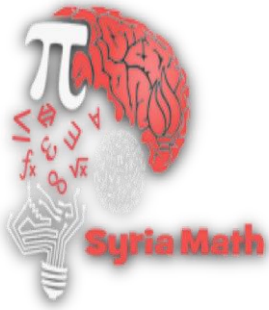


نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : العاشرة ◄ عنوان المحاضرة : الزمر الدوارة

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ سنتابع في الزمرة الدوارة ومبرهنات عنها.

٢ـ نتعرّف على بعض الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة.

٣ـ شروط لأجلها تكون الزمرة المولدة بعنصرين دوارة.

مبرهنة: ((هذه المبرهنة تعطينا الشرط الازم والكافي كي تكون عناصر الزمرة الدوارة المنتهية مولدات لها))

النص : لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها n حيث $a \in G$ ان الشروط الاتية متكافئة :

١) $k \epsilon Z; G =< a^k >$

٢) $\gcd(k,n) = 1$

الاثبات :

(1 ← 2) لنفرض أن $G =< a^k >$ حيث $k \in Z$ ولنفرض جدلا أن $\gcd(k,n) = d > 1$ عندئذ يوجد $s,t \epsilon Z$ حيث : $k = t.d$ و $n = s.d$ ومنه:

$$(a^s)^k = (a^s)^{td} = (a^{sd})^t = (a^n)^t = e$$

ومنه : $0 \leq S < n$: $(a^k)^s = e$

((قيم S لاتصل الى n . إذاً لن نحصل على جميع العناصر ،نصل الى جزء فقط)).

وهذا يناقض كون $G =< a^k >$ وبالتالي $\gcd(k,n) = 1$

(1 ← 2) لنفرض أن $\gcd(k,n) = 1$ عندئذ يوجد $\alpha, \beta \epsilon Z$ بحيث:

$1 = \alpha.n + \beta.k$ (α يعني الفا)

$$a^1 = a^{\beta.k+\alpha.n} = a^{\beta.k}.a^{\alpha.n} = (a^n)^{\alpha}.(a^k)^{\beta}$$
$$= e(a^k)^{\beta} = (a^k)^{\beta} \epsilon < a^k >$$

اصغر زمرة جزئية تحوي α $a \in < a >$ و $a \in < a^k >$

$$\Rightarrow G =< a > \subseteq < a^k > \subseteq G \Rightarrow \quad G =< a^k >$$

Syria Math Team

نتيجة: لنفرض ان $n \geq 1$ عدد صحيح وليكن $k \in Z_n$ عندئذٍ(الزمرة Z_n مولدة بالعنصر k)

$$\gcd(k,n) = 1 \Leftrightarrow Z_n =< k >$$

مثال:

$$Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$Z_8 < 1 > =< -1 > =< 7 >$$

$$Z =< 5 > =< 3 >$$

مبرهنة : كل زمرة جزئية من زمرة دوارة تكون أيضا دوارة .

البرهان:

لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة حيث $a \in G$ لتكن H زمرة جزئية في G:

١. $H = \{e\} \Leftarrow H =< e >$ ومنه H دوارة.(طالما المحايد بحد ذاته يؤلف زمرة جزئية عندها تكون $H =< e >$

٢. $H \neq \{e\}$ عندئذٍ يوجد $x \in H$ ومنه $x = a^s \in H$ حيث $s \in Z$ و $s \neq 0$

لنأخذ المجموعة ℓ: $\ell = \{k \ , k \epsilon N^* : \ a^k \epsilon H \}$

إن $\ell \neq 0$ لان $s \in \ell \Leftarrow \ell$ تحوي عنصر اصغر وليكن m ان $a^m \in H$ وبالتالي:

$$< a^m > \subseteq H \ldots (1)$$

((لنثبت الاحتواء المعاكس))

ليكن $y \epsilon H$ عندئذٍ $y = a^k$ حيث $k \epsilon Z$ وحسب خوارزمية القسمة فإنه

$$k = qm + r \text{ حيث } 0 \leq r < m$$

لنفرض جدلا أن $r \neq 0$ عندئذ $0 < r < m$

$$a^k = a^{qm+r} = a^{qm}.a^r \quad \underset{\text{ولنضرب من اليسار ب } a^{-q}}{\Rightarrow} \quad a^r = a^{-qm}.a^k \in H$$

ومنه وجدنا عنصر لأجله $a^r \in H$ وأن $r \in \ell$ و $r < m$ وهذا يناقض كون m هو العنصر الأصغرفي ℓ

ومنه نجد ان $r = 0$ وبالتالي: $y = a^k = a^{qm} = (a^m)^q \in < a^m >$

$$\Rightarrow H \subseteq < a^m > \cdots (2)$$

ومن الإحتوائين 1 و 2 نجد ان $H =< a^m >$ زمرة مولدة بالعنصر a^m حيث m اصغر عدد صحيح موجب يحقق

$$a^m \in H$$

بعض الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة

مبرهنة: لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها n حيث $a \in G$ وليكن $k \in Z$ قاسم للعدد n

عندئذ يوجد في G زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها k وهي المولدة بالعنصر $< a^{\frac{n}{k}} >$.

((ان $k > 0$ لان المرتبة لايمكن ان تكون سالبة))

البرهان:

بما ان الزمرة الدوارة مرتبتها n فإن العنصر المولّد لها مرتبته n أي ان $0 < a >= n$

و $0\left(a^{\frac{n}{k}}\right) = k$ ومنه فإن $< a^{\frac{n}{k}} >$ زمرة دوارة مرتبتها k

((لنثبت انها وحيدة))

لتكن H زمرة جزئية في G مرتبتها k وحسب المبرهنة السابقة فإن $H =< a^m >$

حيث $m \in Z$ اصغر عدد صحيح موجب لأجله $a^m \in H$

$$k = (H:1) = (< a^m >:1) = 0(a^m) = \frac{n}{m} \Rightarrow m = \frac{n}{k}$$

ومنه فإن : $< a^{\frac{n}{k}} >=< a^m >= H$ فهي وحيدة.

- ان عملية الجمع بالمقاس n . (Z_n) جميعها دوارة.
- اما عملية الضرب بالمقاسn . $(U(n))$ جزء منها فقط.
- **مبرهنة : كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي تكون دوارة .**

الإثبات :

- لنفرض أن G زمرة منتهية مرتبتها P حيث P عدد أولي ((ان هذه الزمرة تحوي على الأقل عنصرين))

$$\exists a \in G : a \neq e$$

- إن $G =< a >$ (a يولد زمرة جزئية فيG) وحسب لاغرانج فإن مرتبة الزمرة $< a >$ تقسم مرتبة الزمرة $(G:1) = p$

(حيث $1, p$ قواسم ال p) $(< a >:1) \in \{1, p\}$

١) $(< a >:1) = 1 \Rightarrow 0(a) = 1 \Rightarrow a = e$ مرفوض

٢) $(< a >:1) = p \Longrightarrow G =< a >$

مجموعتين منتهيتين لهما نفس كمية العناصر وكل مجموعة محتواه بالآخر يكونان متساويان

ومنه G تكون $G =< a >$

Syria Math Team

تمهيدية: لتكن G زمرة منتهية مرتبتها n **عندئذٍ**

١) $\forall a \in G \ ; \ a^n = e$

٢) $\forall a \in G \ ;$ **n** يقسم $\mathbf{0}(a)$

البرهان:

١- ليكن $a \in G$ **عندئذٍ** $< a >$ زمرة جزئية في G منتهية ولنفرض ان مرتبة الزمرة $< a >$ هي k

$$(< a >: 1) = k$$

عندئذٍ: k يقسم n ومنه: $n = k.t : t \in Z$

$$a^n = a^{kt} = (a^k)^t = e \quad : \quad 0(a) = k \text{ إن}$$

٢- ليكن $a \in G$ عندئذٍ $< a >$ زمرة جزئية في G ومرتبتها من مرتبة العنصر المولد a

$(< a >: 1) = 0(a)$ وحسب لاغرانج فإن $< a >$ تقسم مرتبة G ومنه تم المطلوب

مبرهنة: لتكن G زمرة و $a, b \in G$ وأن $0(a) = n \ , \ 0(b) = m$

لنفرض ان $a.b = b.a$ وان $< a > \cap < b > = < e >$

عندئذ $0(a.b) = Icm(n,m)$))) $Icm(n,m)$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين (n,m)

البرهان:

لنفرض ان

$$k = Icm(n,m)$$

$$\Rightarrow \ k = s.n \quad , \quad k = t.m \quad \text{بحيث } s,t \in Z$$

$$(a.b)^k = a^k.b^k$$

تنبيه: $(a.b)^2 = a.b.ab = a.a.b.b = a^2.b^2)$

لان $a.b = b.a$

$$a^k.b^k = a^{sn}.b^{tm} = (a^n)^s.(b^m)^t = e$$

Syria Math Team

ومنه $k \geq 0(a.b)$ لنفرض ان $\lambda = 0(a.b)$

$$\Longrightarrow k \geq \lambda$$

$$\Longrightarrow (a.b)^{\lambda} = e \Longrightarrow a^{\lambda}.b^{\lambda} = e$$

نضرب من اليمين بمقلوب a^{λ}

$$a^{\lambda}.b^{\lambda}a^{-\lambda} = e.a^{-\lambda} \Longrightarrow b^{\lambda} = a^{-\lambda} \Longrightarrow a^{\lambda} = b^{-\lambda}$$

$$b^{-\lambda} \in < a > \cap < b > = < e >$$

وبالتالي $\begin{cases} \lambda \text{ يقسم } n \\ \lambda \text{ يقسم } m \end{cases} \Leftarrow \lambda \geq k$ ومنه: $k = \lambda \Leftarrow 0(a.b) = Icm(n,m)$

تمرين: لتكن G زمرة و $a,b \in G$ وأن $0(a) = n \ , \ 0(b) = m$

و $a.b = b.a$ و $\gcd(n,m) = 1$ عندئذ :

$$< a > \cap < b > = < e >$$

$$0(a.b) = 0(a).0(b)$$

الحل :

ليكن $x \in < a > \cap < b >$ ولنفرض أن $0(x) = \lambda$

عندئذٍ:

$$x \in < a > ; x^{n} = e$$

$$x \in < b > ; x^{m} = e$$

ومنه فإن λ يقسم كلاً من n,m وحسب الفرض $\lambda = 1$ ((القاسم)) ومنه:

$$x^{\lambda} = e \Rightarrow x = e$$

ومنه فإن: $\Longrightarrow < a > \cap < b > = < e >$

$$0(a.b) = Icm(n,m) = n.m$$

وحسب المبرهنة السابقة نجد: $0(a.b) = 0(a).0(b)$

Syria Math Team

تمرين: لتكن G زمرة و $a,b \in G$ بحيث $0(b)=m$, $0(a)=n$ وان $\gcd(n,m)=1$

وبفرض $a.b=b.a$ عندئذ: $< a.b >=< a,b >$.

الحل :

لدينا $a,b \in < a,b >$ ومنه $a.b \in < a,b >$ ومنه فإن $< a.b > \subseteq < a,b >$

((لنثبت الاحتواء المعاكس))

لما كان $\gcd(n,m)=1$ فإن $1 = sn+tm : s,t \in Z$

$$a = a^{sn+tm} = a^{n.s}.a^{t.m} = \underbrace{(a^n)}_{=e}^{s}.(a^m)^t = e.a^{mt} = a^{mt} = a^{tm}\underbrace{(b^m)^t}_{=e}$$

$$a^{tm}.b^{tm} = (a.b)^{tm} \in < a.b >$$

بنفس الطريقة نثبت ان $b \in < a.b >$ ومنه نجد ان

$$< a,b > \subseteq < a.b >$$

$$\Rightarrow < a.b > = < a,b >$$

وعناصرها هي : $0 \le k < n,m$: $(a.b)^k = a^k.b^k$

وظيفة: لتكن $n=2, m=3$ اوجد هذه العناصر

$$< a.b > = \left\{ a^i b^j \quad \begin{matrix} 0 \le i < n \\ 0 \le j < m \end{matrix} \right.$$

لنثبت ان $j=0$ ولنأخذ $i=0,1$

$$a^0 b^0 = e$$
$$a^1 b^0 = a$$

لنثبت ان $j=1$ ولنأخذ $i=0,1$

$$a^0 b^1 = b$$
$$a^1 b^1 = a.b$$

لنثبت ان $j=2$ ولنأخذ $i=0,1$

$$a^0 b^2 = b.b = b^2$$
$$a^1 b^2 = a.b^2$$

وبالتالي $< a.b > \{e, a, b, a.b, b^2, ab^2\}$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team

7-11-2017

نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة : الزمر الجزئية

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-الزمر الجزئية الناظمية.

٢- دراسة بعض خواصها على شكل مبرهنات.

