقة $\mathcal{P}$

وتكتب : $a\mathcal{P}b$ أي أنه $\forall (a,b) \in \mathcal{P}$ فإن :

$$(a,b) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a\mathcal{P}b$$

Syria Math Team

تعاريف : لتكن $\mathcal{P}$ علاقة ثنائية على المجموعة p:

١) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها انعكاسية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a \in P\ ; (a,a) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a\mathcal{P}a$$

٢) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها تناظرية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b \in P\ ; (a,b) \in \mathcal{P} \Longrightarrow (b,a) \in \mathcal{P}$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b \in P\ ;\ a\mathcal{P}b \Longrightarrow b\mathcal{P}a$$

٣) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها تخالفية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b \in P : \begin{cases} (a,b) \in \mathcal{P} \\ (b,a) \in \mathcal{P} \end{cases} \Longrightarrow a = b$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b \in P :\ a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a \Longrightarrow a = b$$

٤) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها متعدية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b,c \in P : \begin{cases} (a,b) \in \mathcal{P} \\ (b,c) \in \mathcal{P} \end{cases} \Longrightarrow (a,c) \in \mathcal{P}$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b,c \in P :\ a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}c \Longrightarrow a\mathcal{P}c$$

ملاحظة : العلاقة $a\mathcal{P}b$ تقرأ من اليمين إلى اليسار والعكس غير صحيح حيث b مرتبط مع a

مثال: لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ مجموعة

- لنأخذ العلاقة: $R = \{(1,2),(2,2),(3,4)\}$

١- العلاقة R ليست انعكاسية لان: $1 \in A$ ولكن $(1,1) \notin R$

٢- العلاقة R ليست تناظرية لان: $(1,2) \in R$ ولكن $(2,1) \notin R$

Syria Math Team

٣- لانستطيع الحكم على R فيما اذا كانت تخالفية ام لا
لذلك سنفرض جدلا انها ليست تخالفية أي :

$$\forall(a,b),(b,a)\ \epsilon R \Longrightarrow a\neq b$$

ولكن لم يتحقق هذا الفرض الجدلي لان

$$(2,2),(2,2)\ \epsilon R \Longrightarrow 2=2$$

ومنه فالعلاقة تخالفية .

٤- العلاقة R متعدية لان:

$$(1,2)\ ,(2,2)\in R \quad\Longrightarrow\quad (1,2)\ \epsilon R$$

- والان لنأخذ العلاقة :

$$\mathcal{P}=\{\ (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1)\}$$

١) العلاقة $\mathcal{P}$ انعكاسية.(لأنها من اجل $(\forall a\in A\Longrightarrow (a,a)\in \mathcal{P}$
٢) العلاقة $\mathcal{P}$ تناظرية. (تحقق من ذلك).
٣) العلاقة $\mathcal{P}$ ليست تخالفية لان

$$2\neq 1 \quad \text{لكن} \quad P\in(1,2) \ \text{و}\ P\in(2,1)$$

٤) العلاقة $\mathcal{P}$ متعدية لان

$$(1,2),(1,1)\in P \Longrightarrow (1,1)\epsilon\ P$$

تعريف علاقة التكافؤ : لتكن $\boldsymbol{P}$ مجموعة غير خالية و $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ علاقة ثنائية معرفة على $\boldsymbol{P}$ نقول عن العلاقة $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ إنها علاقة تكافؤ على $\boldsymbol{P}$ إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية .

وليكن $\boldsymbol{a\ \epsilon\ P}$ عندئذ نسمي المجموعة

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\epsilon}\ \boldsymbol{P}\ ,\boldsymbol{a}\mathcal{P}\boldsymbol{x}\}\ \neq\boldsymbol{\phi}$$

بصف التكافؤ المولد بالعنصر $\boldsymbol{a}$ وهي مجموعة جزئية في $\boldsymbol{p}$.

حيث هذه المجموعة غير خالية لأنها تحوي على الأقل a اي $\boldsymbol{a\ \epsilon\ \bar{a}}$ (بما أنها انعكاسية فحتماً a مرتبط مع نفسه فهو ينتمي لـ $\bar{\boldsymbol{a}}$)

ونسمي مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ مجموعة الخارج ونرمز لها $\boldsymbol{P/_{\mathcal{P}}}$

$$P/_{\mathcal{P}}=\{\bar{a}:a\ \epsilon\ P\}$$

لنعود للعلاقة ٢ في المثال السابق:

نجد ان $\mathcal{P}$ علاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية $\Leftarrow$ $\mathcal{P}$علاقة تكافؤ.

صف تكافؤ العنصر1 $\overline{1}=\{1,2\}$

صف تكافؤ العنصر ٢ $\overline{2}=\{2,1\}$

صف تكافؤ العنصر٣ $\overline{3}=\{3\}$

صف تكافؤ العنصر٤ $\overline{4}=\{4\}$

((أي العناصر المرتبطة بهذا العنصر))

وتكون مجموعة الخارج هي $P/_{\mathcal{P}}=\{\overline{1},\overline{3},\overline{4}\}$

لم نضع $\overline{2}$ لان $\overline{1}=\overline{2}$ وفي المجموعة لا نكرر العنصر.

تمهيدية: لتكن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ على المجموعة P و $a,b\in P$ عندئذ:

$$\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow a\in\overline{b}$$

البرهان:

$\Leftarrow$ بفرض ان $\overline{a}=\overline{b}$ عندئذ لما كانت العلاقة $\mathcal{P}$ انعكاسية فإن $a\in\overline{a}=\overline{b}$

$\Rightarrow$ لنفرض ان $a\in\overline{b}$

-ليكن $x\in\overline{a}$ عندئذ $a\,\mathcal{P}\,x$ ولدينا $a\in\overline{b}$

عندئذ $b\,\mathcal{P}\,a$ ولما كانت $\mathcal{P}$ متعدية نجد ان $b\,\mathcal{P}\,x$ ومنه

$x\in\overline{b}$ ومنه $\overline{a}\subseteq\overline{b}$

ليكن $y\in\overline{b}$ عندئذ $b\,\mathcal{P}\,y$ ولما كانت $\mathcal{P}$ تناظرية فإن $a\,\mathcal{P}b$ وبما ان $\mathcal{P}$ متعدية نجد ان$a\,\mathcal{P}\,y$ ومنه

$y\in\overline{a}$ ومنه $\overline{b}\subseteq\overline{a}$ $\Leftarrow$ $\overline{a}=\overline{b}$.

Syria Math Team

*** تعريف:** لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن Σ أسرة من المجموعات الجزئية غير الخالية من P .

نقول عن Σ أنها تشكل تجزئة للمجموعة P إذا حققت الشروط :

١) $\forall\ A \in \Sigma\ , A \neq \emptyset$

٢) $\forall\ A\ , B \in \Sigma$ فإن $\begin{cases} A = B : & \text{إما} \\ A \cap B = \emptyset : & \text{أو} \end{cases}$

٣) $P = \bigcup_{A \in \Sigma} A$

- أي A غير خالية وغير متقاطعة مثنى مثنى

- يمكن التعبير عنها من خلال اجتماع مجموعاتها الجزئية.

تعريف التجزئة: هو عدد هذه المجموعات الجزئية غير خالية وغير متقاطعة واجتماعها يعطينا كل المجموعات.

مثال: لتكن $\mathbf{Z}$ مجموعة الاعداد الصحيحة:

$$Z^+ = \{a : a \in Z\ : a > 0\}\ ,\quad Z^- = \{a : a \in Z\ : a < 0\}\ ,\quad \{0\}$$

ومنه تكون التجزئة للمجموعة Z حسب التعريف هي

$$\sum = \{Z^+ , Z^-, \{0\}\}$$

مثال٢:

$$Z_1 = \{a: a \in Z : a > 5\}$$

$$Z_2 = \{a: a \in Z : a < -6\}$$

$$Z_3 = \{a: a \in Z : -6 < a < 5\}$$

$$Z_4 = \{-6, 5\}$$

ومنه تكون التجزئة للمجموعة Z حسب التعريف هي

$$\sum = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$$

Syria Math Team

ملاحظة:

- يمكن تعريف اكثر من تجزئة على المجموعة الواحدة.
- يمكن تعريف اكثر من علاقة تكافؤ على المجموعة الواحدة.

تمهيدية : لتكن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ معرفة على P إن مجموعة الخارج $P/_{\mathcal{P}} = \{\bar{a}: a \in P\}$ تشكل تجزئة للمجموعة P .

البرهان :

الشرط الأول : لنبرهن انها غير خالية

لدينا $P/_{\mathcal{P}} = \{\bar{a}: a \in P\}$

$$\forall \bar{a} \in P/_{\mathcal{P}} \; ; a \in \bar{a} \Rightarrow \bar{a} \neq \emptyset$$

الشرط الثاني :

١) إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ فإنه يتم المطلوب .

٢) إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ أي تحويان على الأقل عنصر مشترك

$$\exists\, d \in \bar{a} \cap \bar{b} : d \in P$$

حسب التمهيدية السابقة اذا كان عنصر انتمى إلى صف تكافؤ فإن $\bar{a} = \bar{b}$ ولنحقق ذلك :

$$d \in \bar{a} \Rightarrow \bar{d} = \bar{a} \quad , \quad d \in \bar{b} \Rightarrow \bar{d} = \bar{b} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

الشرط الثالث: $P = \bigcup_{a \in P}\{a\} \subseteq \bigcup_{a \in P} \bar{a} = \bigcup_{\bar{a} \in P/_{\mathcal{P}}} \bar{a} \subseteq P$

ومنه $P = \bigcup_{\bar{a} \in P/_{\mathcal{P}}} \bar{a}$

ومنه المجموعة $P/_{\mathcal{P}}$ تشكل تجزئة للمجموعة P.

انتهت المحاضرة

ملاحظة : عندنا نضع (:) فإننا نعني (بحيث) , اما عندنا نضع (;) فإننا نعني كلمة (فإن)

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team

3-10-2017

نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثانية

◄ عنوان المحاضرة : علاقات التكافؤ والترتيب.

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- بدأ الدكتور بمراجعة المحاضرة الأولى ثم اعطى:
- مبرهنتان تعتمد على ماسبق.
- علاقات الترتيب ك مبرهنات وتعاريف.
- تعاريف مهمة للعناصر وامثلة عليها .

والآن لنبدأ :)

مبرهنة: لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض ان Σ تجزئة للمجموعة P عندئذ العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على P بالشكل:

$$\forall a,b \in P:\ a\mathcal{P}b \Leftrightarrow \exists\, A \in \Sigma\ ;\ a,b \in A$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P وإن صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{P}$ هي وفقط هي عناصر التجزئة Σ أي أن :

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

البرهان :

لنبرهن أن $\mathcal{P}$ هي علاقة تكافؤ فإن :

١) $\mathcal{P}$ انعكاسية لأن : بما ان Σ تجزئة للمجموعة P فهذا وحسب الشرط الثالث من شروط التجزئة

$P = \cup_{A\,\epsilon\Sigma}\ A$ كل عنصر من p ينتمي لواحدة على الأقل من المجموعات الجزئية

لنأخذ عنصر كيفي من $a \in P$ فيكون $a \in \cup_{A\,\epsilon\Sigma}\ A$ وبذلك

$$\exists\, A \in \Sigma\ ;\ a \in A \implies a\mathcal{P}a$$

٢) $\mathcal{P}$ تناظرية لأن : لنأخذ عنصريين كيفيين

$$\forall a,b \in P:\ a\mathcal{P}b \Leftrightarrow \exists\, B \in \Sigma\ ;\ a,b \in B\ ,\ b,a \in B \implies b\mathcal{P}a$$

٣) $\mathcal{P}$ متعدية لأن : لنأخذ ثلاث عناصر كيفية : $\forall a,b,c\ \epsilon P$

$$a\mathcal{P}b\ \exists\ A \in \Sigma\ ;\ a,b \in A$$
$$b\mathcal{P}c\ \exists\ B \in \Sigma\ ;\ b,c \in B$$
$$\implies b \in A \cap B \implies A \cap B \neq \emptyset$$

وكون Σ تجزئة للمجموعة P فإن : $A = B$ ومنه $a,c \in A \Rightarrow a\mathcal{P}c$ ومنه $\mathcal{P}$ متعدية .

لنثبت الان المساواة:

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

ليكن $A \in \Sigma$ عندئذ $A \neq \emptyset$ ومنه يوجد $a \in A$ و لنبرهن ان $A = \bar{a}$

ليكن $x \in A$ عندئذ $a, x \in A$ ومنه $a\mathcal{P}x$ (حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة)

وبالتالي $x \in \bar{a}$ ومنه $A \subseteq \bar{a}$

وليكن $y \in \bar{a}$ عندئذ $a\mathcal{P}y$ (و حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة) يكون $\exists B \in \Sigma \; ; \; a, y \in B$

$a \in A \cap B$ وبالتالي $A = B$ (حسب الشرط الثاني من شروط التجزئة)

$$\Rightarrow y \in A$$

$$\Rightarrow \bar{a} \subseteq A$$

$$A = \bar{a} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

وبالتالي نحصل على ان

$$\Sigma \subseteq {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $\bar{b} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ حيث $b \in P = \bigcup_{D \in \Sigma} D$

ومنه يوجد $D_0 \in \Sigma$ بحيث $b \in D_0$ ولنبرهن على $\bar{b} = D_0$

ليكن $x \in D_0$ عندئذ $b, x \in D_0$ (حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة) $\Leftarrow b\mathcal{P}x$ ومنه $x \in \bar{b}$ ومنه

$$D_0 \subseteq \bar{b}$$

وليكن $y \in \bar{b}$ عندئذ $b\mathcal{P}y$ ومنه (حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة)

$$\exists k \in \Sigma; b, y \in k$$

اصبح لدينا $b \in D_0 \cap k$ ومنه $D_0 = k$ (حسب الشرط الثاني من شروط التجزئة)

ونجد ان $y \in D_0$ أي ان $\bar{b} \subseteq D_0$ ومنه $\bar{b} = D_0 \in \Sigma$

وهكذا فإن كل مجموعة تنتمي الى Σ اصبح موجوداً في ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ أي أن

$${}^{P}/_{\mathcal{P}} \subseteq \Sigma$$

$$\Rightarrow {}^{P}/_{\mathcal{P}} = \Sigma$$

Syria Math Team

ملاحظة: لتكن Σ تجزئة للمجموعة P ، سوف نرمز لعلاقة التكافؤ الناتجة عن التجزئة Σ بالشكل $\mathcal{P}_\Sigma$.

مبرهنة: لتكن θ و Σ تجزئتين للمجموعة P فإن $\mathcal{P}_\theta$ و $\mathcal{P}_\Sigma$ علاقتي التكافؤ الناتجتين عن التجزئتين θ و Σ عندئذ :

$$\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_\theta \Leftrightarrow \Sigma = \theta$$

البرهان :

" $\Leftarrow$ " لنفرض أن $\Sigma = \theta$ ولنبرهن أن $\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_\theta$ وليكن $(a,b)\epsilon\, \mathcal{P}_\Sigma$ حيث $a,b \epsilon$ P عندئذ :
حسب تعريف $\mathcal{P}_\Sigma$ نجد أن :

$$\exists\, A \epsilon \Sigma\, ; a,b \epsilon A$$

ولدينا $\Sigma = \theta$ فرضا فإن $A \epsilon \theta$

$$a,b \epsilon A \implies a\, \mathcal{P}_\theta\, b$$

أي أن : $a\, \mathcal{P}_\theta b$ ومنه $\mathcal{P}_\Sigma \subseteq \mathcal{P}_\theta$.