تعريف الزمر الجزئية الناظمية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G نقول ان H ناظمية في G إذا حققت الشروط :

$$\forall\, a \in G \;\; ; \;\; aH = Ha$$

(أي كل مرافق يساري = المرافق اليميني)

ينتج مباشرة من التعريف :

١) لأجل أية زمرة G فإن كلا من G و $< e >$ زمرة جزئية ناظمية في G .
٢) اذا كانت الزمرة G تبديلية ، كانت جميع زمرها ناظمية.

تمهيدية :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الزمرة الجزئية H ناظمية في G .
٢) $a\,H\,a^{-1} \subseteq H \quad ; \quad \forall\, a \in G$
٣) $a^{-1}H\,a \subseteq H \quad ; \quad \forall\, a \in G$

الاثبات :

$((1) \leftarrow (2))$ لنفرض أن الزمرة الجزئية H ناظمية في G عندئذ فحسب التعريف فإن :

$$\forall\, a \in G \;\; ; \;\; a.H = H.a$$

ليكن $y \in aHa^{-1}$ عندئذٍ: $y = a.h.a^{-1} \;\; : \;\; h \in H$

ولما كان $ah \in aH = Ha \Leftarrow$ يوجد $h_0 \in H$ بحيث $ah = h_0 a$

$$\Rightarrow y = a.h.a^{-1} = h_0.a.a^{-1} = h_0 \in H$$

$$\Rightarrow a.H.a^{-1} \subseteq H$$

$((1 \leftarrow 2))$ نريد اثبات أنه $aH = Ha \quad ; \quad \forall\, a \in G$

ليكن $a \in G \ , \ x \in aH$ عندئذٍ يوجد $h_1 \in H$ بحيث :

$$x = ah_1 = ah_1e = a.h_1.a^{-1}.a \in aHa^{-1}.a \subseteq Ha \Rightarrow a.H \subseteq H.a$$

بنفس الطريقة نثبت الاحتواء المعاكس ومنه يتم المطلوب

$((3 \leftarrow 2))$ لنفرض أن $a\,H\,a^{-1} \subseteq H \quad ; \quad \forall\, a \in G$

ولما كان $a^{-1} \in G$ فإن $a^{-1}\,H.(a^{-1})^{-1} \subseteq H$

فإن $a^{-1}\,H.a \subseteq H$

$((1 \leftarrow 3))$ لنفرض أن $a^{-1}\,H\,a \subseteq H \quad ; \quad \forall\, a \in G$

لإثبات أن H زمرة جزئية ناظمية في G يجب إثبات أن :

$$a.H = H.a \quad ; \quad \forall\, a \in G$$

ليكن $x \in aH$ عندئذ يوجد $h \in H$ فإن $x = ah$

(ضربنا $a.h$ بالمحايد $\underbrace{a^{-1}.a}_{\text{محايد}}$)

$$x = a.h.a^{-1}.a = \underbrace{((a^{-1})^{-1}.h.a^{-1})}_{\in H(\text{حسب } 3)}.a \in Ha$$

$$\Longrightarrow aH \subseteq Ha$$

لنثبت الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in Ha$ عندئذ $y = h_1 a$ حيث $h_1 \in H$ ومنه :

$$y = h_1 a = \underbrace{a.a^{-1}}_{\text{محايد}}.h_1.a = a.(a^{-1}.h_1.a) \in aH$$

$$\Longrightarrow Ha \subseteq aH$$

ومن الاحتواءين نجد أن $Ha = aH$ ومنه الزمرة الجزئية ناظمية في G

Syria Math Team

تمرين:

لأجل أي زمرة G فإن: $Z(G)=\{a: a\in G \ , \ ax=xa \ , \ \forall x\in G\}$

ان هذا المركز زمرة جزئية ناظمية في G

الحل:

وجدنا سابقاً ان $Z(G)$ زمرة جزئية في G ولنبرهن

$$\forall a\in G \ ; a.Z(G).a^{-1}\subseteq Z(G)$$

ليكن $y\in a.Z(G).a^{-1}$ عندئذ يوجد $b\in Z(G)$ بحيث:

$$y=a.b.a^{-1}\Rightarrow b.a.a^{-1}=b\in Z(G)$$

$$\Rightarrow a.Z(G).a^{-1}\subseteq Z(G)$$

دراسة خواص الزمرة الناظمية:

مبرهنة: لتكن G زمرة فإن القضايا التالية صحيحة :

١) تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G هو زمرة جزئية ناظمية في G .
٢) لتكن H,k زمرة جزئية في G بحيث $H\subseteq k$ إذا كانت H ناظمية في G عندئذ H تكون ناظمية في K .
٣) اذا كانت H زمرة جزئية في G وتحقق $(G:H)=2$ عندئذ تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

الاثبات :

١) لتكن $\{H_i\}_{i\in I}$ ((حيث I مجموعة ما و قابلة للعد)) أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G ولنفرض ان $D=\cap_{i\in I}H_i$ وجدنا سابقاً ان D زمرة جزئية في G لنبرهن على انها ناظمية في G

$$\forall a\in G \ , \quad a.D.a^{-1}\subseteq D$$

ليكن $y\in a.D.a^{-1}$ حيث $a\in G$ عندئذٍ: $d\in D=\cap_{i\in I}H_i$: $y=a.d.a^{-1}$

ومنه $\forall i\in I\ ; d\in H_i$ ولما كانت H_i ناظمية في G فإن العنصر

$$\forall i\in I \ : \ y=a.d.a^{-1}\in a.H_ia^{-1}\subseteq H_i$$

نجد ان D ناظمية في G $\quad y\in\cap_{i\in I}H_i=D$

٢) لنفرض ان $H \subseteq K$ وان H ناظمية في G عندئذٍ: $\forall a \in G\ ; a.H.a^{-1} \subseteq H$

لنثبت ان H ناظمية في K $\forall k \in K\ ; k \in G\ ,\ k.H.k^{-1} \subseteq H$

وهذا يبين ان H ناظمية في K

٣) لتكن H زمرة جزئية في G ولنفرض أن $(G:H) = 2$ أي أن الدليل "2" يدل على عدد المرافقات وبالتالي يوجد مرافقتين للزمرة H فقط هما H و aH مولدة بعنصر مختلف عن المحايد أي أن $a \in G\ , a \neq e$ أي :

$\{eH, aH\}$ المرافقتين اليساريتين الوحيدتين في G

والمرافقات تشكل تجزئة : $e \neq a \in G$

$$\Rightarrow G = H \cup a.H$$
$$\Rightarrow aH = G \backslash H$$

وايضاً لدينا

$$G = H \cup H.a$$
$$\Rightarrow H.a = G \backslash H$$

عندئذٍ H ناظمية في G $\Rightarrow a.H = H.a$

مبرهنة. لتكن G زمرة و A, B زمر جزئية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الجداء $A.B$ هو زمرة جزئية في G .

٢) $A.B =< A \cup B >$

٣) $A.B = B.A$ ($A.B$ زمرة مولدة بالاجتماع و A و B تبديلي)

((التبديلية لجداء المجموعات و ليس لجداء العناصر))

الاثبات :

((1 ← 2)) لنفرض أن الجداء $A.B$ زمرة جزئية في G وليكن $a \in A \cup B$ عندئذ :

١- اذا كان $a \in A$ فإن $a = a.e \in A.B$

٢- اذا كان $b \in B$ فإن $a = e.a \in A.B$

في كل الأحوال العنصر a موجود في الجداء $A.B$

$$\Rightarrow A \cup B \subseteq A.B$$
$$A \cup B \subseteq < A \cup B >$$
$$\Rightarrow < A \cup B > \subseteq A.B$$

ليكن $y = a.b\ ,\ y \in A.B$

حيث $a \in A\ ,\ b \in B$ ومنه: $a, b \in A \cup B \subseteq < A \cup B >$

(زمرة مغلقة اذا حوّت عنصرين تحوي جداءهما)

$$y = a.b \in < A \cup B >$$
$$\Rightarrow A.B \subseteq < A \cup B >$$

من الاحتوائين نجد $\Rightarrow A.B =< A \cup B >$

Syria Math Team

((2 ⟵ 3)) لنفرض أن $A.B = < A \cup B >$ عندئذٍ $A.B$ زمرة جزئية في G

ليكن $x \in A.B$ عندئذٍ $x^{-1} \in A.B$ وبالتالي حسب تعريف الجداء:

$$x^{-1} = a.b : a \in A \ , b \in B$$

$$, x = (x^{-1})^{-1} = (a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1} \in B.A$$

$$\Rightarrow A.B \subseteq B.A$$

ملاحظة: بما ان $A.B = < A \cup B >$ فهذا يعني ان $A.B$ زمرة ولكن $B.A$ ليست بالضرورة زمرة بل مجموعة.

لنثبت الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in B.A$ عندئذ $y = b_1.a_1$ حيث $a_1 \epsilon A$, $b_1 \epsilon B$ ومنه

$$a_1, b_1 \epsilon A \cup B \subseteq < A \cup B >= A.B$$

ومنه فإن $y = b_1.a_1 \in A.B$ وبالتالي $B.A \subseteq A.B$

ومن الاحتواءين نجد : $A.B = B.A$.

((1 ← 3)) لنفرض ان $A.B = B.A$ نبرهن أن $A.B$ زمرة جزئية في G

بما أن A, B ليستا خاليتين فالجداء ليس خالي $e = \overset{\epsilon A}{e} . \overset{\epsilon B}{e} \ \epsilon A.B$

$$\Rightarrow \emptyset \neq A.B \in G$$

ليكن $x, y \epsilon A.B$ حيث :

$$x = a_0.b_0$$
$$y = a_2.b_2$$

حيث : $A \epsilon \ a_2 \ , a_0$ و $b_0, b_2 \epsilon B$

ومنه فإن $x.y^{-1} = a_0.b_0 \ (a_2.b_2)^{-1} = a_0.\underbrace{(b_0.b_2{}^{-1}a_2{}^{-1})}_{\epsilon B} = a_0(b_0.b_2^{-1})a_2^{-1}$

لنأخذ $b_0.b_2{}^{-1}.a_2{}^{-1} \in B.A = A.B$ نفرض للسهولة: $(b_0.b_2{}^{-1})a_2{}^{-1} = a_3.b_3$ حيث $a_3 \epsilon A$ و $b_3 \epsilon B$

$$\Rightarrow x.y^{-1} = a_0.a_3.b_3 \in A.B$$

وهذا يبين أن $A.B$ زمرة جزئية في G .

Syria Math Team

مبرهنة. لتكن G زمرة و A, B زمر جزئية في G إذا كانت B ناظمية في G عندئذ :

١) $A.B$ زمرة جزئية في G
٢) $A.B =< A \cup B >$
٣) $A.B = B.A$

الاثبات :

١) لنفرض ان الزمرة الجزئية B ناظمية في G : $e = e.e \in A.B$

$$\Rightarrow \emptyset \neq A.B \subseteq G$$

ليكن $x, y \in A.B$ عندئذٍ:

$$x = a.b \quad ; \quad a, a_1 \in A$$
$$y = a_1.b_1 \quad ; \quad b, b_1 \in A$$

ومنه $x.y^{-1} = a.b(a_1.b_1)^{-1} = a.b.b_1{}^{-1}.a_1{}^{-1}$

$$= \underbrace{a.a_1^{-1}}_{\in A}.\underbrace{a_1(b.b_1^{-1})a^{-1}}_{\in B} \in A.B$$

ومنه فإن $A.B$ زمرة جزئية في G .

(٢) و(٣) ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة ومن اعتماداً على (١).

تمهيدية. لتكن G زمرة و A, B زمر جزئية ناظمية في G عندئذٍ $A.B$ زمرة جزئية ناظمية في G .

البرهان:

بما ان B ناظمية في G فإن $A.B$ زمرة جزئية في G ولنبرهن على ان

$$\forall\, g \in G \quad ; \quad g.(A.B).g^{-1} \subseteq A.B$$

ليكن $x \in g.(A.B).g^{-1}$ عندئذ : $x = g(a.b)g^{-1}$ حيث $a \in A\,,\ b \in B$

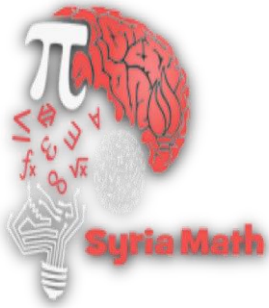
$$\Rightarrow x = g(a.b)g^{-1} = \underbrace{(g.a.g^{-1})}_{\in A}.\underbrace{(g.b.g^{-1})}_{\in B}$$

$$\Rightarrow x \in A.B$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team



نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الثانية عشر ◄ عنوان المحاضرة: زمرة الخارج

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-زمرة الخارج .

٢- مبرهنتان عن زمرة الخارج وأمثلة.

٣- نتعرّف على الزمر الجزئية في زمرة الخارج.

تمهيدية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G إن المجموعة :

$$G/H = \{aH \quad : \quad a \in G \}$$

تشكل زمرة بالنسبة للعملية الضربية(.) والمعرفة بالشكل:

$$\forall aH, bH \in \frac{G}{H}; (aH).(bH) = (a.b)H$$

إن العنصر المحايد فيها هو H .وإن مقلوب العنصر aH هو $(aH)^{-1} = a^{-1}H$

البرهان:

ان $\frac{G}{H}$ هي مجموعة غير خالية وان $H = eH \in G/H \Leftarrow e \in G$

- إثبات العملية التجميعية:

$$\forall aH, bH, dH \in G/H \; ; [(aH).(bH)]dH$$

$$= (a.b)H.dH = \big((a.b).d\big)H = \big(a.(b.d)\big)H$$

$$aH.(b.d)H = aH[(bH)(dH)]$$

*إثبات أن H هو المحايد: $\forall aH \in \frac{G}{H}, a \in G; (aH).H = (aH)(e.H) = (a.e)H = aH$

Syria Math Team

* **إثبات المقلوب:** ليكن $aH \in \frac{G}{H}$ عندئذٍ $a \in G$ ومنه $a^{-1} \in G$ وبالتالي $a^{-1}H \in \frac{G}{H}$ فإن:

$$(aH)(a^{-1}H) = (a.a^{-1})H = eH = H \Rightarrow (aH)^{-1} = a^{-1}H$$

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G نسمي الزمرة $\frac{G}{H}$ بزمرة الخارج للزمرة G وفق H

$$\frac{G}{< e >} = G \ , \qquad \frac{G}{G} =< e >$$

مثال: (زمرة تجميعية)

في زمرة الاعداد الصحيحة Z_{18} بالمقاس 18 $\quad Z_{18} = \{0,1,2,3,4, \dots \dots \dots ,17\}$

إن3 تقسم 18 ومنه$< \frac{18}{3} >$ زمرة جزئية في Z_{18} :

$$H =< \frac{18}{3} > = < 6 > =< 0 ,6, 12 > \qquad (\text{مضاعفات 6في } Z)$$

ان H زمرة جزئية ناظمية في Z_{18} لان Z_{18} تبديلية.

ان زمرة الخارج : $\frac{Z_{18}}{H} = \{a + H : a \in Z_{18}\}$

$$H = 0 + H = \{0,6,12 \} = 6 + H = 12 + H$$

$$1 + H = \{1,7,13\}$$

$$2 + H = \{2,8,14\}$$

$$3 + H = \{3,9,15\}$$

$$4 + H = \{4,10,16\}$$

$$5 + H = \{5,11,17\}$$

$$6 + H = H$$

$$7 + H = (1 + 6) + H = (1 + H) + (6 + H) = 1 + H + H = 1 + H$$

$$8 + H = (2 + 6) + H = (2 + H) + (6 + H) = 2 + H + H = 2 + H$$

وهكذا حتى 18...

Syria Math Team

$$\Rightarrow \frac{Z_{18}}{3} = \{H\ ,1+H\ ,2+H\ ,3+H\ ,4+H\ ,5+H\}$$

لنشكل الجدول التالي:

$\oplus$	H	$1+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$	$5+H$
H	H	$1+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$	$5+H$
$1+H$	$1+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$	$5+H$	H
$2+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$	$5+H$	H	$1+H$
$3+H$	$3+H$	$4+H$	$5+H$	H	$1+H$	$2+H$
$4+H$	$4+H$	$5+H$	H	$1+H$	$2+H$	$3+H$
$5+H$	$5+H$	H	$1+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$

من الجدول نجد ان نظير $1+H$ هو $5+H$

نظير $2+H$ هو $4+H$

او **من خلال القانون** : ان نظير $2+H$ هو $-(2+H) = -2+H$

$$16-H = 4+H \text{ و } 18-2 = 16$$

٢) **زمرة ضربية: زمرة أولر** : $G = \mathrm{U}_{(20)}$

$$G = \{1,3,7,9,11,13,17,19\}$$

$$H =< 3 > = \{1,3,9,7\}$$

ان H زمرة جزئية ناظمية في G لان G تبديلية. لها 8 مرافقات في G (عدد العناصر).

نحسب المرافقات المختلفة عن طريق لاغرانج.

$$(G:H) = \frac{(G:H)}{(H:1)} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \text{(لها مرافقان)}$$

$$H = 3H = 9H = 7H$$

$$11H = \{11,13,19,17\}$$

$$\frac{G}{H} = \{H, 11H\}$$

Syria Math Team

$\odot$	H	$11H$
H	H	$11H$
$11H$	$11H$	H

مثال: لنأخذ في زمرة الاعداد الصحيحة Z الزمرة الجزئية:

$$H = 4Z = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12 \dots\}$$

ان H زمرة جزئية ناظمية في Z.

$$0 + 4Z = 4Z$$

$$1 + 4Z = \{\dots -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13 \dots\}$$

$$2 + 4Z = \{\dots -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14 \dots\}$$

$$3 + 4Z = \{\dots -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15 \dots\}$$

$$4 + 4Z = \{\dots -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12 \dots\} = 4Z$$

$$5 + 4Z = (1 + 4) + 4Z = (1 + 4Z) + (4 + 4Z) = 1 + 4Z$$

$$\frac{Z}{4Z} = \{4Z, 1 + 4Z, 2 + 4Z, 3 + 4Z\}$$

$\oplus$	$4Z$	$1 + 4Z$	$2 + 4Z$	$3 + 4Z$
$4Z$	$4Z$	$1 + 4Z$	$2 + 4Z$	$3 + 4Z$
$1 + 4Z$	$1 + 4Z$	$2 + 4Z$	$3 + 4Z$	$4Z$
$2 + 4Z$	$2 + 4Z$	$3 + 4Z$	$4Z$	$1 + 4Z$
$3 + 4Z$	$3 + 4Z$	$4Z$	$1 + 4Z$	$2 + 4Z$

مبرهنة: لتكن G زمرة اذا كانت زمرة الخارج $G/Z(G)$ دوارة عندئذ تكون الزمرة G تبديلية .

الاثبات :

لنفرض أن زمرة الخارج دوارة عندئذ(حسب التعريف) يوجد عنصر من عناصرها يولّد هذه الزمرة.

$$G/Z(G) =< g.Z(G) > \quad \forall\, g \in G$$

ليكن $x, y \in G$ عندئذٍ:

$$x.Z(G) \in \frac{G}{Z(G)} \Rightarrow \exists n \in Z$$

حسب الضرب في زمرة الخارج $\Longrightarrow x \in x.Z(G) = (g.Z(G))^n = g^n.Z(G)$

$$y.Z(G) \in G/Z(G) \Rightarrow \exists m \in Z$$

$y \in y.Z(G) = (g.Z(G))^m = g^m.Z(G) \Longrightarrow$ حسب الضرب في زمرة الخارج

يوجد $a,b \in Z(G)$ حيث $y = g^m.b$ و $x = g^n.a$

$$\Rightarrow x.y = g^n.\underbrace{(a.g^m)}_{\text{تبديلي}}.b = g^n.g^m.a.b = ag^m.g^nb = (g^m.a.g^n)b$$

$$= b.g^m.a.g^n$$

$$= (g^m b)(g^n a) = y.x$$

وبالتالي الزمرة G تبديلية.

مبرهنة : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G كل زمرة جزئية $\bar{k}$ في زمرة الخارج $\frac{G}{H}$ هي من الشكل k/H حيث k زمرة جزئية في G تحوي H .

الاثبات :

لتكن $\bar{k}$ زمرة جزئية في الزمرة G/H ولنعّرف المجموعة :

$$k = \{a : a \in G \quad , \quad aH \in \bar{k}\}$$

محايد الزمرة G

إن $\emptyset \neq k \subseteq G$ لأن : $H = H \in \bar{k} \Rightarrow e \in k$.

ليكن $a,b \in k$ عندئذ: $a,b \in G$ وإن: $aH, bH \in \bar{k}$ فإن:

$$(ab^{-1})H = (aH)(b^{-1}H)$$

$$= (aH)(bH)^{-1} \in \bar{k}$$

وحسب تعريف k نجد ان $a.b^{-1} \in k$ ومنه k زمرة جزئية في G وتحوي H لأنه:

$$\forall h \in H \; ; hH = H \in \bar{k} \Rightarrow h \in k \Rightarrow H \subseteq k$$

ولما كانت H ناظمية في G فإن H ناظمية في k.

وحسب التعريف إن $\frac{H}{k}$ زمرة.

لنبرهن أن $\bar{k} = k/H$:

ليكن $\bar{x} \in \bar{x} \subseteq G/H$ عندئذٍ:

$$\bar{x} = gH : g \in G$$

وحسب التعريف k لما كان $\bar{x} \in \bar{k} \Leftarrow g \in K$

$$\Rightarrow \bar{x} = gH \in \frac{k}{H} \Rightarrow \bar{k} \subseteq \frac{k}{H}$$

لنثبت الاحتواء المعاكس: ليكن $\bar{y} \in k/H$ عندئذٍ : $\bar{y} = y.H : y \in k \subseteq G$

وبما أن $\bar{y} = y.H \in G/H$ $\Leftarrow$ $y \in k$ $\bar{y} \in \bar{k}$

وبالتالي $\bar{k} \Leftarrow k/H \subseteq \bar{k}$ $\frac{k}{H} = \bar{k}$

تنويه: في المحاضرة الثامنة هرب منا خطأ بسيط في الصفحة الخامسة السطر الثاني والثالث

الخطأ : $aH = bH$ **الصح:** $aH = Hb$

الخطأ : لأن $aH = bH$ **الصح:** $aH = Hb$

انتهت المحاضرة

لولا وجود عكس المعنى لما وجد للمعنى معنى ...
لولا وجود الحزن لما وجد للفرح معنى ...
لولا وجود الفشل لما وجد للنجاح معنى ...

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team

14-11-2017

نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثالثة عشر ◄ عنوان المحاضرة : التشاكلات الزمرية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ التشاكلات الزمرية وخواصها.

٢ـ تأثيرها على العناصر ،وعلى الزمر في المنطلق والمستقر.

٣ـ تأثيرها على الزمر الناظمية.

تعريف :

ليكن G' و G زمرتين و $f : G \to G'$ تطبيق.

نقول ان f تشاكل زمري إذا حقق الشرط :

$$\forall\, a, b \in G \;:\; f\left(a \underset{\text{معرف على}(.,G)}{\text{نب}} b\right) = f(a) \underset{\text{معرف على}(.,G')}{\text{نب}} f(b)$$

تعريف :

ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري نسمي المجموعة :

$$\ker(f) = \{a : \; a \in G \;\; ; \; f(a) = e'\}$$

نواة التشاكل f حيث e' حيادي الزمرة G' .

دراسة خواص التشاكلات الزمرية:

تمهيدية: ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري عندئذ :

١) $f(e) = e'$

Syria Math Team

٢) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ فإن $\forall\, a \in G$

٣) $f(a^n) = [f(a))]^n$; $a \in G$, $\forall\, n \in Z$

٤) $\ker(f)$ تشكل زمرة جزئية ناظمية في G.

البرهان :

١) ليكن $e.e = e \Rightarrow f(e.e) = f(e)$

$$\Rightarrow f(e).f(e) = f(e)$$

نضرب بمقلوب $f(e)$: $f(e) = e'$

٢) عندئذ: $\forall\, a \in G$

فإن : $a.a^{-1} = e \Longrightarrow f(a.a^{-1}) = f(e) = e'$

$$f(a).f(a^{-1}) = e'$$

نضرب بمقلوب $f(a)$ نجد :

$$f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$$

٣) ليكن $a \in G$ و $n \in Z$ عندئذٍ:

$$f(a^n) = f\left(a.\underbrace{a \dots a}_{n\text{مرة}}\right) = f(a).f(a)\underbrace{\dots f(a)}_{n\text{مرة}} = \big(f(a)\big)^n$$

٤) بما ان $e \in \ker(f)$ و $f(e) = e'$ فإن $\ker(f) \neq \emptyset$

لنبرهن أنها زمرة جزئية أي :

$$a.b^{-1} \in \ker(f)$$

ليكن $a, b \in \ker(f)$ عندئذ $f(a.b^{-1}) = f(a).f(b^{-1})$

$$= f(a).f\big((b)\big)^{-1} = e'.(e')^{-1} = e'$$

ومنه $a.b^{-1} \in \ker(f)$ وبالتالي $\ker(f) \subseteq G$.

لنبرهن أنها ناظمية :

أي $\forall a \in G; a.\ker(f)\, a^{-1} \subseteq \ker(f)$

ليكن $x \in a.ker(f)a^{-1}$ عندئذٍ يوجد $b \in \ker(f)$ حيث $x = a.b.a^{-1} \Rightarrow f(x) = f(a.b.a^{-1})$

Syria Math Team

$$= f(a).f(b).f(a^{-1}) = f(a).\underbrace{e'}_{\text{لانها من النواة}}.f(a)^{-1} = e'$$

ومنه $x \in \ker(f)$ وبالتالي $aker(f)a^{-1} \subseteq \ker(f)$ أي $\ker(f)$ زمرة جزئية ناظمية في G.