لنبرهن أن $\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$ أي **لنبرهن الاحتواء المعاكس** : وليكن $(d,f)\epsilon\, \mathcal{P}_\theta$ حيث $d,f \epsilon$ P عندئذ :
حسب تعريف $\mathcal{P}_\Sigma$ نجد أن :

$$\exists\, B \epsilon \theta; d,f \epsilon B$$

ولدينا $\Sigma = \theta$ فرضاً ومنه $B \epsilon \Sigma$.

أي أن : $d,f \epsilon \Sigma$ فإن $f\, \mathcal{P}_\Sigma\, d$ ومنه $(d,f)\epsilon\, \mathcal{P}_\Sigma$ ومنه يكون :

$$\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$$

ومن الاحتوائيين : $\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$ و $\mathcal{P}_\Sigma \subseteq \mathcal{P}_\theta$ يكون $\mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$.

" $\Rightarrow$ " نفرض أن العلاقتين $\mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$ عندئذ يكون $P/\mathcal{P}_\theta = P/\mathcal{P}_\Sigma$

بناءً على مبرهنة سابقة : فإن كل تجزئة تعرف علاقة تكافؤ وأن صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي وفقط هي عناصر التجزئة فهذا يؤدي أن :

$$\Sigma = P/\mathcal{P}_\Sigma = P/\mathcal{P}_\theta = \theta$$

وبذلك تم المطلوب.

Syria Math Team

تمهيدية: ((الوظيفة))

لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض أن l مجموعة كل التجزئات المعرفة على P
و l_0 مجموعة كل علاقات التكافؤ المعرفة على P عندئذ : يوجد تطبيق متباين وغامر (تقابل) بين l و l_0 و ليكن $f : l \to l_0$

البرهان :

لنعرف العلاقة بالشكل : $f : l \to l_0$

$$\forall \Sigma \in l : f(\Sigma) = \mathcal{P}_\Sigma$$

ولما كان $\mathcal{P}_\Sigma$ علاقة تكافؤ على P فإن $\mathcal{P}_\Sigma \in l_0$

f تطبيق لأن :

$$\forall \Sigma, \theta \in l : \theta = \Sigma \implies \mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$$
$$\implies f(\Sigma) = f(\theta)$$

f تطبيق متباين لأن :

$$f(\Sigma) = f(\theta) \implies \mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$$
$$\implies \Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}_\Sigma} = {}^{P}/_{\mathcal{P}_\theta} = \theta$$

f تطبيق غامر لأنه :
$\mathcal{P} \in l_0$ فإن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ على P .
عندئذ فإن مجموعة الخارج ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ تشكل تجزئة للمجموعة P وبالتالي ${}^{P}/_{\mathcal{P}} \in l$ أي أنّ :

$$\implies f\left({}^{P}/_{\mathcal{P}}\right) = \mathcal{P}_{{}^{P}/_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$$

ومنه f تقابل و هو المطلوب .

علاقات الترتيب

تعريف : لتكن P مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}$ علاقة معرفة على P نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ أنها علاقة ترتيب جزئي على المجموعة P إذا كانت العلاقة $\mathcal{P}$ ((انعكاسية – تخالفيه –متعدية))ويرمز عادة لعلاقة الترتيب بالرمز $\leq$.
اذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب على المجموعة P نسمي الثنائية $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً .

$$\forall a, b \in P : a \leq b \iff \begin{cases} a = b \\ a < b \end{cases}$$

ملاحظة: ليست كل المجموعات معرّف عليها علاقة تكافؤ , وليس كل المجموعات معرّف عليها علاقة ترتيب.

ولا نستطيع التعامل مع مجموعة اذا لم تكن معرفة على علاقة إما تكافؤ او ترتيب.

Syria Math Team

مثال: مجموعة الاعداد الطبيعية هي مجموعة مرتبة جزئياً

$$0 < 1 < 2 < 3 \dots$$

مجموعة الاعداد الصحيحة هي مجموعة مرتبة جزئيا

$$\dots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$$

- توجد اكثر من علاقة ترتيب على المجموعة الواحدة مثلا

ان مجموعة الاعداد الصحيحة مرتبة وفق علاقة ترتيب أخرى بالشكل :

$$0 < 1 < 2 \cdots < -1 < -2 < \cdots$$

مبرهنة : لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن $\leq$ علاقة انعكاسية ومتعدية معرفة على P عندئذ :

١) العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على P بالشكل الاتي :

$$\forall a,b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$$

هي علاقة تكافؤ على P .

٢) العلاقة $(\leq)$ المعرفة على مجموعة الخارج ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ بالشكل الاتي :

$$\forall \bar{a},\bar{b} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}} ; \bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

هي علاقة ترتيب جزئي على ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$.

البرهان :

١) لنثبت انها انعكاسية :

$$\forall a \in P : a \leq a \Leftrightarrow a\mathcal{P}a$$

وانها تناظرية لان

$$\forall a,b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a \Leftrightarrow b \leq a \wedge a \leq b \Leftrightarrow b\mathcal{P}a$$

وانها متعدية لان

$$\forall a,b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$$
$$\forall c,b \in P : b\mathcal{P}c \Leftrightarrow b \leq c \wedge c \leq b$$

ولكن $\leq$ متعدية منه $a \leq c \wedge c \leq a \Leftrightarrow a\mathcal{P}c$

أي أن العلاقة $\mathcal{P}$ متعدية

Syria Math Team

٢) ليكن $\bar{a} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ عندئذ $a \in P$ وان $a \leq a$ ومنه $\bar{a} \leq \bar{a}$ وبالتالي العلاقة $\leq$ انعكاسية .

ليكن $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ بحيث $\bar{b} \leq \bar{a}$ و $\bar{a} \leq \bar{b}$ عندئذ $a, b \in P$ وان $b \leq a,\ a \leq b$

وحسب (١) فإن $a \mathcal{P} b$ ومنه $a \in \bar{b}$ **(احدهما ينتمي لصف تكافؤ الاخر)**

ومنه $\bar{a} = \bar{b} \Leftarrow$ العلاقة $\leq$ تخالفية

ليكن $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ عندئذٍ: $\forall a, b, c \in P$

ولنفرض ان $\bar{b} \leq \bar{c}$ و $\bar{a} \leq \bar{b}$ حسب التعريف: $b \leq c,\ a \leq b$

$$\Rightarrow a \leq c \Rightarrow \bar{a} \leq \bar{c}$$

ومنه العلاقة متعدية وبالتالي فهي علاقة ترتيب ويتم المطلوب .

لنتعرف على بعض العناصر في المجموعات المرتبة:

تعاريف : ليكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً:

١) نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر **أصغر** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P\ ;\ a \leq x$$

٢) نقول عن العنصر $b \in P$ إنه عنصر **أصغري** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P\ ; y \leq b \Rightarrow y = b$$

٣) نقول عن العنصر $a \in P$ أنه عنصر **أكبر** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P : x \leq a$$

٤) نقول عن العنصر $b \in P$ أنه عنصر **أعظمي** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P, b \leq y \Rightarrow b = y$$

و ليس من الضروري أن تتواجد كل هذه العناصر في مجموعة مرتبة ما .

مثال:

- في مجموعة الاعداد الطبيعية (الصفر) هو عنصر **اصغر واصغري** بالنسبة لعلاقة الترتيب المألوفة

$$0 < 1 < 2 < \cdots$$

Syria Math Team

- في مجموعة الاعداد الصحيحة بالنسبة لعلاقة الترتيب المألوفة

$$\cdots -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$$

لا تحوي أيا من العناصر السابقة.

بينما اذا عرّفنا علاقة ترتيب جديدة على مجموعة الاعداد الصحيحة

$$0 < 1 < 2 \cdots -1 < -2 < -3 \cdots$$

فإن العنصر(صفر0) هو عنصر أصغر وأصغري.

مثال: لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن Σ اسرة من المجموعات الجزئية في P

هل يمكن ان نعرّف على هذه الاسرة علاقة ترتيب؟

الحل:

إن الثنائية $(\Sigma .. \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً (علاقة الاحتواء هي علاقة ترتيب جزئي)

$$\forall A \in B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A \not\subset B \end{cases}$$

$A = A$

$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \ \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \ \subseteq D \Rightarrow A \subseteq D$

ومنه فالعلاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية فهي علاقة ترتيب جزئي .

مثال: لتكن$A = \{a, b, c, d\}$ مجموعة ما

ولنأخذ المجموعة $B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ اسرة من المجموعات الجزئية.

ولنأخذ المجموعة $D = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ اسرة من المجموعات الجزئية.

ولنأخذ المجموعة: $K = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\{a, c\}\}$ اسرة من المجموعات الجزئية.

الحل :

$(B, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- $\{a\}$ عنصر اصغر في B (لانه محتوى في كل المجموعات الجزئية في B).

$$\{a\} \subseteq \{a\}$$

$$\{a\} \subseteq \{a, b\}$$

- $\{a, b\}$ عنصر أكبر في B لان (كل المجموعات الجزئية محتواة في العنصر $\{a, b\}$).

$$\{a\} \subset \{a, b\}$$

$$\{b\} \subset \{a, b\}$$

- $\{a\}$ أصغري في B
- $\{a, b\}$ أعظمي في B

$(D,\subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- $\{a\}$ ليس اصغر في D لأنه يوجد $\{b\}\epsilon D$ و $\{a\} \not\subset \{b\}$
- $\{b\}$ ليس اصغر في D لأنه يوجد $\{a\}\epsilon D$ و $\{b\} \not\subset \{a\}$
- $\{a\}$ و $\{b\}$ كل منهما عنصر أصغري .
- $\{a,b\}$ عنصر اكبر وأعظمي في D .

$(K,\subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- $\{a\}$ و $\{b\}$ كل منهما ليس عنصر أصغر في K
- $\{a,b\}$ ليس عنصر اكبر في K .
- $\{a,c\}$ ليس اكبر في K .
- $\{a,b\}$ و $\{a,c\}$ كل منهما عنصر أعظمي في K .

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team

8-10-2017

نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثالثة ◄ عنوان المحاضرة : المجموعات

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-بدأ الدكتور بمراجعة المحاضرة السابقة ثم اعطى:

٢- ثلاث مبرهنات عن المجموعات المرتبة والعناصر.

والآن لنبدأ :)

تمهيدية: لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا عندئذ :

- العنصر الأصغر (الأكبر) وحيد.
- كل عنصر أصغر (أكبر)هو عنصر أصغري (أعظمي) .

البرهان :

١) ليكن $a, b \in P$ ولنفرض ان كل منهما عنصر أصغر في P عندئذٍ "حسب شرط العنصر الأصغر" فإن:

$$a = b \Leftarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases}$$ (لان $\leq$ علاقة تخالفية)

٢) ليكن $d \in P$ ولنفرض ان d عنصر أصغر وليكن $x \in P$ ولنفرض ان $x \leq d$

لما كان d عنصر أصغر $\Leftarrow x \leq d \Leftarrow d = x$

حسب التعريف:

$(*) \; x \leq d \Rightarrow x = d$; $\forall x \in P$ ومنه نجد ان d عنصر أصغري.

(وبطريقة مماثلة من 1 و 2 نتحقق من اجل العنصر الأكبر.)

مبرهنة: لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ،عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

١) **الشرط الأصغري :** كل مجموعة جزئية وغير خالية في P تحوي عنصر أصغري .

٢) **مبدأ الاستقراء :** لتكن θ قضية ما

a_ إن جميع العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ .

b_ ولتكن $a \in P$ إذا كانت جميع العناصر $x \in P$ التي من أجلها $x < a$ المحققة للقضية θ تؤدي الى ان العنصر a يحقق القضية θ . $\Leftarrow$ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ .

Syria Math Team

٣) شرط انقطاع السلاسل المتناقصة :

كل سلسة متناقصة من عناصر المجموعة P على الشكل $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$

تنقطع أي يوجد دليل K لأجله: $a_K = a_{K1} = a_{K2} = \cdots$

البرهان :

$((1 \Leftarrow 2))$ (لنفرض أن الشرط الأصغري محقق ولنثبت مبدأ الاستقراء)

لنفرض ان M هي مجموعة العناصر في P التي **لا تحقق** القضية θ إذا كانت :

١) $M = \emptyset$ يتم المطلوب.

$M \neq \emptyset$ عندئذ وحسب الفرض فإن يوجد في M عنصر أصغري (حسب 1) وليكن a بالتالي a لايحقق القضية θ.

وايضا a ليس أصغري في P لأنه لا يحقق القضية θ (حسب الفرض الذي فرضناه بنص البرهان).

عندئذ $a \neq x$ و $\exists x \in P: x < a$ وان $x \notin M$ وهذا يبين ان العنصر x يحقق القضية θ.

وحسب الفرض (حسب الشرط الثاني من مبدأ الاستقراء) فإن العنصر a يحقق القضية θ وهذا غير ممكن (لان $a \in M$ و M مجموعة العناصر التي لاتحقق القضية θ). مما سبق نجد ان $M = \emptyset$ ويتم المطلوب.

$((3 \Leftarrow 2))$ لنفرض أن مبدأ الاستقراء محقق ولنثبت شرط انقطاع السلاسل المتناقصة .

لنعّرف على المجموعة P قضية θ_0 معرفة بالشكل الاتي : نقول عن العنصر $b \in P$ أنه يحقق القضية θ_0 عندما وفقط عندما اي سلسلة متناقصة من عناصر المجموعة P تبدأ بالعنصر b تنقطع. (هاد فرض استقرائي نحنا فرضناه).

وبالتالي نجد ان العناصر الاصغرية في P تحقق القضية θ_0 .

ليكن $b \in P$ وليكن $x < b$ ولنفرض ان x يحقق القضية θ_0 ولنبرهن ان العنصر b يحقق القضية θ_0

نأخذ السلسلة المتناقصة من P

$$b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots\ldots\ldots *$$

عندئذ فإن b_1 يحقق القضية θ_0 وإن ... $> b_1 > b_2$ سلسلة متناقصة من عناصر P

وحسب الفرض الاستقرائي يوجد دليل K لأجله

$$b_K = b_{K+1} = b_{K+2} = \cdots$$

وهذا يبين ان السلسلة * تنقطع عند الحد K ومنه العنصر b يحقق القضية θ_0

وبالتالي فإن جميع عناصر P تحقق القضية θ_0 وبذلك يتم المطلوب.

Syria Math Team

((3 ⇐ 1)) (لنفرض أن شرط انقطاع السلاسل محقق ولنثبت الشرط الاصغري).

لنفرض جدلا انه يوجد في P مجموعة جزئية وغير خالية ولتكن A ولا تحوي عنصر أصغري

وليكن $a \in A$ ،ان a ليس عنصر أصغري في P وبالتالي يوجد $a_1 \in A$,وان $a > a_1$ و a_1 ليس عنصر أصغري في A $\Leftarrow a_1 > a_2 :\exists a_2 \in A \Leftarrow a > a_1 > a_2$

ولنفرض انه تم الحصول على العنصر $a_n \in A$ والذي من اجله $a_{n-1} > a_n$

ولما كان a_n ليس اصغري في A فإنه يوجد $a_{n+1} \in A$ بحيث $a_{n+1} < a_n$ واصبح لدينا $a > a_1 > a_2 \ldots$ $a_{n-1} > a_n > a_{n+1} > \cdots$

والتي لا تنقطع وهذا يناقض الفرض .ومنه لا يوجد مجموعة جزئية لا تحوي عنصر اصغري .

مبرهنة : كل مجموعة جزئية وغير خالية من مجموعة الاعداد الطبيعية N تحوي عنصر أصغر .