تمهيدية : لتكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري ولتكن H زمرة جزئية في G عندئذ :

١) $f(H)$ زمرة جزئية في G' .
٢) إذا كانت H دوارة في G فإن $f(H)$ دوارة في G' .
٣) إذا كانت H تبديلية في G فإن $f(H)$ تبديلية في G' .
٤) إذا كانت H ناظمية في G فإن $f(H)$ ناظمية في $Im(f) = f(G)$.(صورة مباشرة)

البرهان :

١) لنعرف المجموعة:

$f(H) = \{f(h) : \forall\ h \epsilon H\ \}$ إن $e \in H$ وبالتالي:

$$e' = f(e) \in f(H)$$

فإن $f(H) \neq \emptyset$

لنثبت أنها زمرة جزئية في المستقر G' :

ليكن $x, y \in f(H)$ عندئذٍ يوجد $a, b \in H$ حيث $y = f(b)$ و $x = f(a)$

$$x.y^{-1} = f(a).\left(f(b)\right)^{-1} = f(a).f(b^{-1})$$

$$= f\left(\underbrace{a.b^{-1}}_{\epsilon H}\right)\ \epsilon\ f(H)$$

$$\Longrightarrow f(H) \text{ زمرة جزئية في } G'$$

٢) لنفرض ان $H =< a >$ حيث $a \in H$ ولنبرهن ان $f(H) =< f(a) >$

لدينا $a \in H \Rightarrow f(a) \in f(H)$ و $f(a) \in < f(a) >$

$$\Rightarrow < f(a) > \subseteq f(H)$$

لنثبت الاحتواء المعاكس: ليكن $y \in f(H)$ عندئذٍ يوجد $h \in H$ بحيث

$y = f(h)$ وان $h = a^n$ حيث $n \in Z$ ومنه:

$$y = f(h) = f(a^n) = \big(f(a)\big)^n \in < f(a) >$$

طالما $\big(f(a)\big)^n$ قوة فهي تنتمي للزمرة المولدة بالعنصر $f(a)$

$$\Rightarrow f(H) \subseteq < f(a) >$$

من الاحتوائين $f(H) = < f(a) >$

٣) بما أن H تبديلية $\forall\, x, y \in H \;:\; x.y = y.x$

$$\exists\;\; a\;, b\;\in f(H)$$

حيث : $b \in f(H)$ ومنه $b = f(h)$ و $f(x) = a$

ولأن f تشاكل .

$$f(x).f(y) = f(x.y)$$

ولأن H تبديلية :

$$f(x).f(y) = f(x.y) = f(y.x) = f(y).f(x)$$

ومنه فإن $f(H)$ تبديلية.

٤) لنفرض أن H ناظمية في G .

لدينا حسب (١) ان $Im(f)$ زمرة جزئية في G'

وليكن $y \in Im(f)$ لنبرهن ان $y.f(H)y^{-1} \subseteq f(H)$

ان $y = f(g) \;:\; g \in G$

وليكن $x \in yf(H)y^{-1}$ عندئذٍ : $x = y.b.y^{-1}$ حيث $b = f(h)$ و $h \in H$

ومنه: $x = f(g).f(h).\big(f(g)\big)^{-1} = f(g).f(h).f(g^{-1}) = f(g.h.g^{-1}) \in f(H)$

وهذا يبين ان $f(H)$ ناظمية في $f(G) = Im(f)$.

مبرهنة : ليكن $f : G \to G'$ تشاكلا زمريا ولتكن K زمرة جزئية في G' عندئذ :

١) $f^{-1}(k)$ زمرة جزئية في G

٢) إذا كانت k ناظمية في G' فإن $f^{-1}(k)$ ناظمية في G .

٣) f متباين $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$.

البرهان:

Syria Math Team

١) لنعرف المجموعة: $f^{-1}(k)=\{a: a\in G\ , f(a)\in k\}$

ان $f^{-1}(k)\neq\emptyset$ لأن: $f(e)=e'\in k \quad \Rightarrow e\in f^{-1}(k)$

لنبرهن انها جزئية: ليكن $x,y\in f^{-1}(k)$ عندئذٍ فإن :

$$f(x),f(y)\ \in k : x,y\in G\ \Rightarrow x.y^{-1}\in G$$

ويحقق: $f(x.y^{-1})=f(x).f(y^{-1})=f(x).\left(f(y)\right)^{-1}\in K$

وهذا يبين أن $x.y^{-1}\in f^{-1}(k)$ ومنه $f^{-1}(k)$ زمرة جزئية في G .

٢) لنفرض ان k ناظمية في G' ولنبرهن أن:

$$\forall g\in G\ ; g.f^{-1}(k).g^{-1}\subseteq f(k)$$

ليكن $x\in g.f^{-1}(k).g^{-1}$ فإنه يوجد $y\in f^{-1}(k)$

حيث $x=g.y.g^{-1}\in G\ ,\ f(g).f(y).\left(f(g)\right)^{-1}\in K$ وإن :

$$f(x)=f(g.y.g^{-1})=f(g).f(y).f(g^{-1})=f\underbrace{(g)}_{\in G'}.f\underbrace{(y)}_{\in k}.\left(f(g)\right)^{-1}$$

طالما k ناظمية في G' وهذا يبين ان:

$$f(x)\in k\ \Rightarrow x\in f^{-1}(k)$$

وبالتالي الزمرة الجزئية $f^{-1}(k)$ ناظمية في G.

٣) " $\Leftarrow$ " لنفرض ان f متباين ليكن $a\in \ker(f)$ عندئذٍ : $a\in G$

$$f(a)=e'=f(e)\ \overset{f\ \text{متباين}}{\Rightarrow}\ a=e$$

ومنه كل عنصر في النواة هو المحايد $\Leftarrow \ker(f)=\{e\}$

" $\Rightarrow$ " لنفرض ان $\ker(f)=\{e\}$ ليكن $a,b\in G$ بحيث $f(a)=f(b)$

ولنثبت ان $a=b$ نضرب بمقلوب $f(b)$

$$f(a).\left(f(b)\right)^{-1}=e'\ \Rightarrow f(a).f(b^{-1})=e'\ \Rightarrow f(\underbrace{a.b^{-1}}_{\in G})=e'$$

$$\Rightarrow a.b^{-1}\in \ker(f)=\{e\}$$

$$\Rightarrow a.b^{-1}=e\Rightarrow a=b$$

$\Rightarrow$ f متباين

تمهيدية: لتكن G زمرة عندئذ كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر .

الاثبات :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G عندئذ G/H زمرة، ولنعرف العلاقة:

Syria Math Team

$$\pi : G \to \frac{G}{H}$$

$$\forall\, a \in G \;:\; \pi(a) = aH$$

إن π تطبيق لأنه إذا كان $\forall\ a,b \in G \quad , \quad a = b \;;\; \pi(a) = aH = bH = \pi(b)$

و π تشاكل لأنه حسب تعريف الجداء لزمرة الخارج: $\pi(a.\mathrm{b}) = (a.b)H = (aH).(bH)$

$$= \pi(a).\pi(b)$$

ليكن $d.H \in G/H$ عندئذ $\mathrm{d} \in G$

ومنه : $\pi(d) = d.H$ أي ان π غامر.

ولنبرهن أن $\ker\pi = H$: ليكن $x \in \ker\pi$ عندئذ:

$\pi(x) = x.H = H$(المحايد) حيث $x \in G$

$$\Rightarrow x \in H \Rightarrow \ker(\pi) \subseteq H$$

وليكن $y \in H$ عندئذٍ: $\pi(y) = yH = H$

$$\Rightarrow y \in \ker(\pi)$$

$$\Rightarrow H \subseteq \ker(\pi) \Rightarrow H = \ker(\pi)$$

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G نسمي التشاكل

$$\pi: \mathrm{G} \longrightarrow \frac{G}{H}$$

المعرف بالشكل : $a \in G \;:\; \pi(a) = aH$

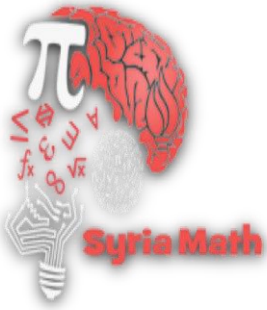
بالتشاكل القانوني الغامر.

((كل ثانية يوضع امامك اختيار بسيط قد يجعل حياتك كلها مختلفة..

وكل ثانية تختار أن تؤجل القرار خوفاً فتبقى كما أنت، فلا تؤجل بعد الآن(;))

انتهت المحاضرة إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هج

Syria Math Team



◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الرابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: التشاكلات الزمرية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعريف التماثل.

٢ـ مبرهنات التماثل.

٣ـ أحد اهم تطبيقات التماثل (مبرهنة)

تعريف: ليكن $f: G \longrightarrow G'$

تشاكل زمري ،نقول ان f تماثل اذا كان متباين و غامر .

- في هذه الحالة نقول ان الزمرتين G و G' متماثلتين. ونرمز لذلك $G \cong G'$

ملاحظة: لتكن G و G' زمرتين و $f: G \longrightarrow G'$ تشاكل. $((homomorphism))$

- إذا كان f متباين نسمي f مونومورفيزم $((monomorphism))$
- إذا كان f غامر نسمي f ايبومورفيزم $((epomorphism))$
- إذا كان f تقابل (تماثل) نسمي f ايسومونفيزم $((Isomonphism))$
- إذا كان $G = G'$ نسمي f إندومورفيزم $((endomorphism))$
- إذا كان f تقابل و $G = G'$ نسمي f أتومورفيزم $((Automorphism))$ ((تماثل ذاتي))

مبرهنات التماثل :

- مبرهنة التماثل الأولى:

ليكن $f: G \to G'$ تشاكلاً زمرياً عندئذ :

١) $G/\ker(f) \cong Im\,(f) = f(G)$

Syria Math Team

٢) إذا كان f غامر فإن : G' $\tilde{=}$ $G/\ker(f)$.

الاثبات :

(لنثبت ان هناك تطبيق من $\varphi: G/ker(f) \cong G'$)

١) اذا كانت $\ker f$ زمرة جزئية ناظمية في G فإن زمرة الخارج $G/\ker f$ معرفة .
لنعرف العلاقة

$$\varphi : \frac{G}{\ker f} \to Im(f)$$

بالشكل الاتي :

$$\forall\, x.\ker(f)\, \epsilon\, G/\ker f : x \in G$$

$$\Rightarrow \varphi\,(x.ker(f)\,) = f(x) \in f(G)$$

ليكن :

$$x.ker(f)\ \ , y.ker(f) \epsilon\, G/\ker f \ \ :\ \ x.ker(f) = y.ker(f)$$

عندئذٍ: $x, y \in G$ نضرب بمقلوب احدى العنصرين وليكن $y.ker(f)$

$$\Rightarrow (x.\ker(f)).(y.\ker(f))^{-1} = \ker(f)$$

$$(x.\ker(f)).(y^{-1}.\ker(f)) = \ker(f)$$

$$\Rightarrow x.\ker(f).y^{-1}.\ker(f) = \ker(f)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x.y^{-1})}_{\in G}\ker(f) = \ker(f)$$

$$\Rightarrow x.y^{-1} \in \ker(f)$$

$$f(x.y^{-1}) = e'$$

$$f(x).f(y^{-1}) = e'$$

$$f(x).\big(f(y)\big)^{-1} = e'$$

$$f(x) = f(y)$$

Syria Math Team

$$\varphi \text{ حسب تعريف } \Rightarrow \varphi(x.\ker(f)) = \varphi(y.\ker(f))$$

اذا φ تطبيق. وكذلك φ تشاكل لأن:

$$\varphi(x.\ker(f)).(y.\ker(f)) = \varphi\big((x.y).\ker(f)\big) = f(x.y)$$

$$= f(x).f(y) = \varphi(x.\ker(f)).\varphi(y.\ker(f))$$

ان φ متباين لانه اذا كان : $\varphi(x.\ker(f)) = \varphi(y.\ker(f))$

$$\Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow f(x).\big(f(y)\big)^{-1} = e'$$

$$f(x).f(y^{-1}) = e'$$

$$f\left(\underbrace{x.y^{-1}}_{\in G}\right) = e'$$

$$\Rightarrow x.y^{-1} \in \ker(f)$$

ومنه يوجد $t \in \ker(f)$ بحيث $t = x.y^{-1}$

$$x = t.y \in \ker(f).y = y.\ker(f)$$

مرافقة يمينية نفسها يسارية لأنها ناظمية.

$$\Rightarrow x \in x.\ker(f)$$

ومنه $$x.\ker(f) = y.\ker(f)$$

ومنه φ متباين. وكذلك φ غامر لان:

ليكن $Z \in Im(f) = f(G)$ عندئذٍ يوجد $g \in G$ بحيث $Z = f(g)$ و $g.\ker(f) \in G/\ker(f)$

فإن $\varphi(g.ker(f)) = f(g) = Z$ مما سبق نجد ان φ تماثل ومنه :

$$G/\ker(f) \cong Im(f)$$

٢) لنفرض ان f غامر عندئذٍ $Im(f) = G'$ وحسب (١) نجد ان $G/\ker(f) \cong G'$

Syria Math Team

مبرهنة التماثل الثانية :

لتكن G زمرة و k, H زمر جزئية في G إذا كانت k ناظمية في G عندئذ فإن :

$$\frac{k.H}{k} = \frac{H.k}{k} = \frac{< k \cup H >}{k} \cong \frac{H}{H \cap k}$$

زمرة تبديلية مولّدة بأجتماع وتحوي k .

البرهان:

لنعرف العلاقة : $\varphi : H \to \frac{H.K}{k}$ بالشكل :

$$\forall\, h \in H \quad ; \quad \varphi(h) = h.k \in k.H/k$$

φ تطبيق لأن : $\forall h_1, h_2 \in H \quad : h_1 = h_2 \,; h_1 k = h_2 k$

$$\Rightarrow \varphi(h_1) = \varphi(h_2)$$

φ تشاكل لأن : $\varphi(h_1.h_2) = (h_1.h_2)k = (h_1.k).(h_2.k) = \varphi(h_1).\varphi(h_2)$

و φ غامر لأن: $\forall z \in \frac{kH}{k}; z = g.k \quad : g \in kH$

ومنه يوجد $k \in K$ و $h \in H$ حيث $g = k.h$

$$\Rightarrow Z = g.k = (k.h)K = (k.K)(h.k) = K(h.K) = h.k : h \in H \Rightarrow \varphi(h)$$

$$= h.k = Z$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى : $\frac{H}{\ker(\varphi)} \cong k.H/k$

- لنبرهن على ان $\ker(\varphi) = k \cap H$

ليكن $a \in \ker(\varphi)$ عندئذٍ $a \in H$ وإن: $\{\varphi(a) = k \Leftarrow a.k = k \Leftarrow a \in k$

$$a \in H \cap k \Leftarrow \ker(\varphi) \subseteq H \cap k \Leftarrow$$

ليكن $b \in H \cap k$ عندئذٍ $b \in H$ وان $b \in k$ وبالتالي: $\varphi(b) = b.k = k \Rightarrow b \in \ker(\varphi)$

$$\Rightarrow H \cap k \subseteq \ker(\varphi)$$

Syria Math Team

ومن الاحتوائين نجد ان: $\ker\varphi = H \cap k$ ومنه نجد : $\frac{k.H}{H} \cong \frac{H}{H\cap K}$.

مبرهنة التماثل الثالثة :

لتكن G زمرة و k, H زمرة جزئية ناظمية في G بحيث $k \subseteq H$ عندئذ :

$$\frac{G/k}{H/k} \cong G/H$$

البرهان:

لنعرف العلاقة : $\varphi: G/k \longrightarrow G/H$ بالشكل: حيث $h \in H \subseteq k.H$

$$\forall g.k \in \frac{G}{k}; \varphi(g.k) = g.H \in G/H$$

ان φ تطبيق لأن: $\forall g_1k, g_2k \in G/k$

بحيث $g_1k = g_2k$

$$(g_1k).(g_2k)^{-1} = k$$

$$(g_1k).(g_2^{-1}k) = k$$

$$(g_1.g_2^{-1})k = k \Rightarrow g_1.g_2^{-1} \in k \subseteq H$$

$$\Rightarrow (g_1.g_2^{-1})H = H$$ مولد مرافقة ل H

$$(g_1H)(g_2^{-1}H) = H$$

$$(g_1H)(g_2H)^{-1} = H$$

$$g_1H = g_2H$$

$$\varphi(g_1.k) = \varphi(g_2.k)$$

φ تشاكل لان:

$$\varphi((g_1.k)(g_2.k)) = \varphi((g_1.g_2)k)$$

$$= (g_1.g_2)H = (g_1.H)(g_2.H) = \varphi(g_1.k).\varphi(g_2.k)$$

Syria Math Team

φ غامر لأن: $\forall \bar{z} \in \frac{G}{H}; \bar{z} = zH : z \in G \Rightarrow zk \in G/k$

$$\varphi(zk) = zH = \bar{z}$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد أن : $(\frac{G}{k})/\ker(\varphi) \cong G/H$

- لنبرهن أن $\ker(\varphi) = H/k$

ليكن $\bar{x} \in \ker(\varphi)$ عندئذٍ $\bar{x} \in G/k$ ومنه $\bar{x} = x.k$ حيث $x \in G$ وان

$$\bar{x} = x.H \in H/k \Leftarrow x \in H \Leftarrow x = xH \Leftarrow \begin{cases} \varphi(x.k) = H \\ \varphi(x.k) = x.H \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker(\varphi) \subseteq H/k$$

- ليكن $d.k \in H/k$ عندئذٍ $d \in H$ وان محايدالمستقر $\varphi(d.k) = d.H = H$

$$\Rightarrow d.H \in \ker(\varphi) \Rightarrow H/k \subseteq \ker(\varphi)$$

من الاحتوائين نجد: $\frac{H}{k} = \ker(\varphi)$

ومنه نجد : $(\frac{G}{k})/(\frac{H}{k}) \cong \frac{G}{H}$.

سندرس واحدة من أهم تطبيقات مبرهنة التماثل الأولى وهي الحقيقة التالية.

حيث سندرس العلاقة بين الزمرتين nZ و Z_n من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة : ليكن $n > 1$ عدد صحيح عندئذ $\frac{Z}{nZ} \cong Z_n$

الإثبات :

لنعرف العلاقة :

$$\varphi : Z \to Z_n$$

بالشكل الاتي :

$$\forall\, x \in Z \;\; ; \;\; \varphi(x) = \underbrace{x \; mod - n}_{\text{باقي قسمة } x \text{ على } n} = r \in Z_n$$

لان $0 \leq r < n : x = qn + r$ أي أن r وحيدة وموجود في Z_n . وبالتالي

Syria Math Team

من الواضح أن φ تطبيق لأن: r تتعين بصورة وحيدة في مبرهنة خوارزمية القسمة.

وإن φ تشاكل لأنه إذا كان $x, y \in Z$ فإن :

$$\varphi(x+y) = (x+y)mod - n$$

$$= (x\ mod - n) + (y\ mod - n)$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y) \implies \varphi \text{ تشاكل}$$

إن φ غامر لأن :

$$\forall\ k \in Z_n \quad ; \quad k \in Z\ , 0 \le k < n$$

نأخذ الصورة المباشرة لـ k :

$$\Rightarrow \varphi(k) = k.mod - n = k$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن

$$\frac{Z}{\ker(\varphi)} \cong Z_n$$

حتى يتم المطلوب يجب ان نبرهن أن $\ker\varphi = nZ$

ليكن $x \in \ker\varphi$ عندئذ $x \in Z$

نأخذ الصورة المباشرة له : حيادي الجمع $\varphi(x) = 0$

$$\varphi(x) = x.mod - n \Rightarrow x.mod - n = \underbrace{0}_{\text{محايد}}$$

بما ان باقي قسمة x على n هي صفر. فإن x من مضاعفات n ومنه: $x = qn \in nZ \Rightarrow \ker(\varphi) \subseteq nZ$

ليكن $h \in nZ$ عندئذٍ $h = n.m$ حيث $m \in Z$ ومنه $h \in Z$ ومنه :

$$\varphi(h) = h.mod - \mathrm{n} = (n.m)mod - n = 0$$

$$\Rightarrow h \in ker(\varphi)$$

$$\Rightarrow nZ \subseteq ker(\varphi)$$

Syria Math Team

ومنه :

$$nZ = ker(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{nZ} \cong Z_n$$

ملاحظة: يمكن التعامل مع عناصر Z_n على انها صفوف تكافؤ..

تذكير: لأجل كل عدد صحيح توجد زمرتين :

١) $nZ = \{m.n : m \in Z\}$ أي مضاعفات n.

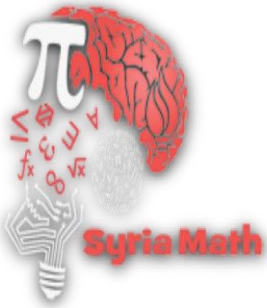
٢) $Z_n = \{0,1, \ldots, n-1\}$

انتهت المحاضرة

القوة لا تأتي من المقدرة الجسدية ، انما تأتي من الإرادة التي لا تُقهر..

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هبج

Syria Math Team



◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الخامسة عشر ◄ عنوان المحاضرة : التماثلات الزمرية

المحتوى العلمي : **أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :**

١ـ مبرهنات وأمثلة عن التماثلات الزمرية والتشاكل.

٢ـ سندخل في فصل جديد وهو زمرة التماثلات .

مبرهنة : القضايا التالية صحيحة.

١) كل زمرة دوارة وغير منتهية تماثل الزمرة الاعداد الصحيحة Z .
٢) جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة .

البرهان :

١) لتكن G زمرة دوارة غير منتهية عندئذ :

يوجد $a \in G$ حيث $G = < a >$

لنعرف العلاقة : $\varphi : Z \to G$ بالشكل :

$$\forall\, n \in Z \;;\; \varphi(n) = a^n$$

واضح ان العلاقة φ هي تطبيق متباين وغامر وهي ايضاً تشاكل لأنه لاجل كل $n, m \in Z$ فإن:

$$\varphi(n+m) = a^{n+m} = a^n . a^m = \varphi(n).\varphi(m)$$

فهو تماثل أي ان $Z \cong G$

٢) واضح بما ان جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية تماثل Z فهي أيضاً متماثلة.

مبرهنة :

١) كل زمرة دوارة ومنتهية ومرتبتها n تماثل الزمرة Z_n .
٢) جميع الزمر الدوارة المنتهية ذات المرتبة n متماثلة .

Syria Math Team

البرهان :

١) لتكن $G = < a >$ زمرة دوارة منتهية ومرتبتها n :
لنعرف العلاقة $\varphi : Z_n \to G$ بالشكل :

$$\forall\, m \in Z_n \quad ; \quad \varphi(m) = a^m$$

من الواضح أن φ تطبيق لان : $\forall m_1, m_2 \in Z_n \; : m_1 = m_2$

فإن : $\varphi(\mathrm{m}_1) = a^{m1} = a^{m2} = \varphi(m_2)$

وهو تشاكل لأن : $\forall\, m_1, m_2 \in Z_n;$

$$\varphi(m_1 + m_2) = a^{m_1+m_2} = a^{m_1}.a^{m_2} = \varphi(m_1).\varphi(m_2)$$

كما أن φ غامر لأن: $0 \le k < n \; : \forall y \in G; y = a^k$ ومنه $k \in Z_n$ ((المنطلق)) وبالتالي:

$$\varphi(k) = a^k = y$$

وايضاً φ متباين لان: $\forall s, t \in Z_n \; : \varphi(s) = \varphi(t); a^s = a^t$ ان

$s = t$ لانه لو فرضنا ان $s \neq t$ فإن $a^s \neq a^t$ وهذا غير ممكن ومنه φ تماثل.

٢) ينتج مباشرةً من (١).

أمثلة:

أي من هذه الزمر متماثلة : $Z_4 \;, U(10) \;, U(5)$

زمرة دوارة مرتبتها n $Z_4 = \{0,1,2,3\}$

زمرة دوارة مرتبتها n $U(10) = \{1,3,7,9\}$

زمرة دوارة مرتبتها n $U(5) = \{1,2,3,4\}$

$$3^0 = 1 \;\; , \;\; 3^1 = 3 \;\; , 3^2 = 9 \;\; , \;\; 3^3 = 7 \;\; , \;\; 3^4 = 1$$

اذاً نجد ان $U(5) \cong Zu \cong U(10)$

مثال ٢:

هل $U(10)$, $U(12)$ متماثلتين ؟ برهن!

Syria Math Team

زمرة دوارة مرتبتها 4 $U(10)=\{1,3,7,9\}=<3>$

$$U(12)=\{1,5,7,11\}$$

لنبحث فيما اذا كانت دوارة:

$5^0=1$ $7^0=1$ $11^0=1$

$5^1=5$ $7^1=7$ $11^1=11$

$5^2=1$ $7^2=1$ $11^2=1$

$U(12)\neq<5>$ $U(12)\neq<7>$ $U(12)\neq<11>$

إذاً $U(12)$ ليست دوارة ومرتبتها 4.

طريقة أولى: والان لنرى ان كانت متماثلة $U(10)\cong U(12)$؟

لنفرض جدلاً أن $U(10)\cong U(12)$ فإنه يوجد تشاكل متباين و غامر

$$\varphi: U(10)\longrightarrow U(12)$$

بما انه غامر نجد: $\varphi(U(10))=\varphi(U(12))$ ومنه $U(12)$ زمرة دوارة.

وهذا غير ممكن ،فإن الزمرتين غير متماثلتين.

طريقة ثانية: لدينا $3\in U(10)$, $\forall x\in U(12); x^2=1$ ومنه:

$$\varphi(3^2)=\varphi(3).\varphi(3)=\underbrace{(\varphi(3))^2}_{\in U(12)}=\varphi(9)=1=\varphi(1)\Rightarrow 9=1$$

لأنه غامر ، وهذا غير ممكن في $U(10)$ ومنه الزمرتين غير متماثلتين.