البرهان :

لتكن A مجموعة جزئية وغير خالية في N

اذا كان $0 \in A$ او اذا كان $A = N$ يتم المطلوب. لأنه في هذه الحالة يكون الصفر عنصر اصغر في A.

- لنفرض ان $0 \notin A$ و $A \neq N$
- لنأخذ المجموعة $S = \{x : x \in N,\ x \leq a :\ \forall a \in A\}$

إن $S \neq \emptyset$ لان $0 \in S$

كما ان $S \neq N$ لان اذا كانت $S = N$ وكان $b \in A \Leftarrow b \in S$ ومنه حسب تعريف العلاقة S نجد: $b + 1 > b$ وهذا غير ممكن .

وبالتالي يوجد $k \in S$ بحيث $k + 1 \notin S$ لانه اذا كان $k \in S$ بحيث $k + 1 \in S$ فيكون $S = N$ وهذا غير ممكن.

بقي اثبات أن $k \in A$ حتى يكون k عنصر أصغر أي يحقق التعريف (لا ننسى أن k يحقق تعريف المجموعة S أي):

$$\forall a \in A\ ; k \leq a$$

لنبرهن على ان $k \in A$ لنفرض جدلاً ان $k \notin A$ عندئذٍ

$$\forall a \in A\ ; k < a$$

ليكن $a_0 \in A$ فإن $k < a_0$ ومنه (ننقل k للطرف الأخر فيصبح لدينا مقدار أكبر تماماً ممن الصغر ونسمي المقدار m)

$$m = a_0 - k \ ; m > 0 \ , \qquad m \in N$$

$$\Rightarrow a_0 = m + k$$

نضيف ونطرح 1

$$= (m-1) + (K+1) \ : (m-1) \geq 0$$

$$\Longrightarrow (K+1) \leq a_0$$

$$\forall a \in A \Rightarrow K + 1 \leq a \qquad \text{ومنه}$$

وحسب تعريف العلاقة S فإن $k + 1 \in S$ وهذا غير ممكن . ومنه $K \in A$ وتحقق العلاقة

$$\forall a \in A; K \leq a$$

أي ان K هو عنصر اصغر في A.

نتيجة: ينتج من المبرهنة الأخيرة ان كل مجموعة جزئية وغير خالية من N تحوي عنصر اصغري

أي ان مجموعة الاعداد الطبيعية N تحقق الشرط الأصغري وبالتالي مبدأ الأستقراء صحيح لأجلها.

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هج

Syria Math Team

10-10-2017

نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الرابعة ◄ عنوان المحاضرة: المجموعات

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعاريف.

٢ـ قدرة المجموعات والمجموعات المتساوية القدرة.

٣ـ مبرهنات وامثلة D ;

تعريف العنصرين المتقاربين : لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبطة جزئيا وليكن $a, b \in P$ نقول إن a, b متقاربين اذا كان $a \leq b$ أو $b \leq a$

مثال: كل من مجموعة الاعداد الطبيعية والصحيحة تحقق هذا الشرط :.... $3 < 2 < 1$

تعريف المجموعة المرتبة كلياً :نقول عن المجموعة المرتبة جزئياً انها مرتبة كلياً اذا كان كل عنصرين فيها متقاربين.

مثال: كل من مجموعة الاعداد الطبيعية والصحيحة مرتبة كلياً

تعاريف: لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئية و Aمجموعة جزئية غير خالية في P :

- نقول عن العنصر $a \in P$ أنه حد أعلى للمجموعة A إذا حققت الشرط :
$$\forall x \in A \; ; \; x \leq a$$
- نقول عن العنصر $b \in P$ أنه حد ادنى للمجموعة A إذا حققت الشرط :
$$\forall y \in A \; ; \; b \leq y$$

ملاحظة: الحد الأدنى (الأعلى) للمجموعة ليس بالضرورة ان ينتمي لهذه المجموعة . الحد الأدنى (الأعلى) ليس وحيد.

مثال: لتكن $P = N$ و $A = \{5,6,7,8,9,10\}$

ان 10,11,12 حدود عليا حيث $10 \in A$ و $11,12 \notin A$

ان 3,4,5 حدود دنيا حيث $5 \in A$ و $4,3 \notin A$

اما العنصر الأصغر (الأكبر) يجب ان ينتمي للمجموعة.

Syria Math Team

تمهيدية: ((وظيفة)) لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة كلياً و $a \in P$ عندئذٍ:

aعنصر اصغر $\Leftrightarrow$ a عنصر أصغري في P .

البرهان :

$\Leftarrow$ لنفرض a عنصر أصغر ولنبرهن أن a عنصر أصغري .
نعلم أن كل عنصر أصغر هو عنصر أصغري فيتم المطلوب .

$\Rightarrow$ لنفرض a عنصر أصغري ولنبرهن أن a عنصر أصغر .
بما أن المجموعة مرتبة كلياً فإن كل عنصرين منها متقاربين وبما أن a عنصر أصغري فإنه يحقق التعريف
$\forall x \in P : x \leq a \Rightarrow x = a$ وحسب تعريف العناصر المتقاربة يكون $a \leq x$
ومنه a عنصر أصغر ويتم المطلوب :

هناك مسلمات أساسية في الجبر والزمر .
سنأخذ منها اثنان .

تمهيدية زورن : لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد ادنى (اعلى) عندئذ يوجد في P عنصر أصغري (أعظمي)واحداً على الأقل .

موضوعة الاختيار : لتكن B مجموعة ما وغير خالية ولنفرض $P(B)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية في B
ولنفرض ان $S = P(B)\backslash\emptyset$ عندئذ يوجد تطبيق $f : S \to B$:
يحقق إنه: $\forall A \in S \; ; f(A) \in B$

نص زورن وموضوعية الاختيار بدون برهان ولكن يمكن أن يأتي اكتب نص تمهيدية زورن وموضوعية الاختيار.

قدرة مجموعة: نسمي كمية العناصر في أي مجموعة غير خالية (A) بقدرة المجموعة A ونرمز لها $card\ (A)$

- اذا كانت المجموعة A منتهية فإن $card\ (A) \in N^*$
- اذا كانت المجموعة A غير منتهية فإن $card\ (A) = \infty$

تعريف: نقول عن المجموعتين A,B ان لهما نفس القدرة **او** $card(A) = card(B)$ اذا وجد تطبيق متباين وغامر بينهما ونرمز لذلك $A \sim B$

$$\Rightarrow A \sim B \Leftrightarrow card(A) = card(B)$$
$$\Leftrightarrow \exists f : A \overset{\text{متباين}}{\underset{\text{غامر}}{\to}} B$$

تمهيدية:_((وظيفة)) لتكن Σ اسرة من المجموعات ان العلاقة $(\sim)$المعرفة على Σ هي علاقة تكافؤ علىΣ .

البرهان :

لنعرف العلاقة

$$A\sim B \Leftrightarrow card\ A = card\ B \Leftrightarrow \exists\ f: A \overset{\text{غامر}}{\underset{\text{متباين}}{\rightarrow}} B$$

- من اجل اي مجموعة $A \in \Sigma$ يوجد تطبيق مطابق : $f = I_A: A \longrightarrow A$

$$a \mapsto f(a) = a$$

وهو متباين وغامر فرضاً واستنادا لتعريف العلاقة $(\sim)$ فإن $(A\sim A)$ ومنه فإن $(\sim)$ انعكاسية .

- من اجل اي مجموعة $A,B \in \Sigma$ وبحيث $A\sim B$ فإنه يوجد تطبيق $f: A \overset{\text{غامر}}{\underset{\text{متباين}}{\rightarrow}} B$

وبما ان التطبيق f تقابل فيوجد تطبيق عكسي وليكن $f^{-1}: B \overset{\text{غامر}}{\underset{\text{متباين}}{\rightarrow}} A$

وهذا يعني ان $B\sim A$ وبالتالي فالعلاقة $(\sim)$ تناظرية .

- من اجل اي مجموعة $A,B,C \in \Sigma$ وبحيث $A\sim B$ ~C فإنه يوجد تطبيق

$$f: A \overset{\text{متباين}}{\underset{\text{غامر}}{\rightarrow}} B$$

$$g: B \overset{\text{متباين}}{\underset{\text{غامر}}{\rightarrow}} C$$

ومنه فإن التطبيق $h = f\ °o\ g : A \overset{\text{متباين}}{\underset{\text{غامر}}{\rightarrow}} C$ وبما ان h تقابل فيؤدي الى ان $A\sim C$ وبالتالي العلاقة $(\sim)$ متعدية .

مما سبق نستنتج ان العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على Σ.

تعريف: لتكن A,B مجموعتان غير خاليتان نقول أن قدرة المجموعتين :

$$card\ A \leq card\ B \Leftrightarrow \exists\ f: A \overset{\text{متباين}}{\rightarrowtail} B$$

مبرهنة : ((كانتور – برنشتاين)) : لتكن $A\ ,B$ مجموعتان غير خاليتان إذا وجد تطبيق متباين $f: A \longrightarrow B$ وتطبيق متباين اخر $g: B \longrightarrow A$ عندئذ $A \sim B$ أي :

$$card\ A = card\ B$$

تمهيدية : (**وظيفة**) اثبت ان العلاقة " $\leq$ " المعرفة على أي مجموعة من القدرات هي علاقة ترتيب .

Syria Math Team

البرهان :

- لأجل أي مجموعة يوجد ما يسمى التطبيق المطابق وهو يمثل تطبيق متباين

$$I_A : A \longrightarrow A$$

ومنه العلاقة " $\leq$ " علاقة انعكاسية .

- العلاقة " $\leq$ " متعدية لان :

$$card\ A \leq card\ B \iff \exists\, f : A \overset{\text{متباين}}{\rightarrowtail} B$$

$$card\ B \leq card\ D \iff \exists\, g : B \overset{\text{متباين}}{\rightarrowtail} D$$

$$f : A \overset{\text{متباين}}{\Longrightarrow} B \overset{\text{متباين}}{\Longrightarrow} D$$

ومنه $f : A \to D$ متباين $\Longleftarrow$ أن العلاقة متعدية .

لإثبات أن العلاقة " $\leq$ "تخالفيه نكتفي بنص مبرهنة **((كانتور – برنشتاين))** وبما انه يوجد تطبيق f متباين وتطبيق g متباين وحسب المبرهنة فإن $card\ A = card\ B$ وبالتالي فالعلاقة تخالفية .

وبالتالي فإن $\leq$ هي علاقة ترتيب .

تعريف: نرمز لقدرة مجموعة الاعداد الطبيعية N بالشكل:

$$card\ N = \aleph_0$$ (وتقرأ الف صفر)

ونرمز لقدرة مجموعة الاعداد الحقيقية R بالشكل:

$$card\ R = \aleph$$ (وتقرأ الف)

مبرهنة: لتكن A مجموعة ما. $P(A)$ أسرة كل المجموعات الجزئية في A عندئذ :

$$card\ A < card\ P(A) \quad .... \quad (*)$$

البرهان :

نميز حالتين :

1) $A = \emptyset$ في هذه الحالة $card\ A = 0 \Rightarrow card\ P(A) = 1$

$$0 < 1$$

Syria Math Team

2) عندئذ $A \neq \emptyset$ $f : A \to P(A)$

المعرفة بالشكل: $\forall\, a \in A\,; f(a) = \{a\}$

وهذه العلاقة تعرف تطبيق متباين وحسب التعريف فإن قدرة المنطلق اصغر او تساوي قدرة المستقر

$$card\ A \leq card\ P(A)$$

((يجب ان تنفي المساواة لتتحقق المبرهنة))

لنفرض جدلاً ان $card\ A = card\ p(A)$ وحسب التعريف يوجد تطبيق غامر $g : A \to P(A)$

لنأخذ المجموعة $H = \{a: a \in A\ ,\ a \notin g(a)\}$

- H مجموعة جزئية في A ومنه $H \subseteq P(A)$.

إن $H \neq \emptyset$ لانه لو كان $H = \emptyset$ عند ئذ ولكون g غامر فإنه يوجد $b \in A: g(b) = H = \emptyset$

اذاً لاتوجد عناصر لاتنتمي للصورة المباشرة لها ومنه فأن:

$$\Rightarrow b \in g(b) = \emptyset$$

وهذا تناقض لان g غامر أي أن $H \neq \emptyset$ ،ومنه $\exists d \in A: g(d) = H$

عندها نميز حالتين:

١) $d \in H \Leftarrow d \notin g(d) = H$.
٢) $d \notin H \Leftarrow d \in g(d) = H$.

وهذا غير ممكن ، ومما سبق نجد ان هذا التطبيق غير موجود أي:

$$card\ A \neq card\ P(A)$$

ومنه $card\ A < card\ P(A)$.

وهو المطلوب.

تمرين : أثبت أن : $card\ N^* = card\ Z$ أي ان المجموعة Z قابلة للعد .

الحل :

لنعرف العلاقة $f : Z \to N^*$ بالشكل التالي :

$$\forall\, n \in Z\ ;\ f(n) = \begin{cases} 2n+1 & n \geq 0 \\ 2|n| & n < 0 \end{cases}$$

Syria Math Team

إن f تطبيق لأنه إذا كان $x,y\in Z$ بحيث $x=y$ عندئذ :

في حالة $x,y\geq 0$; $2x+1=2y+1$

$$\Rightarrow f(x)=f(y)$$

في حالة $x,y<0$; $2|x|=2|y|$

$$-x=-y$$

$$\Rightarrow f(x)=f(y)$$

ففي كلا الحالتين f تطبيق .

لنبرهن على ان ن f متباين ليكن $x,y\in z$ بحيث $f(x)=f(y)$ نميز ثلاث حالات :

- $x,y\geq 0 \Leftarrow 2x+1=2y+1 \Leftarrow x=y \Leftarrow f$ متباين
- $x,y<0 \Leftarrow 2|x|=2|y| \Leftarrow -x=-y \Leftarrow x=y \Leftarrow f$ متباين
- $x\geq 0\ ,y<0 \Leftarrow 2x+1=2|y| \Leftarrow 2x+1=-2y$

$\Leftarrow 2x+2y=-1 \Leftarrow x+y\in z=-\frac{1}{2}\notin z$ لن تتحقق ومنه فإن f متباين

لنبرهن على ان ن f غامر :

ليكن $z\in N^*$ عندئذ تميز حالتين :

* z زوجي عندئذ : $-z\in Z$ و $-\frac{z}{2}\in Z$

$$f\left(\frac{-z}{2}\right)=2\left|\frac{-z}{2}\right|=z$$

* z فردي ومنه $z-1$ عدد زوجي كما ان $0\leq z-1$ عندئذٍ $0\leq \frac{z-1}{2}\in Z$

ومنه

$$f\left(\frac{z-1}{2}\right)=2\left(\frac{z-1}{2}\right)+1=z$$

ومما سبق نجد أن التطبيق f غامر .

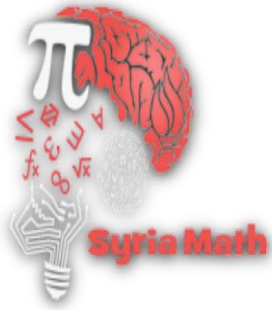
وبالتالي فهو تقابل أي ان .

$$\Rightarrow card\ N^*=card\ Z$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team



نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الخامسة ◄ عنوان المحاضرة : المجموعات

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-المجموعات القابلة للعد ومبرهنات عنها.

٢- خوارزمية القسمة ومبرهنات عنها.

٣- القاسم المشترك الأعظم ومبرهنتان عنه.