تمهيدية:

ليكن $f: G\longrightarrow \bar{G}$ تشاكل زمري وليكن $a\in G$ عندئذٍ:

$0(a)=0(f(a))$ مرتبة العنصر = مرتبة صورته المباشرة

البرهان:

Syria Math Team

لنفرض ان $a \in G$ وأن $0(a) = n$ ومنه $a^n = e \Rightarrow f(a^n) = f(e) = e'$

$$\big(f(a)\big)^n = e'$$

ولنفرض ان $0\big(f(a)\big) = s$ فإن $s \leq n$ ولدينا $\big(f(a)\big)^s = e' \Rightarrow f(a^s) = f(e)$

$$\Rightarrow a^s = e$$

ومنه $n \leq s \Rightarrow n = s$.

مبرهنة: ليكن $n > 1$ عدد صحيح و k قاسم موجب للعدد n عندئذٍ يوجد تشاكل: $\varphi: U(n) \longrightarrow U(k)$

يحقق : $ker(\varphi) = U_k(n)$.

البرهان:

لنعرف العلاقة φ بالشكل:

ليكن $x \in U(n)$ عندئذٍ $1 \leq x < n$, $gcd(x,n) = 1$ ((سنربط x الذي من المنطلق مع عنصر من المستقر وليكن مثلاً: $y \in U(k)$ بحيث يتمتع بخاصتين:

١- $1 \leq y < k$

٢- $\gcd(y,k) = 1$.))

وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ حيث $0 \leq r < k$: $x = q.k + r$

١) عندما $r = 0$ فإن $x = q.k$ وهذا يعني ان : k يقسم x ولدينا k يقسم n فرضاً

فإن : $gcd(x,n) \neq 1$ وهذا مرفوض .

٢) ومنه نجد أن $r \neq 0$ فإن $0 < r < k$ أي : $1 \leq r < k$

لنتحقق أن $gcd(r,k) = 1$.

- اذا كان $gcd(r,k) = d > 1$ فإن : d يقسم r, k كما ان k يقسم n ومنه d يقسم n

ولما كان $gcd(r,k) = d$ فإنه يوجد $\alpha, \beta \in Z$ حيث $r = \beta.d$, $k = \alpha.d$

$$\Rightarrow x = q.k + r = q.\alpha.d + \beta.d = (q.\alpha + \beta)d$$

وهذا يبين أن $gcd(x,n) \neq 1$ لان d يقسم كل من x, n وهذا غير ممكن ومنه $gcd(r,k) = 1$

وهكذا نجد أن $r \in U(k)$.

Syria Math Team

- لنضع : $\varphi(x) = r = x.mod - k \in U(k)$ بما ان باقي القسمة وحيد فإن φ تطبيق.
كما ان φ تشاكل لأنه : $\varphi(x.y) = (x.y)mod - k \;\; ; \;\; \forall x, y \in U(n)$

$$= (x.mod - k)(y.mod - k) = \varphi(x).\varphi(y)$$

- لنبرهن أن : $\ker(\varphi) = U_k(n)$
إن $U_k(n) = \{x: \; x \in U(n) \, , x.mod - k = 1\}$
- ليكن $a \in U_k(n)$ عندئذٍ $a \in U(n) \;\; , \;\; a.mod - k = 1$
فإن $\varphi(a) = a.mod - k = 1$ ومنه: $a \in ker(\varphi)$ ومنه: $U_k(n) \subseteq ker(\varphi)$
- وليكن $x \in ker(\varphi)$ عندئذٍ $x \in U(n)$ ومنه: $\varphi(x) = x.mod - k = 1$
$\Rightarrow x \in U_k(n)$

ومنه: $ker(\varphi) \subseteq U_k(n)$ من الاحتوائين نجد : $ker(\varphi) = U_k(n)$.

زمرة التماثلات:

تمهيدية: لتكن G زمرة . إن مجموعة التماثلات من G الى G تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات

العنصر المحايد فيها هو التطبيق المطابق على G والتي سنرمز لها $Aut(G)$ **اثبت ذلك ((وظيفة)).**

خواص:

١) ترتيب تشاكلين هو تشاكل .عندما يكون معرف.
٢) ترتيب تشاكلين كل منهما متباين هو تشاكل متباين .
٣) ترتيب تشاكلين كل منهما غامر هو تشاكل غامر .
٤) ترتيب تشاكلين كل منهما تقابل هو تشاكل تقابل .
٥) كل تشاكل تقابل يملك تقابل عكسي هو ايضاً تشاكل.

تمهيدية: لتكن G زمرة عندئذٍ : $\forall a \in G$ فإن العلاقة : $Ta : G \longrightarrow G$ المعرفة بالشكل :

$$\forall x \in G \; ; Ta(x) = a.x.a^{-1}$$

هي تماثل للزمرة G .

البرهان:

ليكن $x,y \in G$ بحيث $x=y$ عندئذٍ: $Ta(x)=a.x.a^{-1}=a.y.a^{-1}=Ta(y)$

فإن Ta تطبيق .

ان Ta تشاكل لان: $Ta(x.y)=a(x.y)a^{-1}=(a.x.a^{-1})(a.y.a^{-1})$

$$\Rightarrow Ta(x)=Ta(y)$$

وإن Ta متباين لان اذا كان : $Ta(x)=Ta(y)\Rightarrow a.x.a^{-1}=a.y.a^{-1}\Rightarrow x=y$

- ليكن $b\in G$ عندئذٍ $a^{-1}.b.a\in G$ (المنطلق)
- وإن $Ta(a^{-1}.b.a)=a(a^{-1}.b.a)a^{-1}=b$

أي ان Ta غامر . ومنه Ta تماثل للزمرة G.

تعريف : لتكن G زمرة ، $a\in G$ نسمي التماثل Ta تماثل داخلي للزمرة ونرمز لمجموعة التماثلات الداخلية $Inn(G)$ وهي مجموعة غير خالية.

ملاحظة: في حال كون الزمرة G تبديلية فإن مجموعة التماثلات الداخلية للزمرة G تكون مؤلفة من العنصر $\{Te\ :\ e\in G\}$ أي $Inn(G)=\{Te\ :\ e\in G\}$

وهو التماثل المولّد بالمحايد ويحوي عنصر واحد فقط..

إن الحياة تكون بالحقيقة ظلمة حالكة إذا لم ترافقها الحركة،

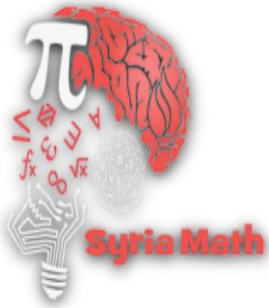
والحركة تكون عمياء لابركة فيها إن لم ترافقها المعرفة.

#جبران_خليل_جبران

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج

Syria Math Team



نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : السادسة عشر ◄ عنوان المحاضرة : زمرة التماثلات

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مبرهنات.

٢ـ أحد الشروط التي لاجلها دوماً يوجد تماثل للزمرة Z_n.

تمهيدية:

لتكن G زمرة ان المجموعة $Inn(G) = \{Ta: a \in G\}$ تشكل زمرة جزئية في الزمرة $Aut(G)$.

البرهان:

واضح أن: $\emptyset \neq Inn(G) \in Aut(G)$

- لنبرهن أولاً على أن $\forall a \in G \ : \ T^{-1}a = Ta^{-1}$
- ليكن $a \in G$ لما كان Ta تماثل للزمرة G
- فإن: $Ta \in Aut(G)$ ومنه يوجد مقلوب لهذا العنصر ينتمي لنفس الزمرة أي : $T^{-1}a \in Aut(G)$ ومن خواصه :

$$Ta.T^{-1}a = Te = I_G$$

$$\forall x \in G \ ; (Ta.T^{-1}a)(x) = I_G(x) = x$$

$$, Ta\left(T^{-1}a(x)\right) = x$$

$$\Rightarrow a.T^{-1}a(x)a^{-1} = x$$

$$\Rightarrow T_a^{-1}(x) = a^{-1}.x.(a^{-1})^{-1} = Ta^{-1}(x)$$

ومنه $T^{-1}a = Ta^{-1}$.

- لنبرهن ثانياً أن $Ta.T^{-1}b \in Inn(G)$
- ليكن $b \in Inn(G)$ $Ta.T$ حيث $a, b \in G$

Syria Math Team

$$\forall x \in G \ ; \ (Ta.T^{-1}b)(x) = Ta\left(T_b^{-1}(x)\right)$$

$$= Ta\left(T_{b^{-1}}(x)\right) = Ta(b^{-1}.x.b)$$

$$= a(b^{-1}.x.b)a^{-1} = (a.b^{-1})x(b.a^{-1}) = T_{a.b^{-1}}(x)$$

ولما كان $a.b^{-1} \in G$ فإن $T_{a.b^{-1}} \in Inn(G)$ ومنه $T_a.T_b^{-1} = T_{a.b^{-1}} \in Inn(G)$

ومنه فإن : $Inn(G)$ زمرة جزئية في زمرة التماثلات $Aut(G)$

مبرهنة:

لتكن G زمرة عندئذٍ :

١- الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في $Aut(G)$.

٢- $G/Z(G) \cong Inn(G)$

البرهان

١- لنبرهن على ان $\forall f \in Aut(G)$ فإن $f.Inn(G)f^{-1} \subseteq Inn(G)$

- ليكن $\varphi \in f.Inn(G)f^{-1}$ عندئذٍ يوجد $a \in G : T_a \in Inn(G)$ يحقق:

$$\varphi = f.T_a.f^{-1}$$

ان φ تماثل للزمرة G.

$$\forall x \in G; \varphi(x) = (f.T_a.f^{-1})(x) = f(T_a(f^{-1}(x))$$

$f^{-1}(x)$ مقلوب العنصر f وهو تشاكل منطلقه G ومستقره G

$$\Rightarrow f(T_a(f^{-1}(x)) = f(a.f^{-1}(x).a^{-1})$$

$$= f(a).(x)(f(a^{-1}))$$

$$= T_{f(a)}(x) : f(a) \in G$$

ومنه $\varphi = T_{f(a)} \in Inn(G)$

وهذا يبين ان الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في $Aut(G)$

Syria Math Team

٢) لنعرف العلاقة : $\mu: G \longrightarrow Inn(G)$

بالشكل : $\forall a \in G\ ; \mu(a) = T_a$

إن μ تطبيق لأن : $\forall a, b\ \in G : a = b\ ; a^{-1} = b^{-1}$

وبالتالي : $\forall x \in G; ax = bx \Rightarrow a.x.a^{-1} = b.x.b^{-1}$

$$\Rightarrow T_a(x) = T_b(x) \Rightarrow T_a = T_b$$

$$\Rightarrow \mu(a) = \mu(b)$$

إن μ تشاكل لأن : $\forall x \in G\ ;\ \mu(a.b) = T_{a.b}$

إن $T_{a.b}(x) = (a.b)(x)(a.b)^{-1}$

$$= (a.b)(x)(b^{-1}.a^{-1}) = a(b.x.b^{-1})a^{-1}$$

$$T_a(b.x.b^{-1}) = T_a\big(T_b(x)\big) = T_a.T_b(x)$$

$$\Rightarrow T_{a.b} = Ta.Tb$$

$$\Rightarrow \mu(a.b) = \mu(a).\mu(b)$$

μ غامر لأن : $\forall c \in Inn(G); c \in G\ \Rightarrow \mu(c) = T_c$

اصبح لدينا تشاكل زمري غامر وحسب مبرهنة التماثل الأولى $\frac{G}{ker(\mu)} \cong Inn(G)$

- لنبرهن ان $ker(\mu) = Z(G)$

$$= \{a\ : a \in G\ , ax = xa : x \in G\}$$

- ليكن $a \in ker(\mu)$ عندئذٍ $\mu(a) = I_G\ ,\ \mu(a) = T_a \Rightarrow T_a = I_G$

$$\Rightarrow T_a(x) = I(x)\ \ \forall x \in G$$

$$\Rightarrow a.x.a^{-1} = x \Rightarrow ax = x$$

$$\Rightarrow a \in Z(G)$$

$$\Rightarrow ker(\mu) \subseteq Z(G)$$

Syria Math Team

- ليكن $b \in Z(G)$ عندئذٍ : $\forall x \in G\ ; bx = xb \Rightarrow b.x.b^{-1} = x$
- $\Rightarrow T_b(x) = I(x)$

$$\Rightarrow \mu(b) = T_b = I_G \Rightarrow b \in ker(\mu)$$

$$\Rightarrow Z(G) \subseteq ker(\mu) \Rightarrow Z(G) = ker(\mu)$$

- احد الشروط التي لأجلها دوماً يوجد تماثل للزمرة Z_n

مبرهنة : ليكن $n > 1$ عدد صحيح ولأجل كل $0 < r < n$

ويحقق $gcd(n,r) = 1$ يوجد تماثل للزمرة Z_n.