تعريف المجموعات القابلة للعد: وجدنا سابقاً ان علاقة التساوي بين القدرات تعرّف لنا علاقة تكافؤ،

ولنرمز لصف التكافؤ الناتج عن مجموعة الاعداد الطبيعية بالشكل $[\mathbb{N}]$ نقول عن المجموعة A انها قابلة للعد إذا كانت $A \in [\mathbb{N}]$

أي ان $A \in [\mathbb{N}] \Leftrightarrow \text{card } A = card\ \mathbb{N}$

- ينتج من التعريف ان كل مجموعة قابلة للعد هي مجموعة غير منتهية.

مبرهنة: كل مجموعة غير منتهية في $\mathbb{N}$ قابلة للعد.

البرهان:

لنفرض ان D مجموعة غير منتهية في $\mathbb{N}$ولنفرض أن a_1 هو العنصر الأصغر في D . عندئذٍ:

$D \setminus \{a_1\}$ مجموعة جزئية في $\mathbb{N}$ وغير خالية ولنفرض أن a_2 هو العنصر الأصغر فيها .

ولنفرض انه تم تعيين العنصر a_n الذي هو عنصر اصغر في المجموعة

$$D \setminus \{a_1, a_2 \dots\dots\dots a_{n-1}\}$$

ولنفرض ان a_{n+1} عنصر أصغر في

$$D \setminus \{a_1, a_2 \dots\dots\dots a_n\}$$

Syria Math Team

لنعرف العلاقة

$$f : N^* \to D \quad \text{بالشكل:}$$
$$\forall\, m \in N^* \quad ; f(m) = a_m :$$

حيث a_m هو العنصر الأصغر في المجموعة:

$$D \setminus \{ a_1, a_2 \dots \dots \dots . a_{m-1} \}$$

وبما ان العنصر الأصغر وحيد ((هنا نربط كل a_m مع $f(m)$))

$\Leftarrow$ f تطبيق $\Leftarrow$ f متباين .

لأنه اذا كان $n , m \in \mathbb{N}^*$ حيث $a_n = a_m \Leftarrow f(n) = f(m)$

لنفرض جدلاً أن $n \neq m$ وان $n > m$ عندئذ تكون

$$\{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{m-1} \} \subset \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{n-1} \}$$

ومنه تكون $D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{n-1} \} \subset D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{m-1} \}$

حيث $a_m \in D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{m-1} \}$

$$a_n \in D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{n-1} \}$$

وأن $a_m > a_n$ وهذا يتناقض كون a_m عنصر أصغر في المجموعة
$D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{m-1} \}$ مما سبق نجد ان $n = m$ اي أن f متباين .

من جهة اخرى لدينا $D \subset N^*$ عندئذ العلاقة ((تاو)) $\tau : D \to N^*$

$$\forall x \in D ; \tau(x) = x$$

فالعلاقة هي تطبيق متباين

وحسب مبرهنة **((كانتور – برنشتاين))** يوجد تقابل بين المجموعتين N^* و D ومنه:

$$card\ D = card\ N^*$$

ومنه D قابلة للعد.

وهو المطلوب

Syria Math Team

ملاحظة : كل مجموعة جزئية وغير منتهية من مجموعة قابلة للعد تكون أيضاً قابلة للعد

امثلة:

- ان مجموعة الاعداد الأولية هي مجموعة قابلة للعد .
- ان مجموعة الاعداد التي تقبل القسمة على 2 هي مجموعة قابلة للعد.
- كل منهما مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ وغير منتهية.

مبرهنة: ***(وظيفة)***

كل مجموعة جزئية وغير منتهية من مجموعة قابلة للعد تكون ايضاً قابلة للعد.

البرهان

لتكن D مجموعة قابلة للعد ولتكن S مجموعة جزئية منها وغير منتهية بما أن D قابل للعد وحسب مبرهنة سابقة يوجد تقابل بينها وبين N^* وليكن $f : D \to N^*$
ولنعرف التطبيق $g: S \to D$ بالشكل $\forall a \in S \quad : \quad g(a) = a$
وهو تطبيق متباين وايضاً هذا يبين أن $fog: S \to N^*$ ايضاً متباين وبما أن المجموعة $fog(S)$ غير منتهية ومحتواة في N^* نستنتج أن المجموعة $fog(S)$ قابلة للعد ومنه S قابلة للعد .

تعريف خوارزمية القسمة

ليكن $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث $b \neq 0$ نقول ان b يقسم a في $\mathbb{Z}$ اذا وجد $d \in \mathbb{Z}$ بحيث $a = b.d$

ملاحظة: لنفرض ان $a = b.d$ و $a = b.d_1$

$$\Rightarrow b.d = b.d_1 \Rightarrow d = d_1$$

ومنه نجد ان d عنصر وحيد.

مبرهنة: ليكن $a, b \in Z$ بحيث $b > 0$ عندئذ يوجد $q, r \in Z$ يحققان $a = q.b + r$ حيث $0 \leq r < b$

فضلاً عن ذلك. كلاً من q, r يتعينان بشكل وحيد .

حيث: q ناتج القسمة و r باقي القسمة.

البرهان :

لنعرّف المجموعة : $S = \{a - k.b : k \in Z \ ; \ a - k.b \geq 0\}$

١) اذا كان $0 \in S$ وهنا واضح أن $S \neq \emptyset$

وبالتالي يوجد $k \in Z$ بحيث $0 = a - k.b$ أي أن $a = k.b$

بطريقة علمية: $\Rightarrow \exists d \in Z \ : a - b.d = 0 \Rightarrow a = d.b$

٢) اذا كان $0 \notin S$ ((لنتأكد اذا كانت S غير خالية)).

إذا لنبرهن أن $S \neq \emptyset$ سنميز ثلاث حالات :

١) عندما $a > 0$ عندئذٍ لأجل $k = 0$ نجد ان : $a - b.k = a \in S$

٢) عندما $a < 0$ عندئذٍ لأجل $k = -2a$ نجد أن :

نأخذ k اختياري

$$a - k.b = a - (2a.b) \in S$$

٣) عندما $a = 0$ عندئذٍ لأجل $k = -1$ نجد ان :

$$a - k.b = b \in S$$

في جميع الحالات S ليست خالية.

أي إن $S \subset N$ عندئذٍ يوجد في S عنصر أصغر وليكن r حيث أن $r \in S$ ومنه :

$$\exists q \in Z : \quad a - q.b = r$$

أي أن : $r > 0 \Leftarrow a = q.b + r$

((الأن لنبرهن على أن $r < b$)):

الحالة الاولى : لنفرض جدلاً أن $r > b$ عندئذ: $r - b > 0$ و لنأخذ :

$$a - (1 + q)b = \underbrace{a - qb}_{r} - b = \overset{\text{موجب}}{\overset{\frown}{r}} - \overset{\text{موجب}}{\overset{\frown}{b}} > 0$$

وايضاً $a - (1 + q)b \in S$

$$a - (1 + q)b = r - b < r$$

وهذا يناقض كون r عنصر أصغر في S .

الحالة الثانية : لنفرض أن $r = b$ عندئذ:

$$a-(1+q).b = \underbrace{a-qb}_{r} - b = r - b = 0$$

$$a-(1+q)b \in S$$

لكن $0 \notin S$ وهذا تناقض.

مما سبق نجد ان $r < b$ ومنه فإن $0 \le r < b$

لنبرهن ان r, q وحيد:

ليكن $q_1, r_1 \in Z$ حيث $a = q_1.b + r_1$: $0 \le r_1 < b$

عندئذٍ: $q.b + r = q_1.b + r_1$

$$q.b - q_1.b = r_1 - r$$

$$b(q - q_1) = r_1 - r$$

لنفرض جدلاً ان $r_1 - r \neq 0$ وان $r_1 > r \Leftarrow r_1 - r \ge b$

ولدينا ايضاً ان $r_1 - r < b$

وهذا غير ممكن . ومنه $r = r_1$ وبالتالي $(q_1 - q) = 0 \Leftarrow q_1 = q$

وهو المطلوب.

مبرهنة: ليكن $a, b \in Z$ بحيث $b \neq 0$ عندئذٍ يوجد $q, r \in Z$

بحيث $a = q.b + r$ و $0 \le r < |b|$. فضلاً عن ذلك ان كلاّ q, r يتعينان بشكل وحيد .

البرهان :

نميز حالتين : $b > 0$ البرهان ينتج من المبرهنة السابقة .

لنفرض $b < 0$ عندئذ $|b| > 0$ و حسب المبرهنة السابقة $\exists q_0, r \in Z$ بحيث :

$a = q_0.|b| + r$ وأن $0 \le r < |b|$ وذلك بفرض $q = -q_0$

ومنه : $a = q.b + r$: $0 < r < |b|$ ومنه q, r وحيدين

<u>ويتم المطلوب</u>

تعريف القاسم المشترك الأعظم: ليكن $a,b \in Z$ اعداد صحيحة مغايرة للصفر نسمي أكبر عدد صحيح موجب يقسم كل من a,b بالقاسم المشترك الأعظم للعددين a,b ونرمز له $\gcd(a,b)$.

_ اذا كان $\gcd(a,b) = 1$ نقول في هذه الحالة أن العددين a,b أوليان فيما بينهما .

مبرهنة : ليكن $a,b \neq 0 \ni z$ اعداد صحيحة مغايرة للصفر عندئذ يوجد $s,t \in Z$ تحقق أن :

$$\gcd(a,b) = sa + bt$$

فضلاً عن ذلك ان $sa+tb$ هو أصغر عدد صحيح موجب لأجله يتحقق

$$\gcd(a,b) = sa + bt$$

الإثبات :

لنعرف المجموعة $S = \{m.a + n.b > 0 : m,n \in Z\}$

أن $S \subset N$ و $S \neq 0$ وبالتالي يوجد في S عنصر اصغر

وليكن d وطالما $d \in S$ فله نفس شكل عناصر S ومنه $d = s.a + t.b : s,t \in Z$

وحسب خوارزمية القسمة $a = q.d + r : r,q \in Z \ ; 0 \leq r < d$

حتى اثبت العدد d هو القاسم المشترك يجب ان يكون $r = 0$

لنفرض جدلا أن $r \neq 0$ عندئذ((نعوض d في a))

$$a = q(sa + bt) + r \quad = q.sa + q.tb + r$$

$$Z \ni \begin{cases} 1 - qs \\ -qt \end{cases} \text{ حيث } \Rightarrow 0 < r = (1 - qs)a + (-qt)b$$

وهذا يبين ان $r \in S$ ولما كان $r < d$ نحصل على تناقض بسبب ان d هو العنصر الأصغر في S ومنه $r = 0 \Leftarrow a = qd$ أي ان d يقسم a

وبطريقة مناسبة نجد ان d يقسم b

ليكن d_0 قاسم مشترك آخر للعددين a,b عندئذٍ:

$$a = d_0 \ \lambda \quad \text{و} \quad b = d_0 \ \mu \quad : \lambda,\mu \in Z$$

وإن

$$d = sa + tb = sd_0 \ \lambda + td_0 \ \mu$$

$$= d_0(s\lambda + t\mu)$$

$$\Rightarrow d \geq d_0$$

Syria Math Team

$$\Rightarrow \gcd(a,b) = d = sa + tb$$

تعريف : ليكن a عدد صحيح حيث $a > 1$ نقول ان a أولي في Z اذا كانت مجموعة قواسمه $\{ \pm 1 , \pm a \}$.

تمهيدية اقليدس : لتكن p عدد أولي و $a,b \in Z$ اعداد صحيحة إذا كان p يقسم الجداء $a.b$ عندئذ p إما يقسم a أو b .

الإثبات :

لنفرض أن p يقسم الجداء $a.b$ عندئذ يوجد عدد صحيح $t \in Z$ بحيث $a.b = t.p$ ولنفرض أن p لا يقسم a ولنبرهن أن p يقسم b .

توضيح : إذا أخذنا أي عدد مع عدد أولي فإن القواسم هي $(1,p)$ ولو فرضنا أنه لا يقسم عندئذ لا يبقى قواسم أخرى غير الواحد .

عندئذٍ $\gcd(a,p) = 1$ أوليان فيما بينهما

$$\Rightarrow \exists\, k,S \in Z : 1 = s.a + k.p$$

$$\Rightarrow b = b.s.a + b.k.p$$

$$a.b = p.t \text{ لان } \Rightarrow b = s.p.t + k.b.p$$

$$\Rightarrow b = (s.t + k.b)p \in Z$$

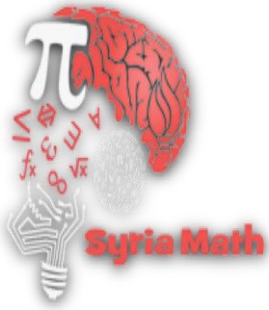
وهو المطلوب..

تم الانتهاء من اول فصل وهو المجموعات .. (:

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخرس – هلا هيج

Syria Math Team



◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : السادسة ◄ عنوان المحاضرة : نظرية الزمر

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- بدأنا بفصل جديد وهو نظرية الزمر.

٢- تعريف الزمرة ومبرهنات عنها.

تعريف الزمرة: لتكن G مجموعة غير خالية نسمي كل تطبيق من الشكل G :

ملاحظة : (* سنعبر عنها بدل من اشارة الضرب $\times$ كما يلي)

$$* : G \times G \to G$$
$$(a,b) \mapsto a * b$$

عملية ثنائية (قانون تشكيل داخلي) (عملية داخلية) على المجموعة G

تعريف: لتكن E, G مجموعتان غير خاليتان نسمي كل تطبيق :

$$*: E \times G \to G$$

قانون تشكيل خارجي على G من اليسار.

ملاحظة: دائماً نميز إن كان هذا القانون من اليسار او من اليمين عندما تكون E على اليمين يكون قانون تشكيل خارجي من اليمين.

تعريف: لتكن G مجموعة غير خالية وليكن التطبيق :

$$. : G \times G \to G$$ (.) عبارة عن إشارة ضرب

عملية ثنائية على G نقول ان الثنائية $(G, .)$ تشكل زمرة اذا حققت الشروط التالية:

(١ $\forall a, b \in G \; ; \; a.b \in G$

٢) العملية (.) تجميعية $\forall a, b, c \in G \; ; \; (a.b).c = a.(b.c)$

Syria Math Team

٣) يوجد في G عنصر $e \in G$ بحيث :

$\forall a \in G ; a.e = e.a = a$ نسمي e عنصر محايد

٤) $\forall a \in G ; \exists a^{-1} \in G : a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$

نسمي العنصر a^{-1} مقلوب العنصر a

تعريف : نقول عن الزمرة $(G,.)$ إنها تبديلية إذا حققت الشرط :

$$\forall a,b \in G ; \ a.b = b.a$$

ملاحظة: اذا كانت العملية معرفة على زمرة ضرب $(.)$ نسميها زمرة ضربية.

واذا كانت العملية معرفة على زمرة جمع$(+)$ نسميها زمرة جمعية.

	الزمرة الجمعية $+$	الزمرة الضربية $.$
شكل العناصر	$a+b$	$a.b$
العنصر المحايد	0	$1, e$
المقلوب أو النظير	نظير a هو $-a$	مقلوب a هو a^{-1}
التشكيل	$a+(-b)$	$a.b^{-1}$
المضاعف أو القوة	مضاعف a هو : $n.a$ $n \epsilon Z$	قوة a هي $a^n : n \epsilon Z$

ملاحظة : لتكن G زمرة و $a \in G$ و $n \in Z$

$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a.a.a.a....a}^{\text{مرة } n} & n > 0 \\ e = 1 & n = 0 \\ \underbrace{a^{-1}.a^{-1} ..... a^{-1}}_{\text{مرة } -n} & n < 0 \end{cases}$$

مثال(١): مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالنسبة لعملية الجمع هي الأعداد $(\mathbb{Z},+)$ تشكل زمرة جمعية تبديلية والعنصر المحايد فيها الصفر. **(تحقق من الشروط الأربعة الواردة بالتعريف).**

ولكن $(\mathbb{Z},.)$ ليست زمرة بالنسبة لعملية ضرب الاعداد لأنها لا تحقق هذا الشرط :

$\exists 2 \in \mathbb{Z} : \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ لا يوجد مقلوب للعدد 2 وبذلك لا تحقق الشرط الأخير فهي ليست زمرة بالنسبة للضرب

مثال(٢): لنفرض ان $M_2(Z)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}: a,b,c,d\in Z\right\}$

مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية .

ان $M_2(Z)$ تشكل زمرة جمعية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات ، والعنصر المحايد فيها هو المصفوفة الصفرية وهي ايضاً تبديلية (جمع المصفوفات تبديلي)

ونظير العنصر $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ni M_2(Z)$ هو $-\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\subseteq\begin{pmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{pmatrix}$

مثال(٣): لتكن : $M_2(R)=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} a,b,c,d\in R \atop a.d-c.b\neq 0\right\}$

مجموعة المصفوفات المربعة والحقيقية من المرتبة الثانية تشكل زمرة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات والعنصر المحايد لها هو المصفوفة الواحدية.(ملاحظة ليست تبديلية لان ضرب المصفوفات ليس تبديلي).

تمهيدية : لتكن $(G,.)$ زمرة عندئذ :

١) العنصر المحايد في G وحيد .
٢) مقلوب أي عنصر في G وحيد .
٣) قانون الاختصار محقق أي إذا كان $a.b=c.b$: $\forall a,b,c\in G$
فإن $a=c$
٤) $\forall a,b\in G\,;(a^{-1})^{-1}=a$
٥) $\forall\, a_1,a_2,a_3,\dots\dots a_n\in G;$
$(a_1,a_2,a_3,\dots\dots a_n)^{-1}={a_n}^{-1},{a_{n-1}}^{-1},{a_{n-2}}^{-1}\dots\dots{a_1}^{-1}$

الإثبات :

١) ليكن $e_1,e_2\in G$ كل منهما عنصر محايد لنأخذ الجداء لهذين العنصريين
$e_2=e_2.e_1=e_1\Rightarrow e_1=e_2$
٢) ليكن $a\in G$ ولنفرض أن $b_1\,,b_2\in G$ كل منهما مقلوب للعنصر a
طالما b_1 هو المقلوب ل a فإن : $b_1.a=a.b_1=e$

طالما b_2 هو مقلوب العنصر a فإن : $b_2.a=a.b_2=e$

$$b_1=e.b_1=(b_2.a)b_1=b_2(a.b_1)=b_2.e=b_2\Longleftarrow$$

٣) لتكن $a,b,c\in G$ بحيث : $a.b=c.b$ فإن:
$$b^{-1}.(a.b)=b^{-1}.(c.b)\Longrightarrow a(b.b^{-1})=c(b.b^{-1})\Rightarrow \mathrm{a}=\mathrm{c}$$

٤) ليكن $a\in G$ عندئذ: $a^{-1}\in G$ وان $(a^{-1})^{-1}\in G$ ويحقق:

Syria Math Team

$$\underbrace{a^{-1}}_{\text{عنصر}}.\underbrace{(a^{-1})^{-1}}_{\text{مقلوبه}}=e$$

نضرب الطرفين ب a

$$(a^{-1})^{-1}=a$$

٥) يتم اثباته من خلال الاستقراء :

نثبته من أجل $n=2$

ليكن $a,b\in G$ عندئذٍ $a.b\in G$ وإن $(a.b)^{-1}\in G$

ويحقق $(a.b).(a.b)^{-1}=e$

$$\Rightarrow a(b.(a.b)^{-1})=e$$

نضرب بـ a^{-1} من اليسار

$$b.(a.b)^{-1}=a^{-1}$$

نضرب بـ b^{-1} من اليسار

$$(a.b)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$$

تعريف الزمرة الجزئية : لتكن $(G,.)$ زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية في G نقول ان $(H,.)$ زمرة جزئية في G إذا كانت $(H,.)$ زمرة بالنسبة لنفس العملية المعرفة على G او بمعنى آخر إن H زمرة بحد ذاتها .

مبرهنة : لتكن (G) زمرة و H مجموعة جزئية وغير خالية في G عندئذٍ الشروط الاتية متكافئة :

١) H زمرة جزئية في G .
٢) H تحقق الشروط الاتية :
- **(a)** $\forall\, a,b\in H\,;a.b\in H$
- **(b)** $\forall\, c\in H\,;\ c^{-1}\in H$

٣) $\forall\, a,b\in H\,;a.b^{-1}\in H$

الاثبات :

(1 ← 2) لنفرض أن H زمرة جزئية عندئذ الشروط $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ محققة .

(2 ← 3) ليكن $a,b\in H$ عندئذ $b\in H$ فحسب الفرض لكل عنصر في H هناك مقلوب عندئذٍ $b^{-1}\in H$ اصبح لدينا وحسب الفرض $a,b^{-1}\in H$ وحسب الشرط a نجد: $\forall\, a,b^{-1}\in H;a.b^{-1}\in H$.

Syria Math Team

(3 ← 1) لنبرهن ان H زمرة لدينا فرضاً $H \neq \emptyset$ فهي تحوي عنصر على الأقل:

- ليكن $a \in H$ وحسب الفرض $e = a.a^{-1} \in H$
- ليكن $b \in H$ واصبح لدينا $e, b \in H \Leftarrow b^{-1} = e.b^{-1} \in H$
- التجميعية محققة على عناصر H
- ليكن $a, b \in H$ عندئذٍ $a, b^{-1} \in H$ فأن حسب 3) نأخذ $(b^{-1})^{-1}$ داخلي على $H \ni a.b = a.(b^{-1})^{-1}$

ومنه نجد ان $(H, .)$ زمرة وبالتالي هي زمرة جزئية في G.

أمثلة: سنطبق الشرط الثالث في المبرهنة السابقة (لان الشروط متكافئة)

١. في أي زمرة من G إن كلاً من $\{e\}, G$ هي زمرة جزئية في G.
٢. ليكن G زمرة تبديلية فإن المجموعة $\boldsymbol{H = \{x; x \in G, x^2 = e\}}$ تشكل زمرة جزئية في G و أن $\boldsymbol{H \subseteq G}$

الحل:

طالما كل عنصر من H هو من G اذاً: $\emptyset \neq H \subseteq G$

إن $e \in H$ لان $e^2 = e.e = e$

لتكن $x, y \in H$ عندئذٍ : $x^2 = e$, $y^2 = e$ بضرب الطرفين ب $(y^{-1})^2$ يصبح لدينا $e = (y^{-1})^2$

$$(x.y^{-1})^2 = x.\underbrace{y^{-1}.x}_{\text{لان } G \text{ تبديلية}}.y^{-1} = x.x.y^{-1}.y^{-1}$$

$$\underbrace{x^2}_{=e}.\underbrace{(y^{-1})^2}_{=e} = e \Rightarrow x.y^{-1} \in H$$

ومنه H زمرة جزئية في $\boldsymbol{G}$

٣- لنأخذ زمرة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وليكن $m > 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة

$$m.\mathbb{Z} = \{m.k \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

ان المجموعة $m\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$ لان: $m\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ وأن $m\mathbb{Z} \neq \emptyset$ لان $\{0\} \subseteq m.\mathbb{Z}$

ليكن $x, y \in m\mathbb{Z}$ ولنبرهن ان $x - y \in m\mathbb{Z}$ (هنا الزمرة جمعية فتصبح طرح $x - y$ بدلاً من قوة $x.y^{-1}$)

بما ان $x, y \in m\mathbb{Z}$ فإن: $y = k_2 m$, $x = k_1 m$ حيث $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

فإن $x - y = k_1 m - k_2 m = (k_1 - k_2)m \in m.\mathbb{Z}$ ومنه فإن mZ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$.

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخرس – هلا هج

22-10-2017

نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : السابعة ◄ عنوان المحاضرة : نظرية الزمر

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مبرهنات وأمثلة.

٢ـ العمليات على المجموعات الجزئية.

مبرهنة: لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية منتهية في G فإن الشرط الازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط : $a.b \in H$; $\forall a,b \in H$

الاثبات :

١) لزوم الشرط : لنفرض أن H زمرة جزئية فإنها تحقق الشرط:
$\forall a,b \in H ; a.b \in H$

٢) كفاية الشرط : لنفرض أن H تحقق الشرط a,b $\forall a,b \in H ; a.b \in H$ ولنبرهن على انه
$\forall a \in H ; \quad a^{-1} \in H$

- ليكن $a \in H$ نميز حالتين :

١) $a = e$ عندئذ $a^{-1} = e^{-1} = e = a \in H$

٢) $a \neq e$ وحسب الشرط اذا كان $a = b \Leftarrow a, a^2, a^3, \dots\dots, a^n \in H$

وبما أن H منتهية يوجد $i,j \in N^*$ بحيث $i \neq j$ و أن $a^i = a^j$ وكون $i \neq j$ نفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > 0$

نضرب بمقلوب : a^j ولما كان $a^{i-j} = e$ فإن $a \neq e$ لأنه بحالة $i - j \neq 1$ تصبح $a = e$ وهذا يؤدي الى تناقض ..

ومنه فإن ال $i - j > 1$ وبالتالي: $i - j - 1 > 0$ أي $a.a^{i-j-1} = e$

وإن $a^{i-j-1} \in H$ ومنه نجد ان $a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$

مما سبق نجد أن H زمرة جزئية في G.

تمهيدية. لتكن G زمرة عندئذٍ:

١- لأجل أي عنصر $a \in G$ فإن المجموعة $< a >= \{a^n : n \epsilon Z\}$ تشكل زمرة جزئية في G .

- إن المجموعة $Z(G) = \{a: a \in G \ , xa = ax \ , \forall x \in G\}$ تشكل زمرة جزئية في G تسمى مركز الزمرة G

البرهان :

١) $\emptyset \neq < a > \subseteq G$ لأن $e = a^0 \epsilon < a >$.

لتكن $x, y \epsilon < a >$ عندئذ $y = a^n$ و $x = a^m$ بحيث $n, m \epsilon Z$ ومنه

$$y^{-1} = (a^n)^{-1} = a^{-n}$$

$$x.y^{-1} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \epsilon < a >$$

ومنه $< a >$ تشكل زمرة جزئية ل G .

٢) $\emptyset \neq Z(G) \subseteq G$ لأن $\forall x \in G; e \in Z(G); ex = xe$

ليكن $a, b \in Z(G)$ عندئذٍ: $\forall x \in G \ ; \ ax = xa \ , bx = xb$

نضرب بمقلوب b من اليمين : $b.x.b^{-1} = x.b.b^{-1} \Rightarrow b.x.b^{-1} = x$

نضرب بمقلوب b من اليسار : $b^{-1}.b.x.b^{-1} = b^{-1}.x \Rightarrow x.b^{-1} = b^{-1}.x$

وإن: $(a.b^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(x.b^{-1}) = (ax)b^{-1}$

$$= (xa)b^{-1} = x(a.b^{-1})$$

$$\Rightarrow a.b^{-1} \in Z(G)$$

فإن $Z(G)$ زمرة جزئية في G.

تمهيدية : لتكن G زمرة وان تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية في G تشكل زمرة جزئية ايضاً.

البرهان :

لتكن $[A_i]_{i \epsilon_I}$ أسرة من الزمر الجزئية في G عندئذٍ $\emptyset \neq A_i \subseteq G$

$$\forall i \in I \ ; \bigcap_{i \subset I} A_i \subseteq G$$

إن $e \in A_i \quad \forall i \in I, e \in \bigcap_{i=I} A_i$

ليكن $x, y \in \bigcap_{i=I} A_i$ عندئذٍ : $x, y \in A_i$ ذلك $\forall i \in I$

ولما كان A_i زمرة جزئية في G فإن :

$$x.y^{-1} \in A_i, \forall i \in I$$

عنصر ينتمي لاسرة اذاً ينتمي للتقاطع $x.y^{-1} \in \bigcap_{i \in I} A_i$

وبالتالي $\bigcap_{i \in I} A_i$ تشكل زمرة جزئية في G

ملاحظة: ان اجتماع مجموعتين جزئيتين ليس بالضرورة ان تكون زمرة جزئية.

مثال: في زمرة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ لنأخذ الزمرتين الجزئيتين $3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$

لنفرض جدلاً ان $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$ ومنه $2 + 3 = 5 \in 3\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}$

ولما كان 5 ليس مضاعف للعددين 2,3 فإن $5 \notin 3\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}$ اذاً هذا غير ممكن ومنه $3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ ليس زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$.

- **زمرة الجمع بالمقاس n** : ليكن $n \geq 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة $Z_n = \{0,1,2, \dots \dots (n-1)\}$

لنعرّف على المجموعة Z_n عملية ثنائية جمعية $\oplus$ بالشكل الآتي:

$$\forall a, b \in Z_n ; a \oplus b = r \in Z_n$$

حيث r (ناتج الجمع) هو باقي قسمة $a \oplus b$ على n.

اذا كان $n = 6$: $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

إن $3 \oplus 5 = 2$ لان $3 + 5 = 8$ و $8 \div 6 = 1$ والباقي 2(أي أن الجواب هو باقي القسمة فقط)

- ان $(Z_n, \oplus)$ زمرة جمعية تبديلية ، والعنصر المحايد فيها هو الصفر ونظير العنصر $a \in Z_n$ هو $-a = n - a$

مثال: من أجل $n = 6$

⇐ زمرة تبديلية جمعية محايدها الصفر .

$n = 6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Syria Math Team

ملاحظات:

١- لا يوجد سطر او عمود يحوي العنصر مرتين.

٢- الصفر هو المحايد بالنسبة للجمع ، وفي كل سطر ظهر المحايد إذاً لكل عنصر نظير.
مثال : نظير 4 هو 2 (ننظر للرقم 4 ونتابع لنرى الصفر في أي عمود وننظر للعنصر المثال له فيكون الحيادي).

٣- لو اخذنا القطر نلاحظ ان العناصر متناظرة على طرفيه لذلك فهو زمرة تبديلية .

- **زمرة الضرب بالمقاس n :** ليكن $n > 1$ عدد صحيح لنأخذ المجموعة

$$U(n) = \{a: a \in \mathbb{Z}\ ; 1 \leq a < n : \gcd(a,n) = 1\}$$

- من اجل $n = 4 \Leftarrow U(4) = \{1,3\}$
- من اجل $n = 5 \Leftarrow U(5) = \{1,2,3,4\}$

لنعّرف على المجموعة $U(n)$ عملية ضرب $\odot$ معّرفة بالشكل الاتي:

$$\forall a,b \in U(n); a \odot b = r$$

فنجد أن $(U(n),\odot)$ زمرة ضربية تبديلية . العنصر المحايد فيها هو الواحد.

مثال: $n = 5$

$\odot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

مبرهنة: ليكن $n > 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة $D = \{1,2,3, \dots \dots \dots, (n-1)\}$

إن الشرط الازم والكافي لتكون D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n هو أن يكون n أولياً .

الاثبات :

لزوم الشرط : لنفرض أن D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n ولنفرض جدلاً أن العدد n ليس أولياً

((أي يوجد قاسم موجب له غير الواحد و n)) عندئذ $\exists t \in Z$ حيث $1 < t < n$. يقسم n وبالتالي $\exists s \in Z$ بحيث $n = s.t$ يحقق $1 < s < n$

نلاحظ ان $t,s \in D$ ومنه $s \odot t = 0$ (حيث الصفر هو باقي القسمة) وهذا غير ممكن ومنه n عدد اولي.