الاثبات :

ليكن $0 < r < n$ عدد صحيح يحقق $gcd(r,n) = 1$

ولنعرف العلاقة :

$$\varphi : Z_n \to Z_n$$

بالشكل الاتي : $\forall\ k \in Z_n$ فإن $\varphi(k) = r.k\ mod - n \in Z_n$

إن φ تطبيق لأنه $\forall\ k_1, k_2 \in Z_n\ ,\ k_1 = k_2\ ; r.k_1 = r.k_2$

$$\Rightarrow r.k_1\ mod - n = r.k_2\ mod - n$$

$$\Rightarrow \varphi(k_1) = \varphi(k_2)$$

أن φ متباين لان :

$$\forall \varphi(k_1) = \varphi(k_2)$$

$$\Rightarrow r.k_1.mod - n = r.k_2.mod - n$$

ومنه: $rk_1 = q_1.n + \lambda\ ,\ rk_2 = q_2.n + \lambda$

حيث $0 \le \lambda < n$ و $\lambda, q_1, q_2 \in Z$ وبالتالي :

$$r(k_1 - k_2) = (q_1 - q_2)\ n\ \ (*)$$

لنفرض جدلا أن $k_1 \neq k_2$

Syria Math Team

لدينا من جهة أخرى: $gcd(n,r)=1$ فإنه يوجد $s,t \epsilon Z$ بحيث

$$1 = rt + sn$$

نضرب(∗) بـ s نجد :

$$sr(k_1-k_2) = (q_1-q_2)ns$$
$$= (q_1-q_2)(1-rt\ \ )$$
$$\Rightarrow sr(k_1-k_2)$$
$$= (q_1-q_2)-(q_1-q_2)rt$$
$$\Rightarrow sr(k_1-k_2)+rt(q_1-q_2)=(q_1-q_2)$$
$$\Rightarrow r\left[\underbrace{s(k_1-k_2)+t(q_1-q_2)}_{d}\right]=(q_1-q_2)$$
$$\Rightarrow r.d=q_1-q_2$$
$$\Rightarrow r.d.n=(q_1-q_2)n$$

نعوض في (∗) نجد :

$$r.d.n = r(k_1-k_2) \Rightarrow d.n = k_1-k_2$$

وهذا يبين ان $k_1-k_2 \geq n$

من جهى أخرى لدينا $k_1-k_2 < n$ وهذا غير ممكن ومنه : $k_1=k_2$ و φ متباين.

φ غامر:

لانه تطبيق متباين ، المنطلق والمستقر له نفسهُ وهو مجموعة منتهية.

φ تشاكل لأن :

$$\varphi(k_1+k_2)=\varphi(k_1)+\varphi(k_2)$$

ان
$$\varphi(k_1+k_2)=r(k_1+k_2)mod-n$$
$$=(rk_1+rk_2)mod-n$$

Syria Math Team

$$= rk_1 mod - n + rk_2 mod - n$$

$$= \varphi(k_1) + \varphi(k_2)$$

ومنه فإن φ تماثل في الزمرة G.

إذا كنت تُريد أن تكون في القمة ، وأن تغير العالم، ابدأ من نفسك أولاً ولا تتبع التقليد الأعمى..

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج

Syria Math Team

28-11-2017

نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: السابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الجداء الخارجي

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-الزمرة الجزئية المتميزة وخواصها.

٢- سوف نبدأ ببحث جديد: الجداء الخارجي للزمر.

٣- خواص الجداء الخارجي وأمثلة عنه.

تمهيدية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G فإن الشرط الازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G هو أن يتحقق: $\forall f \epsilon Inn(G);\ f(H) = H$.

الاثبات :

◄لزوم الشرط : لنفرض أن H ناظمية في G وليكن f تماثل داخلي أي $f \in Inn(G)$ عندئذ:

$$f = Ta : a \in G$$

$$\Rightarrow \forall h \in H \quad ; \quad f(h) = Ta(h) = a.h.a^{-1} \in a.H.a^{-1} \subseteq H$$

$$f(H) \subseteq H \ldots (1)$$ ومنه :

- هذا الاحتواء لأجل كل تماثل داخلي.
- مجموعة الاحتواء زمرة جزئية في زمرة كل التماثلات ⇐ لكل عنصر فيها مقلوب وطالما هذا الاحتواء صحيح لكل f فهو صحيح لأجل مقلوب f ⇐ أي :

$$f^{-1}(H) \subseteq H \Rightarrow f\left(f^{-1}(H)\right) \subseteq f(H)$$ فإن: $f^{-1}\epsilon\, Inn(G)$

$$H \subseteq f(H) \ldots . (2) \Rightarrow$$(طالما المقلوب تماثل)

من الاحتواءين نجد: $f(H) = H$

◄كفاية الشرط : لنفرض ان : $f(H) = H$; $\forall f \in Inn(G)$ ولنبرهن أن $\forall a \in G ; a.H.a^{-1} \subseteq H$ أي ان H ناظمية في G .

ليكن $y \in a.H.a^{-1}$ فإن $h \in H \quad : \quad y = a.h.a^{-1}$

$= T_a(h) \in T_a(H) = H$

ومنه $a.H.a^{-1} \subseteq H$

وبالتالي H زمرة جزئية ناظمية في G .

سندرس الزمر التي صورتها هي نفسها في أي تماثل.

الزمر الجزئية المتميزة:

تعريف: لتكن G زمرة و k زمرة جزئية في G نقول ان k متميزة في G إذا كان :

$$\forall f \in Aut(G) \; ; \; f(k) = k$$

أي ان مفهوم الزمرة المتميزة ما هو الا تعميم لمفهوم الزمرة الناظمية ويبين انه توجد علاقة هامو بين الزمر الجزئية لزمرة وبين زمرة التماثلات لهذه الزمرة.

ينتج من التعريف : ١- ان كل من $< e >, < G >$ هي زمرة جزئية متميزة في G.

٢- كل زمرة جزئية متميزة في زمرة G تكون ناظمية في G .

- **خواص الزمر الجزئية المتميزة :**
- **تمرين:**

لتكن G زمرة اثبت ان $Z(G)$ زمرة جزئية متميزة في G.

الحل:

لدينا : $Z(G) = \{a : a \in G \, , ax = xa \; ; \; \forall x \in G\}$

زمرة جزئية في G ولنبرهن أن: $\forall f \in Aut(G) \; ; \; f\big(Z(G)\big) = Z(G)$

ليكن $y \in Z(G)$ ولنبرهن أن $f(y) \in Z(G)$

ليكن $x \in G$ ، $f \in Aut(G)$ بما ان $f(G) = G$ لانه تماثل عندئذٍ

$$\exists x_0 \in G : x = f(x_0)$$

Syria Math Team

ولنبرهن على ان : $x.f(y) = f(y).x$

$$x.f(y) = f(x_0).f(y) = f(x_0.y) = f(y.x_0) = f(y).f(x_0)x$$

ومنه $f(y) \in Z(G)$ أي ان $f(z(G)) \subseteq Z(G)$

لما كان $f \in Aut(G)$ فإن $f^{-1} \in Aut(G)$

وطالما هذا الاحتواء صحيح لأجل كل f فهو صحيح لاجل المقلوب وطالما f تطبيق نأخذ الصورة المباشرة له . وبالتالي فإن : $f^{-1}(z(G)) \subseteq Z(G)$

ومنه $f\left(f^{-1}(z(G))\right) \subseteq f(z(G))$

$\Leftarrow f(z(G)) = z(G)$ أي الزمرة الجزئية $z(G)$ متغيرة في G

تمهيدية: لتكن G زمرة عندئذ: ١) كل زمرة جزئية متميزة في G تكون ناظمية في G

٢) H, k زمر جزئية في G بحيث $k \subseteq H$: اذا كانت Hمتميزة في G و k متميزة في H فإن k متميزة في G .

البرهان:

١) لتكن k زمرة جزئية متميزة في G عندئذٍ لأجل : $f \in Aut(G), f(K) = k$

وبالتالي أيا كان $T_a \in Inn(G)$ فإن $T_a \in Aut(G); T_a(K) = K$ فهي ناظمية في G حسب المبرهنة السابقة.

٢) لنفرض ان H متميزة في G عندئذٍ:

1) $f \in Aut(G)\ ;\ f(H) = H$

وان k متميزة في H عندئذٍ:

2) $\forall g \in Aut(H)\ ;\ f(k) = k$

ولنبرهن أن $\forall f \in Aut(G)\ ;\ f(k) = k$

- ليكن $f \in Aut(G)$ عندئذٍ: f تطبيق وتشاكل ومتباين وغامر. $: G \longrightarrow G$
- ولنفرض أن : $f_0 : H \longrightarrow G$

هو مقصور f على H . تطبيق ومتباين ومتشاكل لكن ليس تماثل.

وحسب الفرض: $f_0(H) = f(H) = H$ أي أن :

Syria Math Team

$f_0 : H \longrightarrow H$ هو تماثل للزمرة H (صغرنا المستقر فأصبح غامر)وبالتالي : $f_0 \in Aut(H)$
ولما كانت k متميزة في H نجد ان : $f_0(k) = k$
$$\Rightarrow f(k) = f_0(k) = k$$
وبالتالي k متميزة في G .

سوف نبدأ ببحث جديد وهو الجداء الخارجي للزمر

تمهيدية : لتكن G_1, G_2 زمرتين لنأخذ المجموعة :

$$G_1 \oplus G_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \epsilon G_1 \ , \quad g_2 \epsilon G_2 \ \}$$

غير خالية ،ولنعرف على المجموعة عملية $(.)$ بالشكل الاتي :

$$\forall \ (a_1, a_2), (b_1, b_2) \epsilon G_1 \oplus G_2$$

فإن : $(a_1, a_2).(b_1, b_2) = (a_1 \underset{\text{معرف على } G_1}{.} b_1 \ , a_2 \underset{\text{معرف على } G_2}{.} b_2)$;

إن الثنائية $((G_1 \oplus G_2),\cdot)$ تشكل زمرة والعنصر المحايد فيها هو (e_1, e_2) ومقلوب $(a \ , b)$ هو:

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$$

نسمي الزمرة $G_1 \oplus G_2$ زمرة الجداء المباشر للزمرتين G_1, G_2
حيث $\oplus$ جداء ديكارتي و $\cdot$ جداء داخلي (عملية) ((البرهان وظيفة))

أمثلة:

١) لنأخذ الزمرتين $U(8), U(10)$ اوجد $U(8) \oplus U(10)$.

$$U(8) = \{1,3,5,7\}$$

$$U(10) = \{1,3,7,9\}$$

$$U(8) \oplus U(10) = \{(1,1), (1,3), (1,7), (1,9), (3,1), (3,3), (3,7), (3,9),$$

$$(5,1), (5,3), (5,7), (5,9), (7,1), (7,3), (7,7), (7,9)\}$$

نجد ان العنصر المحايد هو $(1,1)$ وان:

$$(1,3)^{-1} = (1^{-1}, 3^{-1}) = (1,7)$$

$$(5,9)^{-1} = (5^{-1}, 9^{-1}) = (5,9)$$

٢) اوجد $U(8) \oplus Z_3$ (زمرة ضربية وزمرة جمعية)

Syria Math Team

$$U(8)=\{1,3,5,7\}$$
$$Z_3=\{0,1,2\}$$
$$U(8)\oplus Z_3=\{(1,0),(1,1),(1,2),(3,0),(3,1),(3,2),(5,0),(5,1),(5,2),(7,0),(7,1),(7,2)\}$$

نجد ان العنصر المحايد هو $(1,0)$

وأن $(3,1)^{-1}=(3^{-1},1^{-1})=(3^{-1},-1)=(3,2)$

$(5,2)^{-1}=(5^{-1},2^{-1})=(5^{-1},-2)=(5,2)$

- الزمرة الأولى ضربية لها مقلوب ، أما الثانية جمعية نأخذ نظير.

٣) اوجد $Z_2\oplus Z_3$ (زمرتين جمعيتين)

$Z_2=\{0,1\}$ و $Z_3=\{0,1,2\}$

$$Z_2\oplus Z_3=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

نجد ان العنصر المحايد هو $(0,0)$ وإن :

$$(0,1)^{-1}=(0^{-1},1^{-1})=(-0,-1)=(0,2)$$

$$(1,2)^{-1}=(1^{-1},2^{-1})=(-1,-2)=(1,1)$$

دراسة خواص الجداء المباشر للزمر:

مبرهنة: لتكن G_1,G_2 زمرتين عندئذ :

١) $G_1\oplus G_2\cong G_2\oplus G_1$

٢) $Z(G_1\oplus G_2)=Z(G_1)\oplus Z(G_2)$

الاثبات :

١) لنعرف العلاقة : $f: G_1\oplus G_2\to G_2\oplus G_1$ بالشكل التالي :

$$\forall(a\ ,b)\in G_1\oplus G_2\ ;\ f(a\ ,b)=(b,a\ )$$

إن العلاقة f هي تطبيق متباين لآنه :

$$\forall\ (a\ ,b),(a_1,b_1)\in G_1\oplus G_2$$

لو فرضنا $(a\ ,b)=(a_1,b_1)$:

$$\Leftrightarrow a\ =a_1\quad ,\quad b=b_1$$

$$\Rightarrow (b,a)=(b_1,a_1)\in G_2\oplus G_1\Rightarrow f\big((a,b)\big)=f\big((a_1,b_1)\big)$$

Syria Math Team

ومنه f تطبيق متباين .