كفاية الشرط : لنفرض أن n عدد أولي ولنبرهن على ان $D = U(n)$ نلاحظ ان كل عنصر من $U(n) \subseteq D$ هو عدد. ليكن $b \in D$ عندئذٍ لما كان العدد n اولي و $1 \leq b < n$ فإن $\gcd(b,n) = 1$ ومنه فإن $b \in U(n)$ وبالتالي $D \subseteq U(n)$ وهكذا فإن $D = U(n)$ أي ان D زمرة .

مبرهنة: ليكن $n > 1$ عدد صحيح و k قاسم موجب للعدد n عندئذٍ :

$$U_k(n) = \{a : a \epsilon U(n) : a \ mod - k = 1\}$$

تشكل زمرة جزئية في $U(n)$. (ملاحظة: $a \ mod - \ k$ تعني باقي قسمة a على k و $mod -$ يعني باقي قسمة)

الاثبات :

واضح أن $\emptyset \neq U_k(n) \subseteq U(n)$ لان: $1 \epsilon U_k(n)$

ليكن $1 \leq a, b < n$, $a, b \epsilon U_k(n)$ و بالتالي $a = q.k + 1$ و $b = q_1.k + 1$ حيث $q_1, q_2 \in Z$
لنبرهن إن $a.b \epsilon \ U_k(n)$ (يكفي تحقق هذا الشرط لانها زمرة منتهية).
ان $a.b \epsilon \ U_k(n)$ (طالما a, b عناصر من $U(n)$) فضلاً عن ذلك :

$$a.b = (q.k + 1)(q_1.k + 1) = (q.q_1.k^2 + qk + q_1k + 1) = (q.q_1.k + q + q_1)k + 1$$

ومنه فإن $a.b \ mod - K = 1$ إذاً $a.b \epsilon U_k(n)$ أي أن $U_k(n)$ زمرة جزئية في $U(n)$.

أمثلة: سنأخذ $\boldsymbol{U}(n)$ ومن ثم سنوجد $U_k(n)$ (k يعطى بنص السؤال) .

- ليكن لدينا $\boldsymbol{U}(10) = \{1,3,7,9\}$ أوجد $U_2(10)$ (نأخذ عناصر $\boldsymbol{U}(10)$ عنصراً تلو الأخر ونطبق عليهم الشرط $a \ mod - k = 1$ أي بمثالنا يجب ان يكون $a \ mod - 2 = 1$)

الأن من أجل 1 (هل باقي قسمة 1 على 2هو 1) صحيح ومنه ال 1 ينتمي ل $U_2(10)$

الأن من أجل 3 (هل باقي قسمة 3 على 2هو 1) صحيح ومنه ال 3 ينتمي ل $U_2(10)$

وهكذا حتى نكمل عناصر **الزمرة** ويمكن أن تكون الزمرة الجزئية تحوي كل عناصر الزمرة كمثالنا هذا (ملاحظة نكتفي امتحانيا بوضع العناصر ولا داعي للشرح) وبالتالي الحل يكون $U_2(10) = \{1,3,7,9\}$

أوجد ايضاً $U_5(10) = \{1\}$

- ليكن لدينا $U(21) = \{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$ أوجد $U_3(21), U_7(21)$

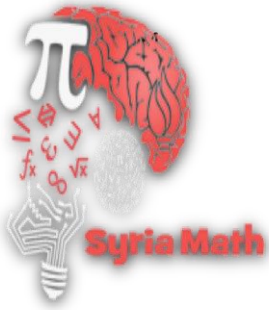
$U_3(21) = \{1,4,10,13,16,19\}$ $U_7(21) = \{1,8\}$

لا تنسى $U_k(n)$ تشكل زمر جزئية

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج

Syria Math Team



◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثامنة ◄ عنوان المحاضرة : المرافقات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعريف المرافقات والدليل.

٢ـ دراسة خواص المرافقات.

٣ـ مبرهنة لاغرانج.

المرافقات

تعريف المرافقات والدليل: لتكن G زمرة و A, B مجموعات جزئية وغير خالية في G نسمي المجموعة :

$$A.B = \{a.b : a \in A \ , b \in B\}$$

جداء المجموعتين B و A في G .

- اذا كانت $\boldsymbol{A = \{a\}}$ عندئذٍ :

$$\boldsymbol{A.B} = a.B = \{a.b : b \in B\}$$

- واذا كانت $B = \{b\}$ عندئذٍ:

$$\boldsymbol{A.B} = A.b = \{a.b : a \in A\}$$

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G لأجل كل عنصر $a \in G$ عندئذٍ :

- نسمي المجموعة $a.H = \{a.h \ : h \in H\}$ مرافقة يسارية للزمرة الجزئية H في G مولدة بالعنصر a .
- نسمي المجموعة $H.a = \{h.a \ : h \in H\}$ مرافقة يمينية للزمرة الجزئية H في G مولدة بالعنصر a .

وفي حال كون G زمرة تبديلية فإن $a.H = H.a$.

Syria Math Team

مثال: لنأخذ زمرة الاعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 9

لنأخذ الزمرة $Z_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ولنأخذ الزمرة الجزئية في Z_9 ولتكن $H = \{0,3,6\}$.

ولنوجد جميع المرافقات للزمرة الجزئية H والتي تحوي عنصر حيادي وهو $0 + H$.

$$0 + H = \{0,3,6\} = H$$
$$1 + H = \{1,4,7\}$$
$$2 + H = \{2,5,8\}$$
$$3 + H = \{3,6,0\} = H$$
$$4 + H = \{4,7,1\}$$
$$5 + H = \{5,8,2\}$$
$$6 + H = \{6,0,3\} = H$$
$$7 + H = \{7,1,4\}$$
$$8 + H = \{8,2,5\}$$

فتكون المرافقات هي : $0 + H = 3 + H = 6 + H = H$

$$1 + H = 4 + H = 7 + H$$

$$2 + H = 5 + H = 8 + H$$

نتج لدينا 9 مرافقات ، 3 منها مختلفات نأخذها بأصغر مولّد $H, 1 + H, 2 + H$

سندرس خواص المرافقات(المجموعات التبديلية)

تمهيدية : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G و $\forall\, a, b \in G$ عندئذ :

١) $\forall\, a \in G \;\; ; \;\; a \in aH$

٢) $\forall\, a \in G : \; aH = H \Leftrightarrow a \in H$

٣) $\forall\, a, b \in G \;\; ; \begin{cases} \text{إما} & aH \cap bH = \emptyset \\ \text{أو} & aH = bH \end{cases}$

٤) $\forall\, a, b \in G \quad \text{فإن } aH = bH \;\Leftrightarrow\; b^{-1}.a \in H$

Syria Math Team

الاثبات :

١) ليكن $a \in G$ عندئذ : $a = a.\overset{\in H}{\overbrace{e}} \in a.H$

٢) " $\Longleftarrow$ " لنفرض أن $aH = H$ عندئذ : $e \in aH = H$

وبالتالي يوجد $h \in H$ بحيث $e = ah$ ومنه نضرب بمقلوب $h \leftarrow a = h^{-1} \in H$

" $\Longrightarrow$ " الفرض أن $a \in H$ ان:

$$aH \subseteq H.H \subseteq H$$

احتواء معاكس $H = a.a^{-1}H \subseteq aH$

$$\Rightarrow aH = H$$

٣) لنفرض ان $a, b \in G$:

أ) إذا كان $aH \cap bH = \emptyset$ يتم المطلوب .

لنفرض ان $aH \cap bH \neq \emptyset$ عندئذٍ يوجد $c \in aH \cap bH$

$$c \in aH \; ; \; \exists h_1 \in H : c = ah_1$$

$$c \in bH \; ; \; \exists h_2 \in H : c = bh_2$$

ليكن $x \in aH$ عندئذٍ يوجد $h_0 \in H$ بحيث $x = ah_0$

ومنه $x = ah_0 = ch_1^{-1}.h_0$

$$= b(h_2.h_1^{-1}.h_0) \in bH$$

$$\Rightarrow aH \subseteq bH$$

وليكن $y \in bH$ عندئذٍ $y = b\mathrm{h}'$ حيث $h' \in H$

$$y = bh' = ch_2^{-1}.h'$$

$$= a(h_1.h_2^{-1}.h') \in aH$$

$$\Rightarrow bH \subseteq aH$$

$$\Rightarrow aH = bH$$

٤) ليكن $a, b \in G$ " $\Longleftarrow$ " الفرض ان $b^{-1}a \in H$ عندئذٍ يوجد $h \in H$ بحيث $b^{-1}a = h$

$$\Rightarrow a = bh$$

$$aH = b(h.H) = bH$$

" $\Longrightarrow$ " الفرض ان $aH = bH$ عندئذٍ $a \in aH = bH$ ومنه يوجد $h_0 \in H$ بحيث $a = bh_0$

$$\Rightarrow b^{-1}a = h_0 \in H$$

Syria Math Team

تمهيدية : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G و $\forall a,b \in G$ عندئذ :

١) $\forall a,b \in G$ فإن $card\ aH = card\ bH = card\ H$
٢) $\forall a \in G; a \in H \Leftrightarrow aH$ زمرة جزئية في G
٣) عندما وفقط عندما $aH = Hb \Leftrightarrow \forall a,b \in G;\ H = aHb^{-1}$
٤) لنفرض ان $M_r = \{Ha: a \in G\}$, $M_l = \{aH: a \in G\}$ عندئذٍ:
$card\ M_l = card\ M_r$ (مجموعة المرافقات اليمينية واليسارية)
٥) كلاً من M_l, M_r يشكل تجزئة للزمرة G.

البرهان:

١) ليكن $a,b \in G$ ، لنعرّف العلاقة:

$$f: aH \longrightarrow bH$$

$$\forall ah \in aH\ , f(ah) = bh \in bH$$

ان f تطبيق متباين لأنه:

$$\forall ah_1, ah_2 \in aH$$

$$\Leftrightarrow ah_1 = ah_2$$

$$\Leftrightarrow bh_1 = bh_2$$

$$\Leftrightarrow f(ah_1) = f(ah_2)$$

ونلاحظ ايضاً ان f تطبيق غامر لأنه اذا كان $bh_0 \in bH$ فإن $ah_0 \in aH,\ h_0 \in H$

$$f(ah_0) = bh_0$$

وبهذا الشكل نجد أن : $card\ aH = card\ bH$

- اثبات مساواة $card\ H$ مع $card\ aH$ لأجل $e,a \in G$ فإن
$card\ aH = card\ eH = card\ H$ حسب المبرهنة السابقة.

٢) ليكن $a \in G$
" $\Rightarrow$ " الفرض $a \in H$ عندئذٍ: حسب ٢ $aH = H$ وهي زمرة جزئية في G عندئذٍ $e \in aH$
ومنه يوجد $h \in H$ بحيث $e = ah$
$$\Rightarrow a = h^{-1} \in H$$

Syria Math Team

٣) ليكن $a,b \in G$

" $\Leftarrow$ " الفرض ان $aH = bH$ عندئذٍ :

$aH = bH$ لان $aHb^{-1} = Hbb^{-1} = He = H$

" $\Rightarrow$ " الفرض ان $H = aHb^{-1}$ نضرب ب b

$$Hb = aHb^{-1}b = aH$$

٤) لنعرّف العلاقة :

$$\emptyset : M_l \longrightarrow M_r$$

$$\forall aH \in M_l \;\; ; \;\; \emptyset(a11) = Ha^{-1}$$

ان $\emptyset$ تطبيق لأنه اذا كان $aH, bH \in M_l$ بحيث $aH = bH$

فإن $a \in bH$ لان $a \in aH$ ومنه يوجد $h \in H$ حيث $a = bh$

وبالتالي: $a^{-1} = (bh)^{-1} = h^{-1}b^{-1} \in Hb^{-1}$ وايضاً $a^{-1} \in Ha^{-1}$ $\Leftarrow$ حسب ٣)

$$Ha^{-1} = Hb^{-1}$$

$\emptyset(aH) = \emptyset(bH)$ ومنه $\emptyset$ تطبيق متباين

ليكن $Hc \in M_r$ عندئذٍ $c \in G$ ومنه $c^{-1} \in G$ وإن $c^{-1}H \in M_l$

$$\emptyset(c^{-1}H) = H(c^{-1})^{-1} = Hc$$

٥-

$$G = \cup_{a \epsilon G} \{a\} \subseteq \cup_{a \epsilon G} aH = \cup_{aH \epsilon Ml} \; aH \subseteq G$$

$$\Rightarrow G = \bigcup_{aH \in M_l} aH$$

تعريف : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G ولنفرض ان $M_l = \{aH : a \in G\}$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G نسمي المقدار $card\, M_l = card\, M_r$ بدليل الزمرة الجزئية H في G ونرمز لذلك $(G:H) = card\, M_l$

وفي حال كان $H = \{e\}$ فإن $(G:H) = (G:\{e\}) = (G:1)$

Syria Math Team

مبرهنة لاغرانج : لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية فيها عندئذ :

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

الاثبات :

لما كانت G منتهية . لنفرض ان عدد عناصر يساوي n (تحوي n عنصر) ولنفرض ان: (جميع المرافقات اليسارية) $a_1H, a_2H, \dots\dots\dots a_nH$ للزمرة الجزئية H في G و $G = \cup_{i=1}^{n} a_iH$

$$card\ G = card\ a_1H + card a_2H + \cdots + card\ a_nH$$ وإن

$$= cardH + card\ H + \cdots + card\ H(\text{ مرة } n)$$

$$= \underbrace{n}_{\text{عدد المرافقات}} \quad \underbrace{card\ H}_{\text{عدد عناصر } H}$$

$$\underbrace{(G:1)}_{\text{عدد عناصر } G} = n(H:1)$$

$$= \underbrace{(G:H)}_{\text{عدد مرافقات } H}\ (H:1)$$

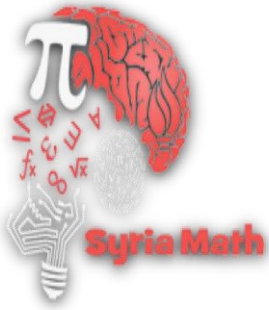
ملاحظة: يمكن صياغة مبرهنة لاغرانج بأكثر من طريقة .

مثال: لأجل أي زمرة منتهية فإن مرتبة هذه الزمرة تقبل القسمة على مرتبة أي زمرة جزئية فيها وناتج القسمة هو الدليل في الزمرة المنتهية فإن مرتبة أي زمرة جزئية تقسم مرتبتها.

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team



نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : التاسعة ◄ عنوان المحاضرة : الزمر الدوارة

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعريف الزمر الدوارة.

٢ـ مبرهنات على الزمر الدوارة.

٣ـ تعريف مرتبة عنصر.

٤ـ مبرهنة تتضمن دراسة بعض خواص مرتبة العنصر.

الزمر الدوارة

تمهيدية: لتكن G زمرة و S مجموعة جزئية وغير خالية في G فإن القضايا التالية صحيحة :

١) تقاطع جميع الزمر الجزئية في G التي كل منها يحوي S هو زمرة جزئية في G تحوي S نرمز لها $< S >$ وتسمى الزمرة الجزئية المولدة.

٢) الزمرة الجزئية $< S >$ هي أصغر زمرة جزئية في G تحوي S .

٣) إن $< S >$ هي عنصر أصغري في مجموعة كل الزمر الجزئية في G التي كل منها يحوي S .

الاثبات :((وظيفة))

لنفرض أن l هو مجموعة كل الزمر الجزئية في G والتي كل منها تحوي S

$$l : \{H : G \text{ في } H \text{ زمرة جزئية } \quad S \subseteq H \}$$

إن $G \in l$ ومنه $l \neq \emptyset$

١) وجدنا سابقا أن $\cap_{H \in l} H$ هو زمرة جزئية في G وبما أن :

$$S \subseteq H \ ; \ \forall H \in l$$

$$S \subseteq \cap_{H \in l} H = < S >$$

٢) لتكن k زمرة جزئية في G تحوي S عندئذ $k \in l$ ولنبرهن أن $< S > = < S > \subseteq k$

$\cap_{H \in l} H \subseteq k$ (k هي إحدى مكونات التقاطع ومن ثم فهي تحوي التقاطع) .

٣) ينتج من (٢) وكون $< S > \in l$ أي هي أصغر عناصر l .

Syria Math Team

تعريف: لتكن G زمرة و S مجموعة جزئية وغير خالية في G.

١. اذا كانت S منتهية نقول $< S >$ منتهية التوليد.
٢. اذا كانت S غير منتهية نقول ان $< S >$ غير منتهية التوليد.
٣. اذا كانت $s = \{a\}$ فإن $< s >=< a > = \{a^n : n \in Z\}$

تعريف الزمر الدوارة: نقول عن الزمرة G انها دوارة اذا وجد $a \in G$ بحيث $G =< a >$

$$G =< a >= \{a^n : n \in Z \; ; a \in G\}$$

توضيح: اذا وجد عنصر في الزمرة يولد هذه الزمرة فحسب التعريف هي اصغر زمرة جزئية في G تحوي S .

- يعود سبب التسمية لإمكانية الحصول على عناصر الزمرة G من العنصر a

أي: تكون الزمرة دوارة اذا وجد فيها عنصر من خلاله نستطيع تحديد جميع العناصر الأخرى.

مثال : هل الزمرة U_{10} زمرة دوارة ؟

$$U_{10} = \{1,3,7,9\}$$

$$3 \in U(10)$$

$$e^0 = 1 \quad , \quad e^1 = 1 \quad , \quad e^2 = 1$$

لذلك نستثني المحايد .

$$3^0 = 1 \quad , \quad 3^1 = 3 \quad , \quad 3^2 = 9 \quad , 3^3 = 7$$

U_{10} زمرة دوارة مولدة بالعنصر (3)

$$U_{10} =< 3 >= \{3^0, 3^1, 3^2, 3^3\} \quad ; \quad < 3 >=< 3^{-1} >= \underbrace{< 7 >}_{\text{نظير مقلوب عند ظهور المحايد}}$$

ملاحظة: أي زمرة دوارة تملك عنصرين على الأقل وهما: العنصر ومقلوبه.

تمهيدية : لتكن G زمرة و $a \in G$ عندئذ $< a >=< a^{-1} >$

الاثبات :

لدينا $< a >$ زمرة وإن $a \in < a >$ و $a^{-1} \in < a >$

كما أن $< a^{-1} >$ زمرة تحوي نفس العنصر ومنه $< a^{-1} > \subseteq < a >$

Syria Math Team

لدينا $< a^{-1} >$ زمرة وأن $a^{-1} \epsilon < a^{-1} >$

فهي تحوي مقلوبه $a = (a^{-1})^{-1} \epsilon < a^{-1} >$

$< a >$ أصغر زمرة جزئية تحوي العنصر a

ومنه $< a > \subseteq < a^{-1} >$

ومن الاحتوائين نجد أن $< a > = < a^{-1} >$

لو عدنا للمثال السابق: $U(10) =< 3 > =< 7 >$

حيث $< 7 >$ هي مقلوب $< 3 >$

$7^0 = 1 \quad , \quad 7^1 = 7 \quad , \quad 7^2 = 9 \quad , 7^3 = 3$

$U_{10} =< 7 > = \{7^0, 7^1, 7^2, 7^3\}$

U_{10} زمرة دوارة مولدة بالعنصر (7) و(3).

ليكن لدينا: $Z_n = \{0,1,2 \dots, (n-1)\}$

$$\forall m \in Z_n; m = 1 + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m\text{مرة}} = m.1$$

$Z_n =< 1 > =< -1 > =< n-1 >$ مولدة ب 1

حسب التمهيدية السابقة:

لو اخذنا : $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$

$$Z_5 =< 1 > =< 4 >$$

زمرة الاعداد الصحيحة Z دوارة مولدة بالعنصر 1

$$Z_5 =< 1 >$$

$$\forall n \in Z \begin{cases} n > 0 \quad : \quad n = 1 + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{مرة}} \\ n = 0 \quad : \quad 0 = 0.1 \\ n < 0 : \quad n = \underbrace{-1 + (-1) + .. + (-1)}_{n\text{مرة}} = (-n)(-1) = n.1 \end{cases}$$

Syria Math Team

مثال: هل الزمرة U_8 زمرة دوارة ؟

$$U_8 = \{1,3,5,7\}$$

$$3^0 = 1 \quad , \quad 3^1 = 3 \quad , \quad 3^2 = 9 \quad , \quad 3^3 = 3 \quad , \quad 3^4 = 1$$

اذا الزمرة المولدة من العنصر 3 هي $< a > = \{1,3\}$

$$U_8 \neq < 3 >$$

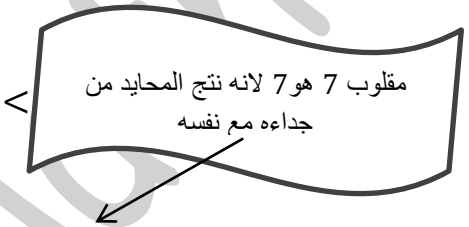
U_8 ليست مولدة بالعنصر (3)

$$< 5 > = \{1,5\}$$

$$5^0 = 1 \quad , \quad 5^1 = 5 \quad , \quad 5^2 = 1 \quad , \quad 5^3 = 5 \quad , \quad 5^4 = 1$$

$$U_8 \neq < 5 >$$

U_8 ليست مولدة بالعنصر (5)



$$7^0 = 1 \quad , \quad 7^1 = 7 \quad , \quad 7^2 = 1 \quad , \quad 7^3 = 7 \quad , \quad 7^4 = 1$$

$$U_8 \neq < 7 >$$

U_8 ليست مولدة بالعنصر (7)

وبالتالي U_8 ليست دوارة لأنها ليست مولدة بأي عنصر .

نتيجة: كل زمرة دوارة تكون تبديلية.

لتكن $G = < a >$ زمرة دوارة حيث $a \in G$ ليكن $x, y \in G$

$$x = a^n \quad , \quad y = a^m \quad : n, m \in Z$$

$$x.y = a^n.a^m = a^{n+m} = a^{m+n}$$

$$= a^m.a^n = y.x$$

Syria Math Team

تمهيدية : لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة مولدة بالعنصر حيث $a \in G$ أي عندئذ :

العلاقة $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow G$ المعرفة بالشكل التالي :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\ ; \varphi\ (n) = a^n \in G$$

هي تطبيق غامر .

الاثبات :

$$\forall n, m \in Z\ :\ n = m$$

$\varphi(n) = a^n = a^m = \varphi(m)$ فهو تطبيق

أياً كان $y \in G$ فإن: $y = a^t$ حيث $t \in Z$

$$\varphi(t) = a^t = y$$

إذاً هو تطبيق غامر.

مبرهنة : لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة حيث $a \in G$ عندئذ الشروط الاتية متكافئة :

١) التطبيق φ متباين .
٢) $\forall\, n, m \in Z\ ;\ a^n = a^m \implies n = m$
٣) $\forall\, n, m \in Z\ ;\ n \neq m \implies a^n \neq a^m$
٤) الزمرة G غير منتهية

الاثبات :

$(1 \longleftarrow 2)$ لنفرض ان $n, m \in Z$ فإن $a^n = a^m$ ومنه $\varphi(n) = \varphi(m)$ وبالتالي نجد: $n = m$

$(2 \longleftarrow 3)$ ليكن $n, m \in Z$ بحيث $n \neq m$ لنفرض جدلا أن $a^n = a^m$ عندئذ حسب الفرض $n = m$ وهذا تناقض ومنه $a^n \neq a^m$

$(3 \longleftarrow 4)$واضح.

$(4 \longleftarrow 1)$لنفرض أن G غير منتهية والمطلوب إثبات أن التطبيق φ متباين

لنفرض جدلا أن التطبيق φ غير متباين عندئذٍ يوجد $n, m \in Z$ بحيث $\varphi(n) = \varphi(\mathrm{m})$

وان $n \neq m \Longleftarrow a^n = a^m\ (*)$

لنفرض أن $n > m$ عندئذ $n - m > 0$ أي ان $n - m \in N^*$

Syria Math Team

نضرب (*) ب a^{-m}:

$$a^{n-m} = e$$

لنأخذ المجموعة

$$\ell = \{t \ : t \in N^* \ , \quad a^t - e\}$$

$$n - m \in \ell \text{ لان } \emptyset \neq \ell \subset N$$

ومنه يوجد في ℓ عنصر اصغر وليكن K بحيث $a^k = e$
لدينا :

$$\{e, a, a^2, \dots\dots\dots, a^{k-1}\} \subseteq G$$

ولثبت الان الاحتواء المعاكس
ليكن $y \in G$ عندئذ $n \in Z$: $y = a^n$ وحسب خوارزمية القسمة لاجل K, n يوجد $q, r \in Z$ بحيث

$$n = qK + r$$

جعلنا القسمة على k لأنه مفروض بالمجموعة ℓ لايساوي الصفر اما n فقد يكون صفر او لا

$$0 \leq r < K$$

$$y = a^n = a^{qK+r} = a^{qK}.a^r = \underbrace{(a^k)^q}_{e \text{ حسب تعريف المجموعة } \ell} .a^r = a^r$$

ومنه $y = a^r \in \{e, a, a^2, \dots\dots\dots, a^{k-1}\}$ ومنه $G \subseteq \{e, a, a^2, \dots\dots\dots, a^{k-1}\}$

ومن الاحتوائين ينتج:

$$G = \{e, a, a^2, \dots\dots\dots, a^{k-1}\}$$

ومنه G منتهية . وهذا يناقض الفرض 4 ومنه φ متباين .

نستنتج: كل الزمر الدوارة غير المنتهية تكون قابلة للعد .

مبرهنة : لتكن G زمرة دوارة مولدة بالعنصر $a \in G$ أي أن $G =< a >$ فإن القضايا التالية متكافئة :

١) الزمرة G منتهية .
٢) يوجد في $n, m \in Z$ بحيث $a^n = a^m$ وأن $n \neq m$.
٣) يوجد في $k \in N^*$ بحيث :

$$G = \{e, a, a^2, \dots\dots\dots, a^{k-1}\}$$

وأن هذه العناصر مختلفة مثنى مثنى .

الاثبات :

(1 ⟵ 2) لنفرض جدلاً انه أياً كان

$n, m \in Z\ ; a^n = a^m$ فإن $n = m$ عندئذٍ: حسب المبرهنة السابقة تكون الزمرة G غير منتهية وهذا يناقض الفرض.

ومنه يوجد $n, m \in Z$ بحيث $a^n = a^m$ وان $n \neq m$

وان $n \neq m$ لأنه اذا كان لأجل كل $n, m \in Z$ يحققان $a^n = a^m$ فإن $n = m$ ينتج ان f متباين وبالتالي G غير منتهية وهذا تناقض

(3 ⟵ 2) ليكن $n, m \in Z$ بحيث $n \neq m$ و $a^n = a^m$ عندئذٍ: $n > m$ ومنه $n - m > 0$

ولو ضربنا $a^n = a^m$ ب a^{-m}:

$$a^{n-m} = e$$

لنأخذ المجموعة $l = \{t : t \epsilon N^* \ : \ a^t = e \ \}$

$\emptyset \neq l \subseteq N^*$ لان $n - m \in l$ ومنه يوجد في l عنصر أصغر وليكن k وأن $a^k = e$

(لأنها مجموعة جزئية في N و غير خالية)

لنأخذ المجموعة: $\{e, a, a^2, \dots\dots\dots, a^{k-1}\}$ وبنفس الطريقة السابقة نجد ان

$$\{e, a, a^2, \dots\dots\dots, a^{k-1}\} = G$$

اثبات أن عناصر المجموعة السابقة مختلفة مثنى مثنى لنفرض جدلا أنه يوجد $a^s, a^t \in G$ بحيث

$$a^s = a^t \quad , \quad s \neq t$$

$$0 \leq s, t < k$$

بفرض $s > t$ نجد أن $s - t > 0$

لنضرب طرفي العلاقة $a^s = a^t\ a^j$ ب a^{-t} $\quad 0 \leq \underbrace{s - t}_{\text{موجب}} < k \quad ; \quad a^{s-t} = e$

(((حيث s, t عدد طبيعي وأصغر من k لأجله $a^{s-t} = e$ وهذا غير ممكن لان k هو العنصر الأصغر في مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة والتي لأجلها $a^k = e$ في المجموعة ℓ لذلك هذا يناقض كون k عنصر اصغر في N وبالتالي العناصر : $\{e, a, a^2, \dots\dots\dots, a^{k-1}\}$ مختلفة مثنى مثنى .

(1 ⟵ 3) واضح لان G تحوي K عنصر ومنه فهي منتهية.

Syria Math Team

تعريف: ليكن G زمرة و $a \in G$ نسمي أصغر عدد صحيح موجب n يحقق $a^n = e$ مرتبة العنصر a ونرمز له $0(a) = n$ وهذا في الحالة العامة ، واذا كان $\forall m \in N^*$ $a^m \neq e$

نقول ان للعنصر a مرتبة لانهائية ونرمز لذلك $0(a) = \infty$.

((معنى ∞ لا يوجد عدد صحيح موجب لأجله المساواة صحيحة ولا يدل هذا الرمز على اللانهاية التي نتعامل معها في التحليل و المواد الأخرى))

نعود لمثالنا: ١- $U(8) = \{1,3,5,7\}$

$0(1) = 1$ مرتبة المحايد 1 دائماً

$3^1 = 3$, $3^2 = \underbrace{1}_{\text{نتوقف عند اول اس نحصل من خلاله على المحايد}}$, $0(3) = 2$

$5^1 = 5$, $5^2 = 1$, $0(5) = 2$, $0(7) = 2$

٢- $U(10) = \{1,3,7,9\}$

$0(1) = 1$, $0(3) = 4$, $0(7) = 4$, $0(9) = 2$

بحالة الزمر الجمعية:

٣- لتكن $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ حيث $0(0) = 1$

$1.1 = 1$	$1.2 = 2$	$3.1 = 3$
$1.2 = 2$	$2.2 = 0$	$3.2 = 2$
$1.3 = 3$		$3.3 = 1$
$1.4 = 0$		$4.3 = 0$
$0(1) = 4$	$0(2) = 2$	$0(3) = 4$

٤- في زمرة الاعداد الصحيحة لدينا:

$0(0) = 1$, $0(2) = \infty$

$\forall a \in Z$, $a \neq 0$; $0(a) = \infty$

Syria Math Team

مبرهنة : ((دراسة بعض الخواص لمرتبة العنصر))

لتكن G زمرة و $a \in G$ مرتبته $0(a) = n$ عندئذ :

١) $0(a^{-1}) = n$: $0(a^{-1}) = 0(a)$

٢) $0(a^s) = 0(a^{n-s})$ فإن $\forall s \in Z : s \leq n$

٣) إذا كان $k \in Z$ يحقق $a^k = e$ فإن n يقسم k.