و f تشاكل لأن :

$$f[(a\ ,b).(a_1,b_1)] = f\big((a.a_1, b.b_1)\big)$$

حسب تعريف الجداء

$$\overset{\text{حسب تعريف الجداء}}{=} (b.b_1\ , a\ .a_1) = (b,a).(b_1,a_1) = f\big((a,b)\big).f\big((a_1,b_1)\big)$$

وهو أيضا غامر لان :

$$\forall c,d \in G_2 \oplus G_1\ \ ;\ \ c \in G_2\ ,\ \ d \in G_1$$

بالتالي: $(d,c) \in G_1 \oplus G_2$

$$\Rightarrow f(d,c) = (c,d)$$

ومما سبق نجد أن f تماثل .

٢) ليكن $(a,b) \in Z(G_1 \oplus G_2)$

لنثبت ان : $a \in Z(G_1)\ ,\ b \in Z(G_2)$

ليكن $x \in G_1$ لنبرهن ان $ax = xa$

ليكن $y \in G_2$ لنبرهن ان $by = yb$

ليكن $x \in G_1\ \ ,\ \ y \in G_2$ إن :

$$(x,y) \in G_1 \oplus G_2 \Rightarrow (a,b)(x,y) = (x,y)(a,b)$$

(a,b) ينتمي للمركز فهو متبادل مع العناصر

$$\Rightarrow (a.x, b.y) = (xa, yb)$$

$$\Rightarrow ax = xa\ \ ,\ \ by = yb \Rightarrow a \in Z(G_1), b \in Z(G_2)$$

$$\Rightarrow (a,b) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$$

$$\Rightarrow Z(G_1 \oplus G_2) \subseteq Z(G_1) \oplus Z(G_2) \ldots . (1)$$

لنثبت الاحتواء المعاكس:

ليكن $(s,t) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$ عندئذٍ :

$$\forall (x,y) \in G_1 \oplus G_2\ ; (s,t)(x,y) = (sx, ty)$$

$$= (xs, yt) = (x,y).(s,t) \Rightarrow (s,t) \in Z(G_1 \oplus G_2)$$

$$\Rightarrow Z(G_1) \oplus Z(G_2) \subseteq Z(G_1 \oplus G_2) \ldots . . (2)$$

من الاحتواءين : $\Rightarrow Z(G_1) \oplus Z(G_2) = Z(G_1 \oplus G_2)$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج

Syria Math Team

نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الثامنة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الجداء المباشر

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ سوف نتابع في خواص الجداء المباشر.

٢ـ المجموع المباشر للزمر.

لنكمل في خواص الجداء المباشر:

تمهيدية: لتكن G_1 و G_2 زمرتين عندئذٍ

١) كل من $G_1 \oplus <e_2>$, $<e_1> \oplus G_2$ زمرة جزئية في الزمرة $G_1 \oplus G_2$

٢) $G_1 \cong G_1 \oplus <e_2>$ و $G_2 \cong <e_1> \oplus G_2$

البرهان:

١) لدينا $G_1 \oplus <e_2> = \{(a, e_2) \ ; \ a \in G_1\} \subseteq G_1 \oplus G_2$

"وهي مجموعة جزئية من $G_1 \oplus G_2$ وغير خالية لأن :

$$(e_1, e_2) \in G_1 \oplus <e_2>$$

ليكن $(a, e_2)\,(b, e_2) \in G_1 \oplus <e_2>$ حيث $a, b \in G_1$

فإن : $(a, e_2)(b, e_2)^{-1} = (a, e_2)\,(b^{-1}, e_2^{-1})$

$$= \left(\underbrace{ab^{-1}}_{\in G_1}, e_2\right) \in G_1 \oplus <e_2>$$

وهذا يبين أن المجموعة $G_1 \oplus <e_2>$ زمرة جزئية في $G_1 \oplus G_2$ وبنفس الطريقة نبرهن المجموعة الثانية.

٢) لنعرف العلاقة : $\varphi : G_1 \to G_1 \oplus <e_2>$ بالشكل الاتي:

Syria Math Team

$$\forall\, a \in G_1 \quad ;\ \varphi(a) = (a, e_2)$$

إن φ تطبيق ومتباين لان :

$$\forall\, a, b \in G_1 \ : a = b\ ;\ (a, e_2) = (b, e_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

وإن φ تشاكل لأن:

$$\varphi(a.b) = (a.b\,, e_2) = (a, e_2).(b, e_2) = \varphi(a).\varphi(b)$$

كما أن φ غامر لأنه إذا كان

$(d, e_2) \in G_1 \oplus < e_2 >$ فإن $d \in G_1$ ومنه: $\varphi(d) = (d.e_2)$

ومنه φ تماثل .

نتيجة: كل زمرة يمكن النظر اليها على انها جداء خارجي لزمرتين او اكثر.

- لنورد من خلال المبرهنة التالية طريقة لحساب مرتبة عنصر من الجداء المباشر للزمر وذلك بالاعتماد على مراتب المركبات .

مبرهنة:

لتكن G_1, G_2 زمرتين ولنفرض ان $(g_1, g_2) \in G_1 \oplus G_2$ عندئذ:

$$o(g_1, g_2) = Icm\big(o(g_1), o(g_2)\big)$$

أي أن : مرتبة كل عنصر من الجداء المباشر لزمرتين يساوي المضاعف المشترك الأصغر لمراتب المركبات.

البرهان :

لنفرض أن :

$$o(g_1) = n \ , \quad o(g_2) = m\,, \quad o((g_1, g_2)) = t \ , \ Icm(n, m) = S$$

لنبدأ من مرتبة الثنائية : لما كان $o((g_1, g_2)) = t$ فإن :

$$(g_1, g_2)^t = (e_1, e_2)$$

$$(g_1^t, g_2^t) = (e_1, e_2) \Rightarrow g_1^t = e_1 \ , \ g_2^t = e_2$$

وبالتالي فإن n يقسم t و m يقسم t

ومنه t مضاعف لكل من n, m ومنه $s \leq t$

ومن جهة أخرى: لما كان $s = Icm(m,n)$ فإن : s يقبل القسمة على كل من n, m

ومنه يوجد $\alpha, \beta \in Z$:

$$s = \beta . m$$

$$s = \alpha . n$$

وبالتالي : $(g_1, g_2)^s = (g_1^s, g_2^s) = \left(g_1^{\alpha.n}, g_2^{\beta.m}\right) = \left((g_1^n)^\alpha, (g_2^m)^\beta\right) = (e_1, e_2)$

بما ان $o((g_1, g_2)) = t$ و $(g_1^s, g_2^s) = (e_1, e_2)$ وحسب مبرهنة سابقة نجد ان:

t يقسم s ; $g^s = e : \forall s \in Z \Leftarrow t \leq s$ ومنه $t = s$

نتيجة: يمكن تعميم النص السابق ل n زمرة .

لتكن $G_1, G_2, \dots G_n$ أسرة منتهية من الزمر ولنفرض أن : $(g_1, g_2, .. g_n) \in G_1 \oplus G_2 \dots . G_n$

عندئذٍ : $o\left((g_1, g_2, \dots g_n)\right) = Icm\left(o(g_1), o(g_2), \dots o(g_n)\right)$

الآن لنورد إحدى الحالات الخاصة التي تعطينا الشرط اللازم والكافي لكي يكون الجداء المباشر لزمر دوارة منتهية هو زمرة دوارة.

مبرهنة: لتكن H, K زمرة دوارة منتهية ولنفرض ان $(K:1) = m$, $(H:1) = n$

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون $H \oplus K$ دوارة.

هو أن يكون $gcd(n,m) = 1$

البرهان :

Syria Math Team

لنفرض أن $H =< a >: a \in H \quad , \quad K =< b >: b \in K$

عندئذٍ : $(H \oplus K: 1) = n.m \ , \ o(a) = n \, , o(b) = m$

◄لزوم الشرط :

لنفرض أن $H \oplus K$ دوارة ولنبرهن أن $gcd(n,m) = 1$

لنفرض جدلا أن $gcd(n,m) = d > 1$ لما كان d يقسم n فإن: $o(a) = n$

$$a^{\frac{n}{d}} \in H \ , \quad o\left(a^{\frac{n}{d}}\right) = d$$

$$\left(a^{\frac{n}{d}}, e_k\right) \in H \oplus K \, , \rightarrow o\left(a^{\frac{n}{d}}, e_k\right) = d$$

$$\Rightarrow \left(< a^{\frac{n}{d}} , e_k >: 1\right) = d \ \Rightarrow o\left(a^{\frac{n}{d}}\right) = d \Rightarrow a^{\frac{n}{d}} \neq e_H$$

ولما كان d يقسم m ، $o(b) = m$ فإن:

$$b^{\frac{m}{d}} \in k \, , o\left(b^{\frac{m}{d}}\right) = d$$

$$\left(e_H \, , b^{\frac{m}{d}}\right) \in H \oplus K \ \Rightarrow o\left(e_H, b^{\frac{m}{d}}\right) = d$$

$$\Rightarrow \left(< e_H, b^{\frac{m}{d}} >: 1\right) = d \ \Rightarrow o\left(b^{\frac{m}{d}}\right) = d \Rightarrow b^{\frac{m}{d}} \neq e_k$$

ومنه : $(a^{\frac{n}{d}}, e_k) \neq (e_H, b^{\frac{m}{d}})$ وبالتالي : $< \left(a^{\frac{n}{d}}, e_k\right) > \neq < \left(e_H, b^{\frac{m}{d}}\right) >$

وهذا غير ممكن وبالتالي : $gcd(n,m) = 1$

كفاية الشرط : لنفرض ان $gcd(n,m) = 1$ ولنأخذ الزمرة الجزئية $< (a,b) > \subseteq H \oplus K$

إن : $o\big((a,b)\big) = Icm\big(o(a), o(b)\big) = Icm(n,m) = n.m$

لأن n, m اوليان فيما بينهما.

مجموعتين منتهيتين إحداهما محتواه في الاخر ولهما نفس الكمية من العناصر .

$$\Rightarrow H \oplus K =< (a,b) >$$

Syria Math Team

ومنه $H\oplus K$ دوارة.

مثال: لنأخذ الزمرتين : Z_2, Z_5 هل الجداء لهما زمرة دوارة؟

الحل:

$Z_2\oplus Z_5 \cong Z_{10}$ نعم دوارة لأن كل من الزمرتين دوارة ومراتبهم اعداد أولية فيما بينهما.

مثال: لنأخذ الزمرتين Z_3, Z_9 هل الجداء لهما زمرة دوارة؟

الحل:

$Z_3\oplus Z_9 \ncong Z_{27}$ لا، لأن المراتب ليست أعداد أولية فيما بينهما - زمرة الجداء ليست دوارة.

نتيجة: ليكن $m = n_1.n_2 \dots n_t$ عندئذٍ : $Z_m \cong Z_{n1}\oplus Z_{n2}\oplus \dots . Z_{nt}$

عندما وفقط عندما : $gcd(n_i, n_j) = 1\ \forall i \neq j$

مثال:

$$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_5 \cong \begin{cases} Z_2\oplus Z_6\oplus Z_5 \\ Z_2\oplus Z_2\oplus Z_{15} \cong Z_2\oplus Z_{30} \end{cases}$$

$$Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3\oplus Z_5 \cong\longrightarrow Z_6\oplus Z_{10} \ncong Z_{60}$$

((المجموع المباشر للزمر)):

تعريف:

لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية ناظمية في G ، نقول ان G مجموع مباشر للزمرتين H, K اذا كان :

١) $G = H, K$.

٢) $H \cap K =< e >$ ونرمز له $G = H \times K$

تمهيدية:

لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية ناظمية في G .

اذا كان $H \cap K =< e >$ عندئذٍ:

$$\forall h \in H\ , k \in K\ ; h.R = R.h$$

البرهان:

لنأخذ العنصر : $h.R.h^{-1}.R^{-1} = \left(\underbrace{h.R.h^{-1}}_{\in k}\right)R^{-1} \in kR^{-1} = k$

$$h.R.h^{-1}.R^{-1} = h\left(\underbrace{R.h.R^{-1}}_{\in H}\right) \in h.H = H$$

$$\Rightarrow h.R.h^{-1}.R^{-1} \in H \cap k =< e >$$

$$\Rightarrow h.R.h^{-1}.R^{-1} = e$$

$$\Rightarrow h.R = R.h$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هج

Syria Math Team