٤) لأجل أي عدد صحيح موجب t يقسم n فإن $0\left(a^{\frac{n}{t}}\right) = t$

٥) اذا كان $G =< a >$ فإن $n = 0 < a >= (G:1)$

الاثبات :

١) لدينا $e = a^n$ ومنه $e = a^{-n}$ ومنه
$e = (a^{-1})^n$ و بقي أن نثبت أن n أصغر عدد صحيح موجب يحقق المساواة السابقة وليكن K عدد صحيح موجب لأجله : بحيث $e = (a^{-1})^k$ ومنه $e = a^{-k}$ ولو ضربنا ب a^k يعطي $e = a^k$ وحسب تعريف المرتبة نجد ان : $n \leq k$
اذاً $0(a^{-1}) = n$

٢) ليكن $e = a^n = a^{n-s}.a^s$
نضرب بمقلوب a^s من اليمين نحصل على $a^{-s} = a^{n-s}$

$$0(a^s) = 0(a^{-s}) = 0(a^{n-s})$$

٣) ليكن $k \in Z$ بحيث $a^k = e$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل n, k نجد أن

$$k = qn + r \qquad q, r \in Z$$
$$0 \leq r < n$$

لنبرهن ان $r = 0$ ، لنفرض جدلا أن $r \neq 0$ عندئذ $0 < r < n$ كما أنه يحقق :

$$a^k = a^{qn+r} = a^{qn}.a^r = (a^n)^q.a^r = e.q^r = a^r$$

$$a^k = a^{qn+r} = a^{qn}.a^r = (a^n)^q.a^r = e.a^r = a^r$$

وهذا يناقض لأنه لا يوجد عدد صحيح موجب أصغر من n يحقق هذه المساواة كون $0(a) = n$ ومنه $r = 0$ وبالتالي $k = qn$.

٤) ليكن $t > 0$ وأن t يقسم n وبالتالي $\frac{n}{t} \in Z$, $0 < t \leq n$ وبالتالي $a^{\frac{n}{t}} \in G$

$$(a^{\frac{n}{t}})^t = a^{\frac{n.t}{t}} = a^n = e \quad : \frac{n}{t} \leq n$$

ولنأخذ عدد آخر يحقق نفس الشرط وليكن K عدد صحيح موجب يحقق $\left(a^{\frac{n}{t}}\right)^{k}=e$ عندئذٍ : $\left(a^{\frac{n.k}{t}}\right)=e$

- مرتبة العنصر a هي n اذا n أصغر عنصر تحقق المساواة :

$$n \leq \frac{nk}{t}$$

$$1 \leq \frac{k}{t} \Rightarrow t \leq k$$

إذاً t اصغر الاعداد الموجبة التي تحقق المساواة ومنه $0\left(a^{\frac{n}{t}}\right)=t$

٥) اذا كانت G دوارة منتهية مولدة بالعنصر a

$$G=\{e,a,a^2 \dots \dots a^{n-1}\}$$

وهذا يبين أن $(G:1)=n=0(a)$

انتهت المحاضرة

تنويه: في المحاضرة السابقة وجد خطأ بسيط(الصفحة الخامسة)(السطر الثامن)

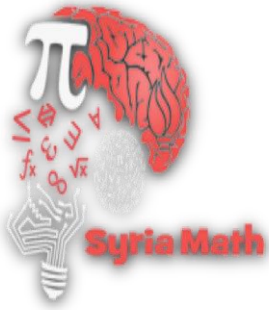
الخطأ : $\forall aH \in M_i \; ; \; \emptyset(a11)=Ha^{-1}$

التصحيح:

$$\forall aH \in M_i \; ; \; \emptyset(aH)=Ha^{-1}$$

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخرس – هلا هج

Syria Math Team



نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : العاشرة ◄ عنوان المحاضرة : الزمر الدوارة

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ سنتابع في الزمرة الدوارة ومبرهنات عنها.

٢ـ نتعرّف على بعض الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة.

٣ـ شروط لأجلها تكون الزمرة المولدة بعنصرين دوارة.

مبرهنة: ((هذه المبرهنة تعطينا الشرط الازم والكافي كي تكون عناصر الزمرة الدوارة المنتهية مولدات لها))

النص : لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها n حيث $a \in G$ ان الشروط الاتية متكافئة :

١) $k \epsilon Z; G =< a^k >$

٢) $\gcd(k,n) = 1$

الاثبات :

(1 ← 2) لنفرض أن $G =< a^k >$ حيث $k \in Z$ ولنفرض جدلا أن $\gcd(k,n) = d > 1$ عندئذ يوجد $s,t \epsilon Z$ حيث : $k = t.d$ و $n = s.d$ ومنه:

$$(a^s)^k = (a^s)^{td} = (a^{sd})^t = (a^n)^t = e$$

ومنه : $0 \leq S < n$: $(a^k)^s = e$

((قيم S لاتصل الى n . إذاً لن نحصل على جميع العناصر ،نصل الى جزء فقط)).

وهذا يناقض كون $G =< a^k >$ وبالتالي $\gcd(k,n) = 1$

(1 ← 2) لنفرض أن $\gcd(k,n) = 1$ عندئذ يوجد $\alpha, \beta \epsilon Z$ بحيث:

$1 = \alpha.n + \beta.k$ (α يعني الفا)

$$a^1 = a^{\beta.k+\alpha.n} = a^{\beta.k}.a^{\alpha.n} = (a^n)^{\alpha}.(a^k)^{\beta}$$
$$= e(a^k)^{\beta} = (a^k)^{\beta} \epsilon < a^k >$$

اصغر زمرة جزئية تحوي α $a \in < a >$ و $a \in < a^k >$

$$\Rightarrow G =< a > \subseteq < a^k > \subseteq G \Rightarrow \quad G =< a^k >$$

Syria Math Team

نتيجة: لنفرض ان $n \geq 1$ عدد صحيح وليكن $k \in Z_n$ عندئذٍ(الزمرة Z_n مولدة بالعنصر k)

$$\gcd(k,n) = 1 \Leftrightarrow Z_n =< k >$$

مثال:

$$Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$Z_8 < 1 > =< -1 > =< 7 >$$

$$Z =< 5 > =< 3 >$$

مبرهنة : كل زمرة جزئية من زمرة دوارة تكون أيضا دوارة .

البرهان:

لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة حيث $a \in G$ لتكن H زمرة جزئية في G:

١. $H = \{e\} \Leftarrow H =< e >$ ومنه H دوارة.(طالما المحايد بحد ذاته يؤلف زمرة جزئية عندها تكون $H =< e >$

٢. $H \neq \{e\}$ عندئذٍ يوجد $x \in H$ ومنه $x = a^s \in H$ حيث $s \in Z$ و $s \neq 0$

لنأخذ المجموعة ℓ: $\ell = \{k \ , k \epsilon N^* : \ a^k \epsilon H \}$

إن $\ell \neq 0$ لان $s \in \ell \Leftarrow \ell$ تحوي عنصر اصغر وليكن m ان $a^m \in H$ وبالتالي:

$$< a^m > \subseteq H \ldots (1)$$

((لنثبت الاحتواء المعاكس))

ليكن $y \epsilon H$ عندئذٍ $y = a^k$ حيث $k \epsilon Z$ وحسب خوارزمية القسمة فإنه

$$k = qm + r \text{ حيث } 0 \leq r < m$$

لنفرض جدلا أن $r \neq 0$ عندئذ $0 < r < m$

$$a^k = a^{qm+r} = a^{qm}.a^r \quad \underset{\text{ولنضرب من اليسار ب } a^{-q}}{\Rightarrow} \quad a^r = a^{-qm}.a^k \in H$$

ومنه وجدنا عنصر لأجله $a^r \in H$ وأن $r \in \ell$ و $r < m$ وهذا يناقض كون m هو العنصر الأصغرفي ℓ

ومنه نجد ان $r = 0$ وبالتالي: $y = a^k = a^{qm} = (a^m)^q \in < a^m >$

$$\Rightarrow H \subseteq < a^m > \cdots (2)$$

ومن الإحتوائين 1 و 2 نجد ان $H =< a^m >$ زمرة مولدة بالعنصر a^m حيث m اصغر عدد صحيح موجب يحقق

$$a^m \in H$$

بعض الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة

مبرهنة: لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها n حيث $a \in G$ وليكن $k \in Z$ قاسم للعدد n

عندئذ يوجد في G زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها k وهي المولدة بالعنصر $< a^{\frac{n}{k}} >$.

((ان $k > 0$ لان المرتبة لايمكن ان تكون سالبة))

البرهان:

بما ان الزمرة الدوارة مرتبتها n فإن العنصر المولّد لها مرتبته n أي ان $0 < a >= n$

و $0\left(a^{\frac{n}{k}}\right) = k$ ومنه فإن $< a^{\frac{n}{k}} >$ زمرة دوارة مرتبتها k

((لنثبت انها وحيدة))

لتكن H زمرة جزئية في G مرتبتها k وحسب المبرهنة السابقة فإن $H =< a^m >$

حيث $m \in Z$ اصغر عدد صحيح موجب لأجله $a^m \in H$

$$k = (H:1) = (< a^m >:1) = 0(a^m) = \frac{n}{m} \Rightarrow m = \frac{n}{k}$$

ومنه فإن : $< a^{\frac{n}{k}} >=< a^m >= H$ فهي وحيدة.

- ان عملية الجمع بالمقاس n . (Z_n) جميعها دوارة.
- اما عملية الضرب بالمقاسn . $(U(n))$ جزء منها فقط.
- **مبرهنة : كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي تكون دوارة .**

الإثبات :

- لنفرض أن G زمرة منتهية مرتبتها P حيث P عدد أولي ((ان هذه الزمرة تحوي على الأقل عنصرين))

$$\exists a \in G : a \neq e$$

- إن $G =< a >$ (a يولد زمرة جزئية فيG) وحسب لاغرانج فإن مرتبة الزمرة $< a >$ تقسم مرتبة الزمرة $(G:1) = p$

(حيث $1, p$ قواسم ال p) $(< a >:1) \in \{1, p\}$

١) $(< a >:1) = 1 \Rightarrow 0(a) = 1 \Rightarrow a = e$ مرفوض

٢) $(< a >:1) = p \Longrightarrow G =< a >$

مجموعتين منتهيتين لهما نفس كمية العناصر وكل مجموعة محتواه بالآخر يكونان متساويان

ومنه G تكون $G =< a >$

Syria Math Team

تمهيدية: لتكن G زمرة منتهية مرتبتها n **عندئذٍ**

١) $\forall a \in G \ ; \ a^n = e$

٢) $\forall a \in G \ ;$ **n** يقسم $\mathbf{0}(a)$

البرهان:

١- ليكن $a \in G$ **عندئذٍ** $< a >$ زمرة جزئية في G منتهية ولنفرض ان مرتبة الزمرة $< a >$ هي k

$$(< a >: 1) = k$$

عندئذٍ: k يقسم n ومنه: $n = k.t : t \in Z$

$$a^n = a^{kt} = (a^k)^t = e \quad : \quad 0(a) = k \text{ إن}$$

٢- ليكن $a \in G$ عندئذٍ $< a >$ زمرة جزئية في G ومرتبتها من مرتبة العنصر المولد a

$(< a >: 1) = 0(a)$ وحسب لاغرانج فإن $< a >$ تقسم مرتبة G ومنه تم المطلوب

مبرهنة: لتكن G زمرة و $a, b \in G$ وأن $0(a) = n \ , \ 0(b) = m$

لنفرض ان $a.b = b.a$ وان $< a > \cap < b > = < e >$

عندئذ $0(a.b) = Icm(n,m)$))) $Icm(n,m)$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين (n,m)

البرهان:

لنفرض ان

$$k = Icm(n,m)$$

$$\Rightarrow \ k = s.n \quad , \quad k = t.m \quad \text{بحيث } s,t \in Z$$

$$(a.b)^k = a^k.b^k$$

تنبيه: $(a.b)^2 = a.b.ab = a.a.b.b = a^2.b^2)$

لان $a.b = b.a$

$$a^k.b^k = a^{sn}.b^{tm} = (a^n)^s.(b^m)^t = e$$

Syria Math Team

ومنه $k \geq 0(a.b)$ لنفرض ان $\lambda = 0(a.b)$

$$\Longrightarrow k \geq \lambda$$

$$\Longrightarrow (a.b)^{\lambda} = e \Longrightarrow a^{\lambda}.b^{\lambda} = e$$

نضرب من اليمين بمقلوب a^{λ}

$$a^{\lambda}.b^{\lambda}a^{-\lambda} = e.a^{-\lambda} \Longrightarrow b^{\lambda} = a^{-\lambda} \Longrightarrow a^{\lambda} = b^{-\lambda}$$

$$b^{-\lambda} \in < a > \cap < b > = < e >$$

وبالتالي $\begin{cases} \lambda \text{ يقسم } n \\ \lambda \text{ يقسم } m \end{cases} \Leftarrow \lambda \geq k$ ومنه: $k = \lambda \Leftarrow 0(a.b) = Icm(n,m)$

تمرين: لتكن G زمرة و $a,b \in G$ وأن $0(a) = n \ , \ 0(b) = m$

و $a.b = b.a$ و $\gcd(n,m) = 1$ عندئذ :

$$< a > \cap < b > = < e >$$

$$0(a.b) = 0(a).0(b)$$

الحل :

ليكن $x \in < a > \cap < b >$ ولنفرض أن $0(x) = \lambda$

عندئذٍ:

$$x \in < a > ; x^{n} = e$$

$$x \in < b > ; x^{m} = e$$

ومنه فإن λ يقسم كلاً من n,m وحسب الفرض $\lambda = 1$ ((القاسم)) ومنه:

$$x^{\lambda} = e \Rightarrow x = e$$

ومنه فإن: $\Longrightarrow < a > \cap < b > = < e >$

$$0(a.b) = Icm(n,m) = n.m$$

وحسب المبرهنة السابقة نجد: $0(a.b) = 0(a).0(b)$

Syria Math Team

تمرين: لتكن G زمرة و $a,b \in G$ بحيث $0(b)=m$, $0(a)=n$ وان $\gcd(n,m)=1$

وبفرض $a.b=b.a$ عندئذ: $< a.b >=< a,b >$.

الحل :

لدينا $a,b \in < a,b >$ ومنه $a.b \in < a,b >$ ومنه فإن $< a.b > \subseteq < a,b >$

((لنثبت الاحتواء المعاكس))

لما كان $\gcd(n,m)=1$ فإن $1 = sn+tm : s,t \in Z$

$$a = a^{sn+tm} = a^{n.s}.a^{t.m} = \underbrace{(a^n)}_{=e}^{s}.(a^m)^t = e.a^{mt} = a^{mt} = a^{tm}\underbrace{(b^m)^t}_{=e}$$

$$a^{tm}.b^{tm} = (a.b)^{tm} \in < a.b >$$

بنفس الطريقة نثبت ان $b \in < a.b >$ ومنه نجد ان

$$< a,b > \subseteq < a.b >$$

$$\Rightarrow < a.b > = < a,b >$$

وعناصرها هي : $0 \le k < n,m$: $(a.b)^k = a^k.b^k$

وظيفة: لتكن $n=2, m=3$ اوجد هذه العناصر

$$< a.b > = \left\{ a^i b^j \quad \begin{matrix} 0 \le i < n \\ 0 \le j < m \end{matrix} \right.$$

لنثبت ان $j=0$ ولنأخذ $i=0,1$

$$a^0 b^0 = e$$
$$a^1 b^0 = a$$

لنثبت ان $j=1$ ولنأخذ $i=0,1$

$$a^0 b^1 = b$$
$$a^1 b^1 = a.b$$

لنثبت ان $j=2$ ولنأخذ $i=0,1$

$$a^0 b^2 = b.b = b^2$$
$$a^1 b^2 = a.b^2$$

وبالتالي $< a.b > \{e, a, b, a.b, b^2, ab^2\}$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